

# **ГОДИШНИК**

**НА ШУМЕНСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ  
„ЕПИСКОП КОНСТАНТИН ПРЕСЛАВСКИ“**

**Том XVIII С**

**ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И  
ИНФОРМАТИКА**

---

**ANNUAL**

**OF KONSTANTIN PRES LAVSKY  
UNIVERSITY OF SHUMEN**

**Vol. XVIII С**

**FACULTY OF MATHEMATICS AND  
COMPUTER SCIENCE**

**ШУМЕН  
2017**

**Главен редактор:** проф. д.м.н. Иво Михайлов

**Редакционна колегия:** проф. д.н. Борислав Стоянов  
проф. д-р Димчо Станков  
доц. д.н. Наталия Павлова  
доц. д-р Найдено Ненков  
доц. д-р Корнелия Тодорова

© Факултет по математика и информатика

© Университетско издателство

**„Епископ Константин Преславски“**

**ISSN 1311-834X**

# A TRIANGULAR MODEL OF A COUPLING OF DISSIPATIVE AND ANTIDISSIPATIVE OPERATORS WITH REAL SPECTRA\*

GALINA S. BORISOVA

**ABSTRACT:** *This paper finishes the description of the large class of nonselfadjoint operators with real spectra, presented as a coupling of dissipative and antidissipative operators and having a limit of the corresponding correlation functions.*

**KEYWORDS:** *Nonselfadjoint operator, dissipative operator, triangular model, characteristic operator function, operator colligation, coupling*

## 1 Introduction

This paper is dedicated to the further development of one of the directions in the nonselfadjoint operator theory founded by M.S. Livšić and his associates.

After the classical book of John von Neumann "The Mathematical Foundations of Quantum Mechanics" (where the quantum mechanics is presented as a unified theory based on the spectral theory of selfadjoint operators in Hilbert spaces) the efforts of many mathematicians show that the spectral analysis of nonselfadjoint operators cannot be made to fit into the framework of the theory of selfadjoint operators and its simplest generalizations. Nonselfadjoint operators arise in the discussion of processes that proceed without conservation of energy.

In the end of 1970s there were many prerequisites for investigations of nonselfadjoint operators. The theory of nonselfadjoint operators is based on:

— the theory of the characteristic functions and the triangular models of M.S. Livšić;

---

\*Partially supported by Scientific Research Grant DDVU 02/91 of MON and Scientific Research Grant RD-08-120/2017 of Shumen University.

— the theory of dilations and functional models of B.Sz.-Nagy and C. Foias;

— the scattering theory of P. Lax and R. Phillips.

The first major method in the nonselfadjoint operator theory was initiated in the middle of the 1940s by M.S. Livšić [11, 13]. The main tool here is the characteristic operator function, which is associated with an arbitrary operator  $A$  in a Hilbert space  $H$  in the following way

$$I - i\Phi(A - \lambda I)^{-1}\Phi^*J,$$

where  $J$  is a signature operator (i.e.  $J = J^* = J^{-1}$ ) and

$$\Phi^*J\Phi = \frac{A - A^*}{i}.$$

This function serves as a unitary invariant of the operator  $A$  and in many important cases it is much easier to analyze than the original operator. The characteristic operator function has intriguing properties. The main point is that there is a relation between invariant subspaces of the operator and factorizations of its characteristic function. This result is proved by M.S. Livšić and V.P. Potapov in [17]. This relation and Potapov's theorem allow to M.S. Livšić to construct the so-called triangular model of nonselfadjoint operators with finite dimensional imaginary parts ([12]).

Let  $H$  be a separable Hilbert space and let  $A$  be a bounded linear nonselfadjoint operator in  $H$  with a finite dimensional imaginary part  $\dim(A - A^*)H < +\infty$  (i.e. the so-called operator with a finite non-hermitian rank.) Analogously it can be considered the case when the imaginary part of  $A$  belongs to the trace class.

In the case when the operator  $A$  is a dissipative operator in a Hilbert space  $H$  (i.e.  $(A - A^*)/i \geq 0$ ) it follows immediately that there exists the limit

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (e^{itA}f, e^{itA}f), \quad f \in H.$$

The existence of this limits ensures the existence of the wave operator  $W_+(A^*, A)$  as a weak limit

$$(W_+(A^*, A)f, g) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (e^{-itA^*}e^{itA}f, g)$$

for the couple  $(A^*, A)$  ( $f, g \in H$ ), obtaining the correlation function  $V(t, s) = (e^{itA}f, e^{isA}f)$  of the dissipative curves  $e^{itA}f$  and the limit of the correlation function.

These results for the dissipative operators are presented in the works of M.S. Livšic and his associates (see, for example, [6, 16, 15, 14, 5]).

Naturally there arises the question: are there nondissipative operators  $A$  in a Hilbert space  $H$  for which there exist the limits

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (e^{itA} f, e^{itA} f), \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} (e^{itA} f, e^{itA} f).$$

It turns out that there exists a larger class of bounded nondissipative operators in a Hilbert space which solve the question, mentioned above. This class of bounded linear nondissipative operators, presents couplings of dissipative and antidissipative operators with finite dimensional imaginary parts and real absolutely continuous spectra. (Analogously it can be considered the case when imaginary part of the operator belongs to the trace class.) The triangular model of the operators from this class is introduced by the author in [1] and investigated in [7, 2, 8]. The natural consideration of this class follows from the system-theoretic significance of the colligation which is connected with the multiplication theorem of the corresponding correlation function. In [7] the asymptotic behaviour of the nondissipative curves  $e^{itA} f$  as  $t \rightarrow \pm\infty$ ,  $f \in H$ , has been obtained, which ensures the existence and the explicit form of the limits  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} (e^{itA} f, e^{itA} f)$ .

## 2 The triangular model

In the paper [1] the author has introduced the model which is a coupling of a dissipative and antidissipative operators with real spectra and finite dimensional imaginary parts. In this paper we will complete the description of a large class of nondissipative operators, present as a coupling of dissipative and antidissipative operators with real spectra and finite dimensional imaginary parts.

In [1] it has been introduced the model

$$(1) \quad \begin{aligned} Af(x) = & \alpha(x)f(x) - i \int_0^x f(\xi)\Pi(\xi)S^*\Pi^*(x)d\xi + \\ & + i \int_x^l f(\xi)\Pi(\xi)S\Pi^*(x)d\xi + i \int_0^x f(\xi)\Pi(\xi)L\Pi^*(x)d\xi, \end{aligned}$$

where the matrix function  $\Pi(x)$  is a measurable  $n \times m$  ( $1 \leq n \leq m$ ) matrix function on  $[0, l]$ , whose rows are linearly independent at each

point of a set with a positive measure and satisfying the condition

$$(2) \quad \text{tr } \Pi^*(x)\Pi(x) = 1,$$

the function  $\alpha(x)$  is a bounded nondecreasing function in  $[0, l]$  which is continuous at 0 and continuous from the left in  $(0, l]$ , the matrix  $L : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$  with  $\det \neq 0$ ,  $L^* = L$  has the form

$$(3) \quad L = J_1 - J_2 + S + S^*,$$

$$J_1 = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{m-r} \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \widehat{S} & 0 \end{pmatrix},$$

$I_k$  is the identity matrix in  $\mathbb{C}^k$  ( $k = r, m - r$ ),  $\widehat{S}$  is  $(m - r) \times r$  matrix,  $r$  is the number of positive eigen values,  $m - r$  is the number of negative eigen values of  $L$ ,  $\{f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)) : f_k(x) \in \mathbf{L}^2(0, l)\} = \mathbf{L}^2(0, l; \mathbf{C}^n)$  is a Hilbert space with a scalar product

$$(f(x), g(x)) = \int_0^l f(x)g^*(x)dx, \quad f(x), g(x) \in \mathbf{L}^2(0, l; \mathbf{C}^n).$$

It has to mention that every matrix  $L$  with  $L = L^*$ ,  $\det L \neq 0$ , can be presented in the form

$$(4) \quad L = V(J_1 - J_2 + S + S^*)V^*,$$

where  $V : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$  is invertible matrix. The representation (4) follows from the unitary equivalence of  $L$  and a diagonal matrix with eigen values of the matrix  $L$  and the generalized inertia law [6].

In the case when the matrix function satisfies the condition

$$\Pi^*(x)\Pi(x)J_1 = J_1\Pi^*(x)\Pi(x)$$

the operator (1) is a coupling of dissipative and antidissipative operators with real spectra and finite dimensional imaginary parts, i.e. the operator  $A$  can be presented in the form

$$A = P_1AP_1 + P_2AP_2 + P_1AP_2$$

where  $P_1, P_2$  are ortogonal projectors in  $\mathbf{L}^2(0, l; \mathbf{C}^n)$ ,  $P_1A$  is dissipative operator on the subspace  $P_1\mathbf{L}^2(0, l; \mathbf{C}^n)$  (i.e. the imaginary part of

$P_1AP_1$  is a nonnegative operator) and  $P_2A$  is antidissipative operator on  $P_2\mathbf{L}^2(0, l; \mathbf{C}^n)$  (i.e. the imaginary part of  $P_1AP_1$  is nonpositive operator). In other words, if  $Q(x)$  is a measurable  $m \times n$  matrix function in  $[0, l]$ , satisfying the condition  $\Pi(x)Q(x) = I$  for almost all  $x \in [0, l]$ , the operators  $P_1, P_2 : \mathbf{L}^2(0, l; \mathbf{C}^n) \rightarrow \mathbf{L}^2(0, l; \mathbf{C}^n)$ , defined by the equalities

$$P_1f(x) = f(x)\Pi(x)J_1Q(x), \quad P_2f(x) = f(x)\Pi(x)J_2Q(x)$$

are orthoprojectors in  $\mathbf{L}^2(0, l; \mathbf{C}^n)$ , then the operator  $A$  has the representation

$$A = P_1AP_1 + P_2AP_2 + P_1AP_2.$$

In the last equality  $P_1A$  is dissipative operator on the subspace  $P_1\mathbf{L}^2(0, l; \mathbf{C}^n)$  (i.e. the imaginary part of  $P_1AP_1$  is a nonnegative operator) and  $P_2A$  is antidissipative operator on  $P_2\mathbf{L}^2(0, l; \mathbf{C}^n)$  (i.e. the imaginary part of the operator  $P_1AP_1$  is nonpositive),  $P_1AP_1$  and  $P_2AP_2$  have real spectra, determined by the values of the real function  $\alpha(x)$ .

It turns out that every nonselfadjoint operator  $T$  in a Hilbert space  $H$  which is a coupling of dissipative and antidissipative operators with real spectra and finite dimensional imaginary parts can be presented in the form (1).

**Theorem 1.** *Let the bounded nonselfadjoint operator  $T$  in a Hilbert space  $H$  with real spectrum and finite dimensional imaginary part is a coupling of dissipative and antidissipative operators with real spectra determined by a nondecreasing function. Then the operator  $T$  is unitary equivalent to the model (1).*

*Proof.* Let the bounded nonselfadjoint operator  $T : H \rightarrow H$  be a coupling of a dissipative operator and an antidissipative one with finite dimensional imaginary parts and real spectra, determined by the nondecreasing function  $\alpha(x) : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ . Then  $T$  has the representation from the form

$$T = P_1TP_1 + P_2TP_2 + P_1TP_2,$$

where  $P_1, P_2$  are orthogonal projectors in  $H$  and  $H = H_1 \oplus H_2$ ,  $H_1 = P_1H$ ,  $H_2 = P_2H$ ,  $H_1$  is an invariant subspace according to  $T$ ,  $P_1TP_1$  is a dissipative operator and  $P_2TP_2$  is an antidissipative operator. The operators  $P_1TP_1$  и  $P_2TP_2$  can be embedded in operator colligations  $X_1$  и  $X_2$ .

Now we apply the theorem for unitary equivalence of an operator with finite dimensional imaginary part and the triangular model of M.S. Livšic ([6], [16]) onto the principal subspaces in the case of a dissipative operator and in the case of antidissipative operator with real spectra. From the relations

$$\dim \frac{P_1TP_1 - P_1T^*P_1}{i}H < \infty, \quad \dim \frac{P_2TP_2 - P_2T^*P_2}{i}H < \infty,$$

$$\frac{P_1TP_1 - P_1T^*P_1}{i} \geq 0, \quad \frac{P_2TP_2 - P_2T^*P_2}{i} \leq 0$$

it follows that the operator

$$\frac{P_1TP_1 - P_1T^*P_1}{i}$$

has  $s_1$  nonnegative eigen values in the subspace

$$\frac{P_1TP_1 - P_1T^*P_1}{i}H$$

and the operator

$$\frac{P_2TP_2 - P_2T^*P_2}{i}$$

has  $s_2$  nonpositive eigen values in the subspace

$$\frac{P_2TP_2 - P_2T^*P_2}{i}H.$$

Then there exist triangular models  $\tilde{T}_1$  and  $\tilde{T}_2$  which are embedded in the operator colligations from the form

$$\tilde{X}_1 = (\tilde{T}_1; \mathbf{L}^2(0, l; \mathbf{C}^{n_1}), \tilde{\Phi}_1, \mathbf{C}^{r_1}; I_{r_1}),$$

$$\tilde{X}_2 = (\tilde{T}_2; \mathbf{L}^2(0, l; \mathbf{C}^{n_2}), \tilde{\Phi}_2, \mathbf{C}^{r_2}; -I_{r_2})$$

such that the operators  $P_kTP_k$  и  $\tilde{T}_k$  are unitary equivalent onto the principal subspaces of the colligations  $X_k$  и  $\tilde{X}_k$  ( $k = 1, 2$ ). It has to mention that the positive numbers  $n_1, r_1, n_2, r_2$  satisfy the inequalities

$$n_k \leq \dim E_k \leq s_k \leq r_k, \quad k = 1, 2,$$



where  $E_1$  и  $E_2$  are linear span of channels elements of the colligations  $X_1$  и  $X_2$  correspondingly. The operators  $\tilde{T}_1$  and  $\tilde{T}_2$  have the form

$$\tilde{T}_1 g_1(x) = \alpha(x)g_1(x) + i \int_0^x g_1(\xi) \tilde{\Pi}_1(\xi) I_{r_1} \tilde{\Pi}_1^*(x) d\xi,$$

$$\tilde{T}_2 g_2(x) = \alpha(x)g_2(x) - i \int_0^x g_2(\xi) \tilde{\Pi}_2(\xi) I_{r_2} \tilde{\Pi}_2^*(x) d\xi,$$

$g_k(x) \in \mathbf{L}^2(0, l; \mathbb{C}^{n_k})$  ( $k = 1, 2$ ).  $\tilde{\Pi}_k(\xi)$  are  $n_k \times r_k$  ( $k = 1, 2$ ) matrices functions with linearly independent rows onto the subspaces with positive measure, the operators  $\tilde{\Phi}_k : \mathbf{L}^2(0, l; \mathbb{C}^{n_k}) \rightarrow \mathbb{C}^{r_k}$  are defined by the equalities

$$\tilde{\Phi}_k g_k(x) = \int_0^l g_k(x) \tilde{\Pi}_k(x) I_{r_k} dx,$$

where  $g_k(x) \in \mathbf{L}^2(0, l; \mathbb{C}^{n_k})$ ,  $I_{r_k}$  is identity matrix in  $\mathbb{C}^{r_k}$  ( $k = 1, 2$ ).

From the unitary equivalence there exist the unitary operators

$$U_k : \mathbf{L}^2(0, l; \mathbb{C}^{n_k}) \rightarrow P_k H, \quad k = 1, 2,$$

such that

$$(5) \quad \tilde{T}_k = U_k^* P_k T P_k U_k$$

onto the principal subspaces of  $\tilde{T}_k$  и  $P_k T P_k$  ( $k = 1, 2$ ).

Let us consider now the space

$$\mathbf{L}^2(0, l; \mathbb{C}^n) = \mathbf{L}^2(0, l; \mathbb{C}^{n_1}) \oplus \mathbf{L}^2(0, l; \mathbb{C}^{n_2})$$

and the orthoprojectors in  $\mathbf{L}^2(0, l; \mathbb{C}^n)$  defined by the equalities

$$\tilde{P}_1 = \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \tilde{P}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{pmatrix}.$$

Let us choose the numbers  $m$  и  $r$  such that they satisfy the inequalities

$$n_1 \leq \dim E_1 \leq s_1 \leq r_1 \leq r,$$

$$n_2 \leq \dim E_2 \leq s_2 \leq r_2 \leq m - r.$$

Now we consider the matrix  $L : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$  with  $\det L \neq 0$ ,  $L = L^*$  and with  $r$  positive and  $m - r$  negative eigen values from the form

$$L = J_1 - J_2 + S + S^*,$$

where

$$J_1 = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{m-r} \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \widehat{S} & 0 \end{pmatrix}.$$

Straightforward calculations show that if  $f(x) \in \mathbf{L}^2(0, l; \mathbb{C}^n)$  and  $f(x)$  is presented in the form  $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$ , where  $\widetilde{P}_k f(x) = f_k(x)$ ,  $k = 1, 2$ , then

$$\begin{aligned} (6) \quad \widetilde{T}_1 f_1(x) &= \alpha(x) f_1(x) + i \int_0^x f_1(\xi) \widetilde{\Pi}_1(\xi) I_{r_1} \widetilde{\Pi}_1^*(x) d\xi = \\ &= \alpha(x) \widetilde{P}_1(f(x)) + i \int_0^x f(\xi) \widetilde{P}_1 \widehat{\Pi}_1(\xi) L \widehat{\Pi}_1^*(x) \widetilde{P}_1 d\xi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (7) \quad \widetilde{T}_2 f_2(x) &= \alpha(x) f_2(x) - i \int_0^x f_2(\xi) \widetilde{\Pi}_2(\xi) I_{r_2} \widetilde{\Pi}_2^*(x) d\xi = \\ &= \alpha(x) \widetilde{P}_2(f(x)) + i \int_0^x f(\xi) \widetilde{P}_2 \widehat{\Pi}_2(\xi) L \widehat{\Pi}_2^*(x) \widetilde{P}_2 d\xi, \end{aligned}$$

where  $n \times m$  matrices  $\widehat{\Pi}_1(\xi)$  and  $\widehat{\Pi}_2(\xi)$  have the form

$$\widehat{\Pi}_1(\xi) = \begin{pmatrix} \widetilde{\Pi}_1(\xi) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} J_1, \quad \widehat{\Pi}_2(\xi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \widetilde{\Pi}_2(\xi) \end{pmatrix} J_2.$$

The operator  $\widetilde{T}_1$  is dissipative and the operator  $\widetilde{T}_2$  is antidissipative on the subspaces  $\widetilde{P}_1 \mathbf{L}^2(0, l; \mathbb{C}^n)$  and  $\widetilde{P}_2 \mathbf{L}^2(0, l; \mathbb{C}^n)$  correspondingly.

Further instead of the colligations  $\widetilde{X}_1$  and  $\widetilde{X}_2$  we consider the colligations

$$\begin{aligned} \widehat{X}_1 &= (\widetilde{P}_1 \widetilde{T}_1 \widetilde{P}_1; \widetilde{H}_1, \widehat{\Phi}_1, \mathbb{C}^m; L), \\ \widehat{X}_2 &= (\widetilde{P}_2 \widetilde{T}_2 \widetilde{P}_2; \widetilde{H}_2, \widehat{\Phi}_2, \mathbb{C}^m; L), \end{aligned}$$

where  $\widetilde{H}_k = \widetilde{P}_k \mathbf{L}^2(0, l; \mathbb{C}^n)$ ,

$$\widehat{\Phi}_k f(x) = \int_0^l f(x) \widehat{\Pi}_k(x) dx, \quad k = 1, 2.$$

Then the coupling  $T = P_1 T P_1 + P_2 T P_2 + P_1 T P_2$  of the operators  $T_1$  и  $T_2$  is unitary equivalent to the coupling of the operators  $\widetilde{T}_1$  and  $\widetilde{T}_2$  ( $\widetilde{T}_1$  - a dissipative operator,  $\widetilde{T}_2$  - an antidissipative operator) onto the principal subspaces. The unitary operator  $U : \mathbf{L}^2(0, l; \mathbb{C}^n) \rightarrow H$  defined by the equality

$$(8) \quad U = P_1 U_1 \widetilde{P}_1 + P_2 U_2 \widetilde{P}_2$$

realizes this unitary equivalence.

But straightforward calculations show that

$$(9) \quad \begin{aligned} \widetilde{T} &= U^* T U = \widetilde{P}_1 U_1^* P_1 T P_1 U_1 \widetilde{P}_1 + \widetilde{P}_2 U_2^* P_2 T P_2 U_2 \widetilde{P}_2 + \\ &\quad + \widetilde{P}_1 U_1^* P_1 T P_2 U_2 \widetilde{P}_2 = \\ &= \widetilde{P}_1 \widetilde{T}_1 \widetilde{P}_1 + \widetilde{P}_2 \widetilde{T}_2 \widetilde{P}_2 + \widetilde{P}_1 \widetilde{T} \widetilde{P}_2. \end{aligned}$$

where we have used the relations (5) and (8). On the other hand, using that  $\widetilde{T}$  is a coupling, for the operator  $\widetilde{P}_1 \widetilde{T} \widetilde{P}_2$  we obtain that

$$(10) \quad \widetilde{P}_1 \widetilde{T} \widetilde{P}_2 = i \widehat{\Phi}_1^* L \widehat{\Phi}_2 \widetilde{P}_2 f(x) = i \int_0^l f(\xi) \widetilde{P}_2 \widehat{\Pi}_2(\xi) L \widehat{\Pi}_1^*(x) \widetilde{P}_1 d\xi.$$

Now the equalities (9), (6), (7) and (10) imply that

$$(11) \quad \begin{aligned} \widetilde{T} f(x) &= \alpha(x) \widetilde{P}_1(f(x)) + i \int_0^x f(\xi) \widetilde{P}_1 \widehat{\Pi}_1(\xi) L \widehat{\Pi}_1^*(x) \widetilde{P}_1 d\xi + \\ &\quad + \alpha(x) \widetilde{P}_2(f(x)) + i \int_0^x f(\xi) \widetilde{P}_2 \widehat{\Pi}_2(\xi) L \widehat{\Pi}_2^*(x) \widetilde{P}_2 d\xi + \\ &\quad + i \int_0^l f(\xi) \widetilde{P}_2 \widehat{\Pi}_2(\xi) L \widehat{\Pi}_1^*(x) \widetilde{P}_1 d\xi. \end{aligned}$$

Let us denote the next matrix

$$\Pi(x) = \begin{pmatrix} \widetilde{\Pi}_1(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \widetilde{\Pi}_2(x) \end{pmatrix}$$

Hence

$$\tilde{P}_1 \Pi(x) J_1 = \widehat{\Pi}_1(x), \quad \tilde{P}_2 \Pi(x) J_2 = \widehat{\Pi}_2(x)$$

and the representation (11) takes the form

$$\begin{aligned} \tilde{T}f(x) &= \alpha(x)\tilde{P}_1(f(x)) + i \int_0^x f(\xi)\Pi(\xi)J_1 L J_1 \Pi^*(x) d\xi + \\ &+ \alpha(x)\tilde{P}_2(f(x)) + i \int_0^x f(\xi)\Pi(\xi)J_2 L J_2 \Pi^*(x) d\xi + \\ &+ i \int_0^l f(\xi)\Pi(\xi)J_2 L J_1 \Pi^*(x) d\xi \end{aligned}$$

Hence

$$(12) \quad \begin{aligned} \tilde{T}f(x) &= \alpha(x)f(x) + i \int_0^x f(\xi)\Pi(\xi)J_1 \Pi^*(x) d\xi - \\ &- i \int_0^x f(\xi)\Pi(\xi)J_2 \Pi^*(x) d\xi + i \int_0^l f(\xi)\Pi(\xi)S \Pi^*(x) d\xi. \end{aligned}$$

Consequently, from (12) it follows that the operator  $T = P_1 T P_1 + P_2 T P_2 + P_1 T P_2$  is unitary equivalent to the operator (12) (onto the principal subspace) and after direct calculations  $\tilde{T}$  takes the form

$$\begin{aligned} \tilde{T}f(x) &= \alpha(x)f(x) + i \int_x^l f(\xi)\Pi(\xi)S \Pi^*(x) d\xi - \\ &- i \int_0^x f(\xi)\Pi(\xi)S^* \Pi^*(x) d\xi + i \int_0^x f(\xi)\Pi(\xi)L \Pi^*(x) d\xi. \end{aligned}$$

The condition  $\Pi^*(x)\Pi(x)J_1 = J_1 \Pi^*(x)\Pi(x)$  is obvious.

The pproof is complete.  $\square$

The proof of Theorem 1 together with the triangular model (1), introduced in [1], finishes the description of a large class of nonselfadjoint bounded nondissipative operators which are presented as a coupling of dissipative and antidissipative operators with finite dimensional imaginary parts and with real spectra, determined by a real nondecreasing function. This class of operators generates nondissipative continuous curves whose asymptotics exist and are obtained explicitly in the papers [7], [10], [8] in terms of multiplicative integrals and a finite dimensional analogue of the classical gamma-function. The explicit form of these

---

---

asymptotics plays an important role in the construction of the scattering theory for the couple of operators  $(A^*, A)$  ([7], [10]) and results concerning the connection between the soliton theory and the theory of commuting nonselfadjoint operators ([4], [3]). A triangular model of regular couplings of dissipative and antidissipative operators for unbounded operators  $A$  with different domains of  $A$  and its adjoint  $A^*$  is introduced and investigated in [9, 10, 8].

**REFERENCES:**

1. G. S. Borisova, A new form of the triangular model of M.S. Livšić for a class of nondissipative operators, *Comptes Rendus de l'Académie bulgare des Sciences* 53 (10) (2000) 9-12.
2. Galina S. Borisova, The operators  $A_\gamma = \gamma A + \bar{\gamma} A^*$  for a class of nondissipative operators  $A$  with a limit of the corresponding correlation function, *Serdica Math. J.* 29 (2003) 109-140.
3. Galina S. Borisova, The connection between the Sturm-Liouville systems and the triangular model of couplings of dissipative and antidissipative operators, *Comptes Rendus de l'Académie bulgare des Sciences* 69 (5) (2016) 563-572.
4. G. S. Borisova, K. P. Kirchev, Solitonic combinations and commuting non-selfadjoint operators, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Volume 424, Issue 1, 2015, 21-48.
5. M. S. Brodskii, Triangular and Jordan representations of linear operators (Vol. 32). *Transl. Math. Monographs*, Amer. Math. Soc., 1971.
6. M. S. Brodskii, M. S. Livšić, Spectral analysis of non-self-adjoint operators and intermediate systems, *Transl. Amer. Math. Soc.* 13 (2) (1960) 265-346.
7. K. P. Kirchev, G. S. Borisova, Nondissipative curves in Hilbert spaces having a limit of the corresponding correlation function, *Integral Equations Operator Theory* 40 (2001) 309-341.
8. K. P. Kirchev, G. S. Borisova, Triangular models and asymptotics of continuous curves with bounded and unbounded semigroup generators, *Serdica Math. J.* 31 (2005) 95-174.
9. K. Kirchev, G. Borisova, A triangular model of regular couplings of dissipative and antidissipative operators, *Comptes rendus de l'Académie bulgare des sciences* 58 (5) (2005) 481-486.
10. K. P. Kirchev, G. S. Borisova, Regular Couplings of Dissipative and Antidissipative Unbounded Operators, Asymptotics of the Corresponding Nondissipative Processes and the Scattering Theory, *Integral Equations Operator Theory* 57 (2007) 339-379.

11. M.S. Livšić, Об одном классе линейных операторов в гильбертовом пространстве, *Математический сборник*, 1946, 19/61/2, 236-260.
12. M.S. Livšić, О спектральном разложении линейных операторов в гильбертовом пространстве, *Математический сборник*, 1954, 34/76/1, 145-198.
13. M.S. Livšić, On a certain class of linear operators in Hilbert space, *Mat. Sb.*, 19, (61), 1946, 236-260 (Russian).
14. M.S. Livšić, *Operators, oscillations, waves* (Open Systems). Transl. Math. Monographs 34, 1972.
15. M. S. Livšić, N. Kravitsky, A.S. Markus, V. Vinnikov, Theory of commuting nonselfadjoint operators, Kluwer Academic Publisher Group, Dordrecht, 1995.
16. M.S. Livšić, A.A. Jancevich, Theory of Operator colligations in Hilbert space, Engl. Transl., J. Wiley, NY, 1979.
17. V.P. Potapov, The multiplicative structure of J-contractive matrix function, *Trudy Mosk. Mat. Obshch.*, 4, 1955, 125-236 (Russian).

Faculty of Mathematics and Informatics  
Shumen University  
9712 Shumen, Bulgaria  
e-mail: g.borisova@shu.bg

## ON BIGGER PRIMES\*

IVO M. MICHAÏLOV, IVAN S. IVANOV, SINTIA A.  
VLADIMIROVA, FANI M. ALEKSANDROVA

**ABSTRACT:** *In this survey we discuss some classical problems about recognition of prime numbers. Various tests are studied that can be further programmed on a computer to find big primes.*

**KEYWORDS:** *primes, sieve of Eratosthenes*

### 1 Introduction

Prime numbers (or just primes) are natural numbers, like 2, 3, 5, 7, 11, . . . , which are not multiples of any smaller natural number (except 1). If a natural number is neither 1 nor a prime, it is called a composite number.

For example, among the numbers 1 through 6, the numbers 2, 3, and 5 are the prime numbers, while 1, 4, and 6 are not prime. 2 is a prime number, since the only natural numbers dividing it are 1 and 2. 3 is prime, as no numbers other than 1 and itself divide evenly into it. 4 is composite, since 2 is a number that divides evenly into it, in addition to 1 and itself. 5 is prime as only 1 and itself divide evenly into it. 6 is divisible by 2 and 3, therefore it is not prime.

No even number greater than 2 is prime because by definition, as any such even number  $n$  has at least three distinct divisors, namely 1, 2, and  $n$ . Accordingly, the term odd prime refers to any prime number greater than 2. Similarly, when written in the usual decimal system, all prime numbers larger than 5 would end in 1, 3, 7, or 9, since even numbers are multiples of 2, and numbers ending in 0 or 5 are multiples of 5.

Prime numbers are important, since the fundamental theorem in arithmetic states that every natural number greater than 1 is a product of prime numbers, and moreover, in an essentially unique way. Prime

---

\*This work is partially supported by a project No RD-08-104/06.02.2017 of Shumen University.

numbers are like cousins, members of the same family, resembling one another, but not quite alike.

There are hints in the surviving records of the ancient Egyptians that they had some knowledge of prime numbers: the Egyptian fraction expansions in the Rhind papyrus, for instance, have quite different forms for primes and for composites. However, the earliest surviving records of the explicit study of prime numbers come from the Ancient Greeks. Euclid's *Elements* (circa 300 BC) contain important theorems about primes, including the infinitude of primes and the fundamental theorem of arithmetic. Euclid also showed how to construct a perfect number from a Mersenne prime. The Sieve of Eratosthenes, attributed to Eratosthenes, is a simple method to compute primes, although the large primes found today with computers are not generated this way.

It is quite natural, when studying the set of prime numbers, to ask the following questions, which we phrase informally as follows:

1. How many prime numbers are there?
2. How to recognize whether a natural number is a prime?
3. Are there functions defining prime numbers?
4. How are the prime numbers distributed?
5. Which special kinds of primes have been considered?

In this paper we will concentrate on the first two questions. For further information we refer the reader to the monograph [3].

## 2 How many prime numbers are there?

Firstly, let us note that any natural number  $n > 1$  has a prime divisor. We can easily verify this claim using mathematical induction. Indeed, if  $n$  itself is not a prime, we can decompose it as a product of two numbers which are smaller than  $n$ , so we can apply the induction assumption on either of them. From this fact also follows the existence part of the main theorem in the arithmetic, namely every natural number  $n > 1$  is a product of primes (see the beginning of the next section and for further reading [4]).

The answer to the question of how many prime numbers exist is given by the fundamental theorem:

**Theorem 2.1.** *There exist infinitely many prime numbers.*



---

There are at least 10 different proofs of the latter theorem (by Euclid, Kummer, Goldbach, Schorn, Thue, Perott, Auric, Métrod, Washington, and Furstenberg's). We shall give three of them below.

### I Euclid's proof.

Suppose that  $p_1 = 2 < p_2 = 3 < \dots < p_r$  are all the primes. Let  $P = p_1 p_2 \dots p_r + 1$  and let  $p$  be a prime dividing  $P$ ; then  $p$  cannot be any of  $p_1, p_2, \dots, p_r$ , otherwise  $p$  would divide the difference  $P - p_1 p_2 \dots p_r = 1$ , which is impossible. So this prime  $p$  is still another prime, and  $p_1, p_2, \dots, p_r$  would not be all the primes.

### II Kummer's proof.

Suppose that there exist only finitely many primes  $p_1 < p_2 < \dots < p_r$ . Let  $N = p_1 p_2 \dots p_r > 2$ . The natural number  $N - 1 > 1$  has a prime divisor  $p_i$  in common with  $N$ ; so,  $p_i$  divides  $N - (N - 1) = 1$ , which is absurd!

### III Furstenberg's proof.

This is an ingenious proof based on topological ideas. Since it is so short, we cannot do any better than transcribe it verbatim; it appeared in 1955:

In this note we would like to offer an elementary "topological" proof of the infinitude of the prime numbers. We introduce a topology into the space of integers  $S$ , by using the arithmetic progressions (from  $-\infty$  to  $+\infty$ ) as a basis. It is not difficult to verify that this actually yields a topological space. In fact, under this topology,  $S$  may be shown to be normal and hence metrizable. Each arithmetic progression is closed as well as open, since its complement is the union of other arithmetic progressions (having the same difference). As a result, the union of any finite number of arithmetic progressions is closed.

Consider now the set  $A = \bigcup A_p$ , where  $A_p$  consists of all multiples of  $p$ , and  $p$  runs through the set of primes  $\geq 2$ . The only numbers not belonging to  $A$  are  $-1$  and  $1$ , and since the set  $\{-1, 1\}$  is clearly not an open set,  $A$  cannot be closed. Hence  $A$  is not a finite union of closed sets which proves that there are an infinity of primes.

### 3 How to Recognize Whether a Natural Number is a Prime

In the article 329 of *Disquisitiones Arithmeticae*, Gauss (1801) wrote:

"The problem of distinguishing prime numbers from composite numbers and of resolving the latter into their prime factors is known to be one of the most important and useful in arithmetic. . . . The dignity of the science itself seems to require that every possible means be explored for the solution of a problem so elegant and so celebrated."

The first observation concerning the problem of primality and factorization is clear: there is an algorithm for both problems. By this, we mean a procedure involving finitely many steps, which is applicable to every number  $N$  and which will indicate whether  $N$  is a prime, or, if  $N$  is composite, which are its prime factors. Namely, given the natural number  $N$ , try in succession every number  $n = 2, 3, \dots$  up to  $[\sqrt{N}]$  (the largest integer not greater than  $\sqrt{N}$ ) to see whether it divides  $N$ . If none does, then  $N$  is a prime. If, say,  $N_0$  divides  $N$ , write  $N = N_0N_1$ , so  $N_1 < N$ , and then repeat the same procedure with  $N_0$  and with  $N_1$ . Eventually this gives the complete factorization into prime factors.

It should, however, be noted that for large numbers  $N$ , it may take a long time with this algorithm to decide whether  $N$  is prime or composite. This touches the most important practical aspect, the need to find an efficient algorithm - one which involves as few operations as possible, and therefore requires less time to be performed.

#### I The Sieve of Eratosthenes.

As we have already said, it is possible to find if  $N$  is a prime using trial division by every number  $n$  such that  $n^2 \leq N$ . Since multiplication is an easier operation than division, Eratosthenes (in the 3rd century BC) had the idea of organizing the computations in the form of the well-known sieve. It serves to determine all the prime numbers, as well as the factorizations of composite numbers, up to any given number  $N$ . This is illustrated now for  $N = 40$ .

Do as follows: write all the numbers up to 40; cross out all the multiples of 2, bigger than 2; in each subsequent step, cross out all the multiples of the smallest remaining number  $p$ , which are bigger than  $p$ .

It suffices to do it for  $p^2 < 40$ .

	<u>2</u>	<u>3</u>	4	<u>5</u>	6	<u>7</u>	8	9	<u>10</u>
<u>11</u>	<u>12</u>	<u>13</u>	<u>14</u>	<u>15</u>	<u>16</u>	<u>17</u>	<u>18</u>	<u>19</u>	<u>20</u>
<u>21</u>	<u>22</u>	<u>23</u>	<u>24</u>	<u>25</u>	<u>26</u>	<u>27</u>	<u>28</u>	<u>29</u>	<u>30</u>
<u>31</u>	<u>32</u>	<u>33</u>	<u>34</u>	<u>35</u>	<u>36</u>	<u>37</u>	<u>38</u>	<u>39</u>	<u>40</u>

## II Classical Primality Tests Based on Congruences.

Fermat's little theorem says that if  $p$  is a prime and  $a$  is any natural number not a multiple of  $p$ , then  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ . However, we note right away that a crude converse of this theorem is not true – because there exist composite integers  $N$ , and  $a \geq 2$ , such that  $a^{N-1} \equiv 1 \pmod{N}$ .

Euler generalized Fermat's little theorem by introducing Euler's function. For every  $n \geq 1$ , let  $\varphi(n)$  denote the number of integers  $a, 1 \leq a < n$ , such that  $\gcd(a, n) = 1$  (the greatest common divisor of  $a$  and  $n$  is 1, or equivalently,  $a$  and  $n$  are relatively prime).

Euler proved the following:

**Euler's Theorem.** *If  $\gcd(a, n) = 1$ , then  $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$ .*

Nevertheless, a true converse of Fermat's little theorem was discovered by Lucas in 1876. It says:

**Test 1.** Let  $N > 1$ . Assume that there exists an integer  $a > 1$  such that:

- (i)  $a^{N-1} \equiv 1 \pmod{N}$ ,
- (ii)  $a^m \not\equiv 1 \pmod{N}$  for  $m = 1, 2, \dots, N - 2$ .

Then  $N$  is a prime.

Defect of this test: it might seem perfect, but it requires  $N - 2$  successive multiplications by  $a$ , and finding residues modulo  $N$  – too many operations.

*Proof.* It suffices to show that every integer  $m, 1 \leq m < N$ , is prime to  $N$ , that is,  $\varphi(N) = N - 1$ . For this purpose, it suffices to show that there exists  $a, 1 \leq a < N$ ,  $\gcd(a, N) = 1$ , such that the order of  $a \pmod{N}$  is  $N - 1$ . This is exactly spelled out in the hypothesis. □

In 1891, Lucas gave the following test:

**Test 2.** Let  $N > 1$ . Assume that there exists an integer  $a > 1$  such that:

- (i)  $a^{N-1} \equiv 1 \pmod{N}$ ,
- (ii)  $a^m \not\equiv 1 \pmod{N}$  for every  $m < N$ , such that  $m$  divides  $N - 1$ .

Then  $N$  is a prime.

Defect of this test: it requires the knowledge of all factors of  $N - 1$ , thus it is only easily applicable when  $N - 1$  can be factored, like  $N = 2^n + 1$ , or  $N = 3 \times 2^n + 1$ .

The proof of Test 2 is, of course, the same as that of Test 1.

In 1967, Brillhart & Selfridge [2] made Lucas' test more flexible:

**Test 3.** Let  $N > 1$ . Assume that for every prime factor  $q$  of  $N - 1$  there exists an integer  $a = a(q) > 1$  such that

- (i)  $a^{N-1} \equiv 1 \pmod{N}$ ,
- (ii)  $a^{(N-1)/q} \not\equiv 1 \pmod{N}$ .

Then  $N$  is a prime.

Defect of this test: once again, it is necessary to know the prime factors of  $N - 1$ , but fewer congruences have to be satisfied.

*Proof.* It is enough to show that  $\varphi(N) = N - 1$ , and since  $\varphi(N) \leq N - 1$ , it suffices to show that  $N - 1$  divides  $\varphi(N)$ . If this is false, there exists a prime  $q$  and  $r \geq 1$  such that  $q^r$  divides  $N - 1$ , but  $q^r$  does not divide  $\varphi(N)$ . Let  $a = a(q)$  and let  $e$  be the order of  $a \pmod{N}$ . Thus  $e$  divides  $N - 1$  and  $e$  does not divide  $(N - 1)/q$ , so  $q^r$  divides  $e$ . Since  $a^{\varphi(N)} \equiv 1 \pmod{N}$ , then  $e$  divides  $\varphi(N)$ , so  $q^r | \varphi(N)$ , which is a contradiction, and concludes the proof.  $\square$

To make the primality tests more efficient, it is desirable to avoid the need to find all prime factors of  $N - 1$ . So there are tests that only require a partial factorization of  $N - 1$ . The basic result was proved by Pocklington in 1914, and it is indeed very simple:

**Theorem 3.1.** *Let  $N - 1 = q^n R$ , where  $q$  is a prime,  $n \geq 1$ , and  $q$  does not divide  $R$ . Assume that there exists an integer  $a > 1$  such that:*

- (i)  $a^{N-1} \equiv 1 \pmod{N}$ ,
- (ii)  $\gcd(a^{(N-1)/q} - 1, N) = 1$ .

Then each prime factor of  $N$  is of the form  $mq^n + 1$ , with  $m \geq 1$ .

*Proof.* Let  $p$  be a prime factor of  $N$ , and let  $e$  be the order of  $a \pmod{p}$ , so  $e$  divides  $p - 1$ ; by condition (ii),  $e$  cannot divide  $(N - 1)/q$ , because  $p$  divides  $N$ ; hence,  $q$  does not divide  $(N - 1)/e$ ; so  $q^n$  divides  $e$ , and a fortiori,  $q^n$  divides  $p - 1$ .  $\square$

The above statement looks more like a result on factors than a primality test. However, if it may be verified that each prime factor  $p = mq^n + 1$  is greater than  $\sqrt{N}$ , then  $N$  is a prime. When  $q^n$  is fairly large, this verification is not too time consuming.

Pocklington gave also the following refinement of his result above:

**Theorem 3.2.** *Let  $N - 1 = FR$ , where  $\gcd(F, R) = 1$  and the factorization of  $F$  is known. Assume that for every prime  $q$  dividing  $F$  there exists an integer  $a = a(q) > 1$  such that:*

- (i)  $a^{N-1} \equiv 1 \pmod{N}$ ,
- (ii)  $\gcd(a^{(N-1)/q} - 1, N) = 1$ .

Then each prime factor of  $N$  is of the form  $mF + 1$ , with  $m \geq 1$ .

The same comments apply here. So, if  $F > \sqrt{N}$ , then  $N$  is a prime. This result is very useful to prove the primality of numbers of certain special form. The old criterion of Proth (1878) is easily deduced:

**Test 4.** Let  $N = 2^n h + 1$  with  $h$  odd and  $2^n > h$ . Assume that there exists an integer  $a > 1$  such that  $a^{(N-1)/2} \equiv -1 \pmod{N}$ . Then  $N$  is prime.

*Proof.*  $N - 1 = 2^n h$ , with  $h$  odd and  $a^{N-1} \equiv 1 \pmod{N}$ . Since  $N$  is odd, then  $\gcd(a^{(N-1)/2} - 1, N) = 1$ . By the above result, each prime factor  $p$  of  $N$  is of the form  $p = 2^n m + 1 > 2^n$ . But  $N = 2^n h + 1 < 2^{2n}$ , hence  $\sqrt{N} < 2^n < p$  and so  $N$  is prime.  $\square$

In the following test (using the same notation) it is required to know that  $R$  (the nonfactored part of  $N - 1$ ) has no prime factor less than a given bound  $B$ . Precisely:

**Test 5.** Let  $N - 1 = FR$ , where  $\gcd(F, R) = 1$ , the factorization of  $F$  is known,  $B$  is such that  $FB > \sqrt{N}$ , and  $R$  has no prime factors less than  $B$ . Assume:

- (i) For each prime  $q$  dividing  $F$  there exists an integer  $a = a(q) > 1$  such that  $a^{N-1} \equiv 1 \pmod{N}$  and  $\gcd(a^{(N-1)/q} - 1, N) = 1$ .
- (ii) There exists an integer  $b > 1$  such that  $b^{N-1} \equiv 1 \pmod{N}$  and  $\gcd(b^F - 1, N) = 1$ .

Then  $N$  is a prime.

*Proof.* Let  $p$  be any prime factor of  $N$ , let  $e$  be the order of  $b$  modulo  $N$ , so  $e$  divides  $p - 1$  and also  $e$  divides  $N - 1 = FR$ . Since  $e$  does not divide  $F$ , then  $\gcd(e, R) \neq 1$ , so there exists a prime  $q$  such that  $q|e$  and  $q|R$ ; hence,  $q|p - 1$ . However, by the previous result of Pocklington,  $F$  divides  $p - 1$ ; since  $\gcd(F, R) = 1$ , then  $q^F$  divides  $p - 1$ . So  $p - 1 \geq q^F \geq BF > \sqrt{N}$ . This implies that  $p = N$ , so  $N$  is a prime.  $\square$

The paper of Brillhart, Lehmer & Selfridge [1] contains other variants of these tests, which have been put to good use to determine the primality of numbers of the form  $2^r + 1, 2^{2^r} \pm 2^r + 1, 2^{2^r-1} \pm 2^r + 1$ .

We have already said enough and will make only one further comment: these tests require prime factors of  $N - 1$ .

#### REFERENCES:

1. Brillhart, J., Lehmer, D.H. & Selfridge, J.L. New primality criteria and factorizations of  $2^m \pm 1$ . *Math. Comp.* **29** (1975), 620–647.
2. Brillhart, J. & Selfridge, J.L. Some factorizations of  $2^n \pm 1$  and related results. *Math. Comp.* **21** (1967), 87–96 and p. 751.
3. Paulo Ribenboim, "The Little Book of Bigger Primes", Second Edition, Springer-Verlag, New York, 2004.
4. Н. Зяпков, Н. Янков, И. Михайлов, „Елементарна теория на числата“, Фабер, Велико Търново, 2008.

**Ivo M. Michailov**

Faculty of Mathematics and Informatics, Shumen University,  
Universitetska str. 115, 9700 Shumen, Bulgaria  
e-mail: ivo\_michailov@yahoo.com

**Ivan S. Ivanov**

Faculty of Mathematics and Informatics, Shumen University,  
Universitetska str. 115, 9700 Shumen, Bulgaria  
e-mail: slaveicov@abv.bg





## ВЪРХУ ЕФЕКТИВНИЯ ОБЕМЕН МОДУЛ НА МНОГОФАЗНИ ДИСПЕРСИИ\*

КРАСИМИР Д. ЦВЯТКОВ

### ON THE EFFECTIVE BULK MODULUS OF MULTI-PHASE DISPERSIONS

KRASIMIR D. TSVYATKOV

**ABSTRACT:** *Variational bounds for the effective bulk modulus of random dispersions of homogeneous spheres of different elastic moduli are considered. It is shown that explicit results can be derived for such class of multi-phase dispersions under some natural assumptions. Thus, well-known results incorporating two- and three-point correlation functions for two-phase dispersions are generalized.*

**KEYWORDS:** *effective elastic moduli, random dispersions, variational bounds*

#### 1. Увод

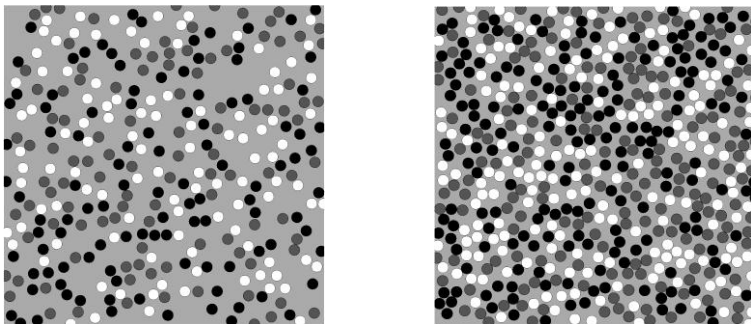
Разглеждаме хетерогенна еластична среда, представляваща дисперсия от хомогенни непресичащи се сфери със случайни обемен модул  $\kappa_p$  и модул на срязване  $\mu_p$ , разпределени случайно в неограничена матрица с обемен модул  $\kappa_m$  и модул на срязване  $\mu_m$ , вж. фиг. 1. Връзката между тензорите на деформацията  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$  и на напрежението  $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})$  в средата се дава от конститутивния закон

$$(1) \quad \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{x}) \text{Tr} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) \mathbf{I} + 2\mu(\mathbf{x}) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}),$$

---

\* Настоящата статия е финансирана от Фонд „Научни изследвания“ към Шуменския университет „Епископ Константин Преславски“ по проект № РД-08-120/06.02.2017 г.

където  $\mathbf{I}$  е единичният двувалентен тензор,  $\text{Tr}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \varepsilon_{ii}(\mathbf{x})$  е следата на  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$ , а  $\lambda(\mathbf{x}) = \kappa(\mathbf{x}) - \frac{2}{3}\mu(\mathbf{x})$  и  $\mu(\mathbf{x})$  са полетата на параметрите на Ламе,  $\kappa(\mathbf{x})$  и  $\mu(\mathbf{x})$  приемат съответно случайните стойности  $\kappa_p$  и  $\mu_p$ , ако  $\mathbf{x}$  лежи в сфера, и  $\kappa_m$  и  $\mu_m$ , ако  $\mathbf{x}$  лежи в матрицата на дисперсията.



**Фиг. 1.** Два примера за дисперсии от дискове с три различни равновероятни еластични модули. Лявата снимка е на дисперсия, намираща се в равновесие с обща обемна концентрация на дисковете  $\phi_p = 0.3$ . Получена е чрез компютърна симулация, основана на Монте Карло метода на Метрополис от молекулярната динамика. Дясната снимка е на неравновесна дисперсия, получена чрез случайно последователно добавяне на дискове до достигане на обемна концентрация  $\phi_p$ , много близка до тази на насищане  $\phi_p \approx 0.55$ .

Тензорът на деформацията  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$  е симетризираният градиент на полето на преместването  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  в средата, изразяващ се в декартови координати с равенството  $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ , а при отсъствие на масови сили тензорът на напрежението  $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})$  се подчинява на уравнението за равновесие  $\tau_{ij,j}(\mathbf{x}) = 0$ . (Тук и по-

долу използваме правилото на Айнщайн за сумиране по двойка повтарящи се индекси.)

Предполагаме, че средата е статистически хомогенна и изотропна. Тогава ефективното поведение на средата се определя обикновено чрез равенството

$$(2) \quad \langle \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) \rangle = \lambda_e \langle \text{Tr} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) \rangle \mathbf{I} + 2\mu_e \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) \rangle,$$

където скобите означават усреднение по ансамбъла от реализации на средата,  $\lambda_e = \kappa_e - \frac{2}{3}\mu_e$ , а  $\kappa_e$  и  $\mu_e$  са съответно нейният *ефективен обмен модул* и нейният *модул на срязване*.

В литературата са предложени много физични и макромеханични модели за предсказване на ефективните свойства на случайни дисперсии. Още преди близо 150 години в знаменития си трактат по електричество и магнетизъм [1] Джеймс Кларк Максвел извежда приближена формула за ефективната проводимост на дисперсия от сфери, имащи една и съща неслучайна проводимост  $\sigma_p$ . Подходът на Максвел се пренася лесно в еластичния случай даже за дисперсии от  $N$  вида сфери, имащи различни обемни модули  $\kappa_1^{(p)}, \dots, \kappa_N^{(p)}$ , модули на срязване  $\mu_1^{(p)}, \dots, \mu_N^{(p)}$  и обемни концентрации съответно  $\phi_1^{(p)}, \dots, \phi_N^{(p)}$ , вж., например, [2, Гл. 18] и [3]. Приближените формули за ефективните еластични модули  $\kappa_e$  и  $\mu_e$  тогава може да се запишат във вида

$$(3) \quad \frac{\kappa_e}{\kappa_m} = 1 + \frac{1}{\alpha_m^{(\kappa)}} \frac{\mathcal{E}(\beta_m^{(\kappa)})\phi_p}{1 - \mathcal{E}(\beta_m^{(\kappa)})\phi_p}, \quad \frac{\mu_e}{\mu_m} = 1 + \frac{1}{\alpha_m^{(\mu)}} \frac{\mathcal{E}(\beta_m^{(\mu)})\phi_p}{1 - \mathcal{E}(\beta_m^{(\mu)})\phi_p},$$

където

$$\mathcal{E}(\beta_m^{(\kappa)}) = \sum_{i=1}^N \frac{\phi_i^{(p)}}{\phi_p} \beta_m^{(\kappa)}(\kappa_i^{(p)}) \quad \text{и} \quad \mathcal{E}(\beta_m^{(\mu)}) = \sum_{i=1}^N \frac{\phi_i^{(p)}}{\phi_p} \beta_m^{(\mu)}(\mu_i^{(p)})$$

са средните стойности на коефициентите на поляризуемост

$$(4) \quad \beta_m^{(\kappa)}(\kappa) = \frac{\alpha_m^{(\kappa)}(\kappa - \kappa_m)}{\kappa_m + \alpha_m^{(\kappa)}(\kappa - \kappa_m)} \quad \text{и} \quad \beta_m^{(\mu)}(\mu) = \frac{\alpha_m^{(\mu)}(\mu - \mu_m)}{\mu_m + \alpha_m^{(\mu)}(\mu - \mu_m)}$$

на сфера с еластични модули  $\kappa$  и  $\mu$  относно матрицата, които наричаме така по аналогия с теорията на диелектриците, следвайки [2, Гл. 20],

$$(5) \quad \alpha_m^{(\kappa)} = \frac{3\kappa_m}{3\kappa_m + 4\mu_m}, \quad \alpha_m^{(\mu)} = \frac{6\kappa_m + 2\mu_m}{5\kappa_m + 4\mu_m},$$

а  $\phi_p = \phi_1^{(p)} + \dots + \phi_N^{(p)}$  е общата обемна концентрация на сферите от дисперсията. Ще отбележим, че до формулите (3) може да се достигне и чрез други подходи. В аналогична форма те са получени от Уенг [4] чрез използване на метода на Мори и Танака [5]. Бенвенисте [6] получава в еквивалентна форма същата формула за  $\kappa_e$  чрез използване на обобщената самоспрегната схема, но поради възникнали усложнения не дава явен израз за  $\mu_e$ .

В основата на тези подходи стоят разумни физични предположения. Не е ясно, обаче, каква статистика на разпределение на множеството от центровете  $\mathbf{x}_j$  на сферите и съответните им еластични модули  $\kappa_j$  и  $\mu_j$  стои зад получените приближени формули. В общия случай ефективните модули  $\kappa_e$  и  $\mu_e$  зависят от пълното статистическо описание на средата. На практика, обаче, разполагаме само с информацията, давана от първите няколко корелационни функции за средата. Ето защо единственото, което може да се направи строго и последователно, е получаването на граници за  $\kappa_e$  и  $\mu_e$  с помощта на вариационни принципи. Нетривиални граници за ефективните еластични модули, използващи само обемните концентрации на компонентите на средата, се получават от вариационния принцип на Хашин и Щрикман [7]. В случая, когато средата за сравнение в този принцип е избрана да е матрицата, съответните граници на Хашин и Щрикман [7] се дават със същите формули (3).

Тук ще разгледаме приложение на класическите вариационни принципи. Съгласно класическия принцип за минимум на потенциалната енергия функционалът

$$(6) \quad U[\hat{\boldsymbol{\epsilon}}(\cdot)] = \langle \kappa(\mathbf{x}) [\text{Tr} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{x})]^2 \rangle + 2 \langle \mu(\mathbf{x}) \hat{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{x}) : \hat{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{x}) \rangle,$$

разглеждан върху класа от пробни потенциални полета  $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{x})$ , за които  $\langle \hat{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{x}) \rangle = \langle \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}) \rangle$ , се минимизира за истинското поле  $\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x})$  в средата; при това

$$(7) \quad \min U = \kappa_e [\text{Tr} \langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle]^2 + 2 \mu_e \langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle : \langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle,$$

което позволява намирането на горни граници за  $\kappa_e$  и  $\mu_e$ , ако функционалът се разглежда върху такъв клас от допустими пробни полета. В (6)  $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{x}) = \hat{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{x}) - \frac{1}{3} \text{Tr} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{x}) \mathbf{I}$  е девиаторната съставяща на тензора  $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{x})$ , а двоеточието означава контракция по двете двойки от индекси на участващите тензори.

Според принципа за минимум на допълнителната енергия функционалът

$$(8) \quad W[\hat{\boldsymbol{\tau}}(\cdot)] = \frac{1}{9} \left\langle \frac{1}{\kappa(\mathbf{x})} [\text{Tr} \hat{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{x})]^2 \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle \frac{1}{\mu(\mathbf{x})} \hat{\boldsymbol{s}}(\mathbf{x}) : \hat{\boldsymbol{s}}(\mathbf{x}) \right\rangle,$$

разглеждан върху класа от симетрични и равновесни пробни полета  $\hat{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{x})$ , за които  $\langle \hat{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{x}) \rangle = \langle \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) \rangle$ , се минимизира за истинското поле  $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})$  в средата; при това

$$(9) \quad \min W = \frac{1}{9\kappa_e} [\text{Tr} \langle \boldsymbol{\tau} \rangle]^2 + \frac{1}{2\mu_e} \langle \boldsymbol{s} \rangle : \langle \boldsymbol{s} \rangle,$$

където сега  $\hat{\boldsymbol{s}}(\mathbf{x}) = \hat{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{x}) - \frac{1}{3} \text{Tr} \hat{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{x}) \mathbf{I}$  е девиаторната съставяща на тензора  $\hat{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{x})$ . Разглеждането на функционала върху такъв клас от допустими пробни полета позволява намирането на долни граници за  $\kappa_e$  и  $\mu_e$ .

Граници за  $\kappa_e$  и  $\mu_e$ , използващи статистическата информация, съдържаща се в първите три корелационни функции на полетата  $\kappa(\mathbf{x})$  и  $\mu(\mathbf{x})$ , са получени и изследвани за дисперсия от сфери с едни и същи еластични свойства  $\kappa_p$  и  $\mu_p$ , вж. например [2, Гл. 21 и 22]. Разглеждат се основно два типа вариационни граници. Едният се основава на използването на пертурбационното разлагане на истинското поле  $\epsilon(\mathbf{x})$  за слабо нехомогенна среда, а другият – на кластерното разлагане на  $\epsilon(\mathbf{x})$  за малки концентрации  $\phi_p$  на сферите. Оказва се, че тогава тези граници съвпадат за ефективния обемен модул  $\kappa_e$ , вж. [8, 9, 10]. Това са границите, извеждащи се от по-общия тип граници на Беран и Молиньо [11] за произволни случайни полета  $\kappa(\mathbf{x})$  и  $\mu(\mathbf{x})$ , и границите, получени от Кинтания и Торкуато [10]. Тук ще обобщим тези граници за дисперсии от сфери с различни случайни еластични свойства  $\kappa_p$  и  $\mu_p$ , разглеждайки ги под общ чадър. Ще покажем, че те са различни за такива дисперсии и ще получим аналитични изрази за тях. Съответните граници за модула на срязване ще бъдат разгледани другаде [12]. Ще отбележим само, че те са различни даже за дисперсии от сфери с едни и същи еластични свойства [8, 9, 10].

От (7) и (9) веднага се вижда, че при намирането на граници на ефективния обемен модул  $\kappa_e$  е достатъчно да се предположи, че тензорите  $\langle \epsilon \rangle$  и  $\langle \tau \rangle$  са сферични, т.е. девиаторите им  $\langle \mathbf{e} \rangle$  и  $\langle \mathbf{s} \rangle$  са равни на нула.

## 2. Пробните полета на Беран-Молиньо и Кинтания-Торкуато

За дисперсия от сфери с една и съща изотропна проводимост  $\sigma_p$  Торкуато [13] въвежда пробни полета, основани на кластерното разлагане на електрическото поле за малки концентрации  $\phi_p$  на сферите. По аналогия на тях за дисперсии от

сфери с една и същи еластични модули  $\kappa_p$  и  $\mu_p$  Кинтания и Торкуато [10] използват пробни полета от вида

$$(10) \quad \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}) = \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle + \alpha \boldsymbol{\varepsilon}_1(\mathbf{x}),$$

където  $\alpha$  е реален параметър, относно който се минимизира рестрикцията на функционала  $U$  върху тези пробни полета, а полето  $\boldsymbol{\varepsilon}_1(\mathbf{x})$  произлиза от първия нетривиален член в кластерното разлагане на истинското поле  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$  при условието  $\langle \boldsymbol{\varepsilon}_1(\mathbf{x}) \rangle = \mathbf{0}$ . Аналогични пробни полета се въвеждат и за функционала  $W$ . Следвайки Торкуато [13], получените по този начин вариационни граници те наричат *кластерни граници от първи ред*. Изразът за полето  $\boldsymbol{\varepsilon}_1(\mathbf{x})$  се обобщава по естествен начин и за дисперсия от сфери с различни еластични модули. Тогава

$$(11) \quad \boldsymbol{\varepsilon}_1(\mathbf{x}) = \sum_j \mathbf{T}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j; \kappa_j^{(p)}, \mu_j^{(p)}) - \iiint \mathbf{T}(\mathbf{x} - \mathbf{y}; \kappa, \mu) F(\mathbf{y}; \kappa, \mu) dy d\kappa d\mu,$$

където  $\mathbf{T}(\mathbf{x}; \kappa, \mu)$  е смущението на полето на хомогенната деформация с тензор  $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle$  в неограничена матрица с еластични модули  $\kappa_m$  и  $\mu_m$ , породено от внасянето на изолирана сфера с еластични модули  $\kappa$  и  $\mu$  в тази матрица, а  $F(\mathbf{y}; \kappa, \mu)$  е съвместната едноточкова вероятностна плътност на разпределение на центровете  $\mathbf{x}_j$  на сферите и техните еластични модули (маркери)  $\kappa_j^{(p)}$  и  $\mu_j^{(p)}$  в дисперсията, вж. т. 3 по-долу. В (11) се сумират смущенията на всички сфери от дисперсията, а интегралният член се въвежда само за да се удовлетвори условието  $\langle \boldsymbol{\varepsilon}_1(\mathbf{x}) \rangle = \mathbf{0}$ . В случая, когато  $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle$  е сферичен тензор,

т. е.  $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \frac{1}{3} \text{Tr} \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle \mathbf{I}$ , тензорното поле  $\mathbf{T}(\mathbf{x}; \kappa, m)$  може да се запише

във вида

$$(12) \quad \mathbf{T}(\mathbf{x}; \kappa, \mu) = \beta_m^{(k)}(\kappa) \nabla \nabla \varphi(\mathbf{x}) \text{Tr} \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle,$$

където

$\varphi(\mathbf{x}) = \int h(\mathbf{y})G(\mathbf{x}-\mathbf{y})d\mathbf{y}$  е нютоновият потенциал на сфера с радиус  $a$  и център в координатното начало,  $h(\mathbf{x})$  е нейната характеристична функция, коефициентът  $\beta_m^{(k)}(\kappa)$  е даден в (4), а  $G(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}$  е функцията на Грийн за уравнението на Лаплас в цялото пространство  $\mathbb{R}^3$ . Тук и по-долу интегрирането относно пространствената променлива  $\mathbf{y}$  е върху цялото  $\mathbb{R}^3$ , а относно променливите  $\kappa$  и  $\mu$  – в интервала  $\Upsilon = [0, +\infty)$ , освен ако областта на интегриране не е зададена явно.

Полетата (11) могат да се запишат в по-проста форма, ако използваме случайното поле на плътността

$$(13) \quad \psi(\mathbf{x}; \kappa, \mu) = \sum_j \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \delta(\kappa - \kappa_j^{(p)}) \delta(\mu - \mu_j^{(p)}),$$

породено от системата  $\{\mathbf{x}_j, \kappa_j^{(p)}, \mu_j^{(p)}\}$  от *маркирани* случайни точки  $\mathbf{x}_j$  с маркер еластичните им модули  $(\kappa_j^{(p)}, \mu_j^{(p)})$ , която може да се разглежда като множество от точки, случайно разпределени в областта  $\mathbb{R}^d \times \Upsilon \times \Upsilon$ . Функцията  $\psi(\mathbf{x}; \kappa, \mu)$  се дефинира чрез  $\delta$ -функцията на Дирак и е въведена от Стратонович [14] за немаркирана система от точки  $\{\mathbf{x}_j\}$ , случайно разпределени върху права. Нейното обобщение за маркирани случайни точки  $\mathbf{x}_j$  с маркер радиуса  $a_j$  на сферата с център  $\mathbf{x}_j$  се въвежда от Христов [15]. С помощта на функцията  $\psi(\mathbf{x}; \kappa, \mu)$  случайните полета на обемния модул  $\kappa(\mathbf{x})$  и модула на срязване  $\mu(\mathbf{x})$  може да се представят във вида

$$(14) \quad \begin{aligned} \kappa(\mathbf{x}) &= \kappa_m + \iint (\kappa - \kappa_m) h(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \psi(\mathbf{x}; \kappa, \mu) d\mathbf{y} d\kappa d\mu, \\ \mu(\mathbf{x}) &= \mu_m + \iint (\mu - \mu_m) h(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \psi(\mathbf{x}; \kappa, \mu) d\mathbf{y} d\kappa d\mu, \end{aligned}$$

а пробните полета на Кинтания и Торкуато да се запишат във вида



$$(15) \quad \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}) = \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle + \alpha \iint \gamma(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\mu}) \nabla \nabla \varphi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \psi'(\mathbf{x}; \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\mu}) d\mathbf{y} d\boldsymbol{\kappa} d\boldsymbol{\mu} \operatorname{Tr} \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle$$

при  $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \frac{1}{3} \operatorname{Tr} \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle \mathbf{I}$ , където  $\gamma(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\mu}) = \gamma_{QT}(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\mu}) = \beta_m^{(k)}(\boldsymbol{\kappa})$ , вж. (10) – (13). Тук и по-долу  $\xi' = \xi - \langle \xi \rangle$  е флуктуацията на случайната функция  $\xi$ .

За произволна статистически хомогенна и изотропна среда Беран и Молиньо [11] използват пробни полета от същия вид (10), за които обаче полето  $\boldsymbol{\varepsilon}_1(\mathbf{x})$  е пропорционално на първия интегрален член от пертурбационното разлагане на  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$  за слабо хетерогенна среда при сферичен тензор  $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle$ , т. е. полетата

$$(16) \quad \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}) = \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle + \lambda \int \nabla \nabla G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \boldsymbol{\kappa}'(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \operatorname{Tr} \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle.$$

Ако в тази формула извършим преход от случайното поле  $\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x})$  към случайното поле на плътността  $\psi(\mathbf{x}; \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\mu})$  по първата от формулите (14), ще достигнем до пробни полета  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x})$  от същия вид (15) при  $\gamma(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\mu}) = \gamma_{BM}(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\mu}) = \boldsymbol{\kappa} - \boldsymbol{\kappa}_m$ . Лесно се вижда, че за дисперсии от сфери с един и същи обмен модул функциите  $\gamma_{QT}(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\mu})$  и  $\gamma_{BM}(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\mu})$  са пропорциони и затова двата класа от пробни полета съвпадат – факт, който беше установен в [8,9]. За дисперсии от сфери с различни обменни модули, обаче, това не е така. Тук ще изведем и изследваме границите за ефективната проводимост, които произтичат от използването на пробните полета (12) при произволна фиксирана функция  $\gamma(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\mu})$ . Може да се постави по-общата задача за екстремизиране на функционала  $U[\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\cdot)]$  при вариране на функцията  $\gamma(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\mu})$ . Тази задача е сложна и ще бъде разгледана другаде [12].

За намиране на съответните граници е необходимо да се позволим на статистическото описание на дисперсията, дадено по-обстойно в [16], което тук накратко ще изложим.

### 3. Статистическо описание на дисперсията

Случайната функция на плътността  $\psi(\mathbf{x}; \kappa, \mu)$  напълно определя дисперсията. Нейните моменти могат да се изразят чрез съвместните многоточкови вероятностни плътности  $F_n(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n; \kappa_1, \mu_1, \dots, \kappa_n, \mu_n)$  на разпределение на центровете  $\mathbf{x}_j$  на сферите и техните еластични модули  $\kappa_j, \mu_j$ . По-долу ще ни бъдат необходими изразите за първите три момента, които се дават от формулите

$$(17) \quad \begin{aligned} \langle \psi(\mathbf{y}; \omega) \rangle &= F_1(\mathbf{y}; \omega), \\ \langle \psi(\mathbf{y}_1; \omega_1) \psi(\mathbf{y}_2; \omega_2) \rangle &= F_1(\mathbf{y}_1; \omega_1) \delta(\mathbf{y}_{1,2}) \delta(\omega_{1,2}) + F_2(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2; \omega_1, \omega_2), \\ \langle \psi(\mathbf{y}_1; \omega_1) \psi(\mathbf{y}_2; \omega_2) \psi(\mathbf{y}_3; \omega_3) \rangle &= F_1(\mathbf{y}_1; \omega_1) \delta(\mathbf{y}_{1,2}) \delta(\omega_{1,2}) \delta(\mathbf{y}_{1,3}) \delta(\omega_{1,3}) \\ &\quad + 3\{\delta(\mathbf{y}_{1,2}) \delta(\omega_{1,2}) F_2(\mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3; \omega_2, \omega_3)\}_s + F_3(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3; \omega_1, \omega_2, \omega_3), \end{aligned}$$

където  $m\{\}_s$  означава симетризацията относно всичките  $m$  различни комбинации от индекси в скобите,  $\mathbf{y}_{i,j} = \mathbf{y}_j - \mathbf{y}_i$ ,  $\omega = (\kappa, \mu)$  и  $\omega_{i,j} = \omega_j - \omega_i$ , вж. [14, 15, 16].

Приемаме, че в дисперсията няма пространствени участъци, които да имат избирателност към сфери с различни еластични свойства. Това означава, че статистиката на разпределението на еластичните модули  $\omega_j = (\kappa_j, \mu_j)$  на сферите е независима от тази на положенията  $\mathbf{x}_j$  на сферите, т. е.

$$F_n(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n; \omega_1, \dots, \omega_n) = f_n(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n) P_n(\omega_1, \dots, \omega_n),$$

където  $f_n(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n)$  са съвместните многоточкови вероятностни плътности на разпределение на центровете  $\mathbf{x}_j$  на сферите, а  $P_n(\omega_1, \dots, \omega_n)$  са съвместните вероятностни плътности на разпределение на техните еластични модули  $\omega_j = (\kappa_j, \mu_j)$ ,  $j = 1, 2, \dots$ . Ще приемем също, че тези еластични модули са статистически независими, т. е.

$$P_n(\omega_1, \dots, \omega_n) = P(\omega_1) \dots P(\omega_n),$$

където  $P(\omega)$  е вероятностната плътност на еластичните модули  $\omega = (\kappa, \mu)$  на сфера от дисперсията. Ще отбележим още, че от предположената статистическа хомогенност и изотропност на дисперсията следва, че  $f_1(\mathbf{y}) = n$ ,  $f_2(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) = n^2 g_2(r)$  и  $f_3(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3) = n^3 g_3(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_3, \mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_3)$ , където  $n$  е средният брой центрове на сфери в единица обем,  $g_2(r)$  и  $g_3(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = g_3(|\mathbf{u}|, |\mathbf{v}|, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$  са съответно двуточковата (радиалната) и триточковата функции на разпределение,  $r = |\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1|$ .

#### 4. Вариационните граници за ефективната проводимост

##### 4.1. Получаване на горната граница

Рестрикцията на функционала  $U[\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\cdot)]$  върху пробните полета (15) е вече обикновена, квадратна функция на  $\alpha$ , чието екстремизиране води до получаване на горна граница  $\kappa_U$  на ефективната проводимост  $\kappa_e$ :

$$(18) \quad \kappa_U = \langle \kappa \rangle - \frac{R^2}{Q},$$

където

$$Q = (\kappa_m - \frac{2}{3} \mu_m) A^{(h)} + 2 \mu_m A + B^{(h)} + 2B,$$

$$R = \iiint (\kappa_1 - \kappa_m) \gamma(\omega_2) h(\mathbf{x} - \mathbf{y}_1) h(\mathbf{x} - \mathbf{y}_2) \times \langle \psi(\mathbf{y}_1, \omega_1) \psi'(\mathbf{y}_2, \omega_2) \rangle d\mathbf{y}_1 d\omega_1 d\mathbf{y}_2 d\omega_2,$$

$$A^{(h)} = \iiint \gamma(\omega_1) \gamma(\omega_2) h(\mathbf{x} - \mathbf{y}_1) h(\mathbf{x} - \mathbf{y}_2) \times \langle \psi(\mathbf{y}_1, \omega_1) \psi'(\mathbf{y}_2, \omega_2) \rangle d\mathbf{y}_1 d\omega_1 d\mathbf{y}_2 d\omega_2,$$

$$\begin{aligned}
 A &= \iiint \gamma(\omega_1)\gamma(\omega_2)\nabla\nabla\varphi(\mathbf{x}-\mathbf{y}_1):\nabla\nabla\varphi(\mathbf{x}-\mathbf{y}_2) \\
 &\quad \times\langle\psi(\mathbf{y}_1,\omega_1)\psi'(\mathbf{y}_2,\omega_2)\rangle d\mathbf{y}_1d\omega_1d\mathbf{y}_2d\omega_2, \\
 B^{(h)} &= \iiint \iiint \left[\kappa_3-\kappa_m-\frac{2}{3}(\mu_3-\mu_m)\right]\gamma(\omega_1)\gamma(\omega_2)h(\mathbf{x}-\mathbf{y}_3)h(\mathbf{x}-\mathbf{y}_1)h(\mathbf{x}-\mathbf{y}_2) \\
 &\quad \times\langle\psi'(\mathbf{y}_1,\omega_1)\psi'(\mathbf{y}_2,\omega_2)\psi(\mathbf{y}_3,\omega_3)\rangle d\mathbf{y}_1d\omega_1d\mathbf{y}_2d\omega_2d\mathbf{y}_3d\omega_3, \\
 (19) \quad B &= \iiint \iiint (\mu_3-\mu_m)\gamma(\omega_1)\gamma(\omega_2)h(\mathbf{x}-\mathbf{y}_3)\nabla\nabla\varphi(\mathbf{x}-\mathbf{y}_1):\nabla\nabla\varphi(\mathbf{x}-\mathbf{y}_2) \\
 &\quad \times\langle\psi'(\mathbf{y}_1,\omega_1)\psi'(\mathbf{y}_2,\omega_2)\psi(\mathbf{y}_3,\omega_3)\rangle d\mathbf{y}_1d\omega_1d\mathbf{y}_2d\omega_2d\mathbf{y}_3d\omega_3.
 \end{aligned}$$

Използвайки изразите (17) за първите три момента на  $\psi(\mathbf{x};\omega)$ , за  $R$ ,  $A^{(h)}$ ,  $A$ ,  $B^{(h)}$  и  $B$  получаваме

$$\begin{aligned}
 R &= \mathcal{E}\left[(\kappa_p-\kappa_m)\gamma\right]\phi_p + \left[\mathcal{E}(\kappa_p)-\kappa_m\right]\mathcal{E}(\gamma)r_2n^2, \\
 A^{(h)} &= \mathcal{E}(\gamma^2)\phi_p + \mathcal{E}^2(\gamma)\tilde{a}_2n^2, \quad A = \mathcal{E}(\gamma^2)a_1n + \mathcal{E}^2(\gamma)a_2n^2, \\
 B^{(h)} &= \mathcal{E}\left[\left(\kappa_p-\kappa_m-\frac{2}{3}(\mu_p-\mu_m)\right)\gamma^2\right]\phi_p \\
 &\quad + \left\{ \begin{aligned} &2\mathcal{E}\left[\left(\kappa_p-\kappa_m-\frac{2}{3}(\mu_p-\mu_m)\right)\gamma\right]\mathcal{E}(\gamma)\tilde{b}_2 \\ &+ \left[\mathcal{E}\left(\kappa_p-\frac{2}{3}\mu_p\right)-\left(\kappa_m-\frac{2}{3}\mu_m\right)\right]\mathcal{E}(\gamma^2)\tilde{b}_2^\dagger \end{aligned} \right\} n^2 \\
 &\quad + \left[\mathcal{E}\left(\kappa_p-\frac{2}{3}\mu_p\right)-\left(\kappa_m-\frac{2}{3}\mu_m\right)\right]\mathcal{E}^2(\gamma)\tilde{b}_3n^3,
 \end{aligned}$$

$$(20) \quad B = \mathcal{E}[(\mu_p - \mu_m)\gamma^2]b_1 n + \left\{ 2\mathcal{E}[(\mu_p - \mu_m)\gamma] \mathcal{E}(\gamma)b_2 + [\mathcal{E}(\mu_p) - \mu_m] \mathcal{E}(\gamma^2)b_2^\dagger \right\} n^2 + [\mathcal{E}(\mu_p) - \mu_m] \mathcal{E}^2(\gamma)b_3 n^3,$$

където коефициентите

$$r_2 = \tilde{a}_2 = \tilde{b}_2 = \iint h(\mathbf{z}_1)h(\mathbf{z}_2)\theta(\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_1)d\mathbf{z}_1d\mathbf{z}_2 = -V_a^2,$$

$$a_1 = \int \nabla\nabla\varphi(\mathbf{z}) : \nabla\nabla\varphi(\mathbf{z})d\mathbf{z} = V_a,$$

$$a_2 = \iint \nabla\nabla\varphi(\mathbf{z}_1) : \nabla\nabla\varphi(\mathbf{z}_2)\theta(\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_1)d\mathbf{z}_1d\mathbf{z}_2 = -V_a^2,$$

$$b_1 = \int h(\mathbf{z})\nabla\nabla\varphi(\mathbf{z}) : \nabla\nabla\varphi(\mathbf{z})d\mathbf{z} = \frac{1}{3}V_a,$$

$$b_2 = \iint h(\mathbf{z}_1)\nabla\nabla\varphi(\mathbf{z}_1) : \nabla\nabla\varphi(\mathbf{z}_2)\theta(\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_1)d\mathbf{z}_1d\mathbf{z}_2 = -\frac{1}{3}V_a^2,$$

$$\tilde{b}_2^\dagger = \iint h(\mathbf{z}_1)h(\mathbf{z}_2)g_2(\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_1)d\mathbf{z}_1d\mathbf{z}_2b_2 = 0,$$

се пресмятат лесно чрез използване на условието за непресичане на сферите и свойствата  $\Delta\varphi(\mathbf{x}) = -h(\mathbf{x})$  и  $h(\mathbf{x})\nabla\nabla\varphi(\mathbf{x}) = -\frac{1}{3}h(\mathbf{x})\mathbf{I}$  на нютонския потенциал и чрез интегриране по части при  $a_1$  и  $a_2$ , а коефициентите

$$(21) \quad b_2^\dagger = \iint h(\mathbf{z}_2)\nabla\nabla\varphi(\mathbf{z}_1) : \nabla\nabla\varphi(\mathbf{z}_1)g_2(\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_1)d\mathbf{z}_1d\mathbf{z}_2,$$

$$b_3 = \iiint h(\mathbf{z}_3)\nabla\nabla\varphi(\mathbf{z}_1) : \nabla\nabla\varphi(\mathbf{z}_2)g_3(\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_3)d\mathbf{z}_1d\mathbf{z}_2d\mathbf{z}_3$$

и зависят от дву- и три-точковите функции на разпределение; в дадените по-горе формули  $\theta(r) = g_2(r) - 1$  е тоталната

корелационна функция,  $g_3(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = g_3(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - g_2(\mathbf{u}) - g_2(\mathbf{v}) + 1$ ,  $V_a$  е обемът на сфера от дисперсията,  $\mathcal{E}(\xi)$  е математическото очакване на случайната величина  $\xi$ . Същите коефициенти  $b_2^\dagger$  и  $b_3$  се появяват и при аналогичното разглеждане за ефективната проводимост  $\sigma_e$  на дисперсията [17]. Оказа се, че те се изразяват чрез статистически параметри за двуфазна дисперсия, т.е. за дисперсия от сфери с една и съща проводимост  $\sigma_p$ .

#### 4.2. Статистически параметри за дисперсията

Позовавайки се на факта, че за двуфазна дисперсия границите на Беран [18] и кластерните граници на Торкуато [13] за  $\sigma_e$  съвпадат, в [17] установихме равенството

$$(22) \quad B = \frac{\phi_p \phi_m}{d} [\phi_m + (d-1)\zeta_p],$$

където

$$(23) \quad B = nb_1 + n^2(2b_2 + b_2^\dagger) + n^3b_3,$$

а  $\zeta_p$  е статистически параметър за средата, въведен независимо един от друг от Торкуато [19] и Милтон [20], който за дисперсия от сфери се изразява в интегрална форма чрез дву- и три-точковите функции на разпределение  $g_2(r)$  и  $g_3(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ , вж., например, [2, Гл. 20]. (В литературата за  $\zeta_p$  се използва обикновено означението  $\zeta_2$ , свързвайки по този начин параметъра с фазата с проводимост  $\sigma_2$ , за която тук използваме означението  $\sigma_p$ .) Аналогично сравнение може да се направи за границите на Беран-Молиньо [11] и Кинтания-Торкуато [10] за ефективния обем на модул  $\kappa_e$  на дисперсия от сфери с едни и същи еластични модули  $\kappa_p$  и  $\mu_p$ , което води до равенство, еквивалентно на (22). Ще отбележим само, че тогава от (20) следва, че  $B = (\mu_p - \mu_m)B\gamma^2$ , Ето защо, позовавайки се пък на интегралната форма (19) за  $B$ , ще получим представянето

$$(24) \quad B = \langle \mathcal{I}^{(p)}(\mathbf{x})\mathbf{F}(\mathbf{x}) : \mathbf{F}(\mathbf{x}) \rangle,$$

където

$$\mathcal{I}^{(p)}(\mathbf{x}) = \int h(\mathbf{x} - \mathbf{y})\psi(\mathbf{y})d\mathbf{y} = \sum_j h(\mathbf{x} - \mathbf{y}_j)$$

е индикаторната функция на фазата от сферите, а

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \int \nabla\nabla\varphi(\mathbf{x} - \mathbf{y})\psi'(\mathbf{y})d\mathbf{y} = \sum_j \nabla\nabla\varphi(\mathbf{x} - \mathbf{y}_j) + \frac{\phi_p}{d} \mathbf{I}.$$

В тази си форма параметърът  $B$  може лесно да се пресметне чрез компютърна симулация на дисперсията, а оттук чрез равенството (22) да се пресметне и параметъра  $\zeta_p$ , както е направено от Милер и Торкуато [21], които установяват в еквивалентна форма това равенство.

С помощта на равенствата (22) и (23) можем да изразим коефициента  $b_3$  чрез параметъра  $\zeta_p$  и коефициента  $b_2^\dagger$ , който пък може лесно да се преобразува до следния вид

$$(25) \quad b_2^\dagger = 2\Omega V_a^2,$$

където

$$(26) \quad \Omega = \int_a^{+\infty} g_2(as) \frac{s^{d-1}}{(s^2-1)^d} ds$$

е статистически параметър, който се появява при опростяване на параметъра  $\zeta_p$  за дисперсия от непресичащи се сфери, вж., например, [22]. За дисперсия, намираща се в термодинамично равновесие, параметърът  $\Omega$  е пресметнат в последната работа до ред  $\phi_p^2$ :

$$(27) \quad \Omega = \Omega_0 + \Omega_1\phi_p + \Omega_2\phi_p^2 + o(\phi_p^2),$$

където  $\Omega_0 = \frac{5}{36} - \frac{1}{16}\ln 3$ ,  $\Omega_1 = \frac{25}{72} + \frac{51}{96}\ln 5 - \ln 3$  и  $\Omega_2 \approx 0.080980$ .

За параметъра  $\zeta_p$  Бийзли и Торкуато [22] получават приближено:

$$(28) \quad \zeta_p = 0.21068\phi_p + 0.04693\phi_p^2 + 0.00247\phi_p^3 + o(\phi_p^3).$$

По-удобно е вместо параметъра  $\Omega$  да въведем параметъра

$$(29) \quad \chi_p = 3\Omega\phi_p = \frac{3}{2V_a} b_2^\dagger \phi_p$$

за който се оказа [23], че  $0 \leq \chi_p \leq 1$ . Добре известно е, че същите неравенства се удовлетворяват и от параметъра  $\zeta_p$ :  $0 \leq \zeta_p \leq 1$ , вж. [19, 20]. Оказа се също, че за  $\chi_p$  може да се изведе представяне, аналогично на това, определено от (22) и (24) за  $\zeta_p$ .

#### 4.3. Крайна форма на вариационните граници

Имайки предвид стойностите на коефициентите  $r_2$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $\tilde{a}_2$ ,  $b_1$ ,  $b_2$  и  $\tilde{b}_2$ , формулата (29) и произтичащото от равенствата (22) и (23) представяне на  $b_3$ , за коефициентите  $R$  и  $Q$  в израза (18) за горната граница  $\kappa_U$  намираме

$$(30) \quad \begin{aligned} R &= \left[ \left( \mathcal{E}(\kappa_p) - \kappa_m \right) \mathcal{E}(\gamma) \phi_m + \text{Cov}(\kappa_p, \gamma) \right] \phi_p, \\ Q &= \frac{\kappa_m}{\alpha_m^{(k)}} \left[ \mathcal{E}^2(\gamma) \phi_m + \text{Var}(\gamma) \right] \phi_p \\ &+ \left( \mathcal{E}(\kappa_p) - \kappa_m \right) \left[ \mathcal{E}^2(\gamma) \phi_m^2 + \text{Var}(\gamma) \right] \phi_p \\ &+ \left[ \text{Cov}(\kappa_p, \gamma^2) - 2\text{Cov}(\kappa_p, \gamma) \mathcal{E}(\gamma) \phi_p \right] \phi_p \\ &+ \frac{4}{3} \left( \mathcal{E}(\mu_p) - \mu_m \right) \left[ \mathcal{E}^2(\gamma) \zeta_p \phi_m + \text{Var}(\gamma) \chi_p \right] \phi_p, \end{aligned}$$

където  $\text{Cov}(\xi, \eta) = \mathcal{E} \left[ (\xi - \mathcal{E}(\xi))(\eta - \mathcal{E}(\eta)) \right] = \mathcal{E}(\zeta\eta) - \mathcal{E}(\xi)\mathcal{E}(\eta)$  е ковариацията на случайните величини  $\xi$  и  $\eta$ , а  $\text{Var}(\xi) = \text{Cov}(\xi, \xi) = \mathcal{E} \left[ (\xi - \mathcal{E}(\xi))^2 \right] = \mathcal{E}(\zeta^2) - \mathcal{E}^2(\xi)$  е вариацията (дисперсията) на  $\xi$ .

Аналогична вариационна процедура, основана на минимизирането на функционала (8) върху класа от пробни полета



$$\hat{\mathbf{\tau}}(\mathbf{x}) = \langle \boldsymbol{\tau} \rangle + \alpha \iint \gamma(\kappa, \mu) [\nabla \nabla \varphi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + h(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mathbf{I}] \times \psi'(\mathbf{x}; \kappa, \mu) dy d\kappa d\mu \text{Tr} \langle \boldsymbol{\tau} \rangle$$

при  $\langle \boldsymbol{\tau} \rangle = \frac{1}{3} \text{Tr} \langle \boldsymbol{\tau} \rangle \mathbf{I}$  води до намирането на долната граница  $\kappa_L$  на ефективния обмен модул  $\kappa_e$ :

$$(31) \quad \kappa_L = \left\{ \left\langle \frac{1}{\kappa} \right\rangle - \frac{R^2}{Q} \right\}^{-1},$$

където сега

$$(32) \quad \begin{aligned} R &= 2 \left[ (\mathcal{E}(1/\kappa_p) - 1/\kappa_m) \mathcal{E}(\gamma) \phi_m + \text{Cov}(1/\kappa_p, \gamma) \right] \phi_p, \\ Q &= \frac{3}{\alpha_m^{(k)} \mu_m} \left[ \mathcal{E}^2(\gamma) \phi_m + \text{Var}(\gamma) \right] \phi_p \\ &+ 4 (\mathcal{E}(1/\kappa_p) - 1/\kappa_m) \left[ \mathcal{E}^2(\gamma) \phi_m^2 + \text{Var}(\gamma) \right] \phi_p \\ &+ 4 \left[ \text{Cov}(1/\kappa_p, \gamma^2) - 2 \text{Cov}(1/\kappa_p, \gamma) \mathcal{E}(\gamma) \phi_p \right] \phi_p \\ &+ 3 (\mathcal{E}(1/\mu_p) - 1/\mu_m) \left[ \mathcal{E}^2(\gamma) \phi_m \zeta_p + \text{Var}(\gamma) \chi_p \right] \phi_p. \end{aligned}$$

Детайлно изследване на поведението на границите  $\kappa_L$  и  $\kappa_U$  ще бъде дадено в [12]. Тук ще отбележим само, че най-простият случай, когато  $\gamma$  е неслучайна величина, води до получаването на границите

$$\frac{1}{\kappa_L} = \left\langle \frac{1}{\kappa} \right\rangle - \frac{4 \phi_p \phi_m (\mathcal{E}(1/\kappa_p) - 1/\kappa_m)^2}{3/(\alpha_m^{(k)} \mu_m) + 4 (\mathcal{E}(1/\kappa_p) - 1/\kappa_m) \phi_m + 3 (\mathcal{E}(1/\mu_p) - 1/\mu_m) \zeta_p},$$

$$\kappa_U = \langle \kappa \rangle - \frac{3 \phi_p \phi_m (\mathcal{E}(\kappa_p) - \kappa_m)^2}{3 \kappa_m / \alpha_m^{(k)} + 3 (\mathcal{E}(\kappa_p) - \kappa_m) \phi_m + 4 (\mathcal{E}(\mu_p) - \mu_m) \zeta_p},$$

които представляват границите на Беран-Молиньо за двуфазна среда с еластични модули  $\mathcal{E}(\kappa_p), \mathcal{E}(\mu_p)$  и  $\kappa_m, \mu_m$  за горната

граница и еластични модули  $1/\mathcal{E}(1/\kappa_p)$ ,  $1/\mathcal{E}(1/\mu_p)$  и  $\kappa_m$ ,  $\mu_m$  на компонентите си за долната граница. Ако  $\gamma$  е случайна величина, обаче, статистическият параметър  $\chi_p$  има самостоятелно значение в определянето на поведението на границите.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Maxwell, J. C., *A Treatise on Electricity and Magnetism*, Vol.1, Ch. 9, article No 310-315, pp. 435-441, 1st edn. Oxford, United Kingdom: Clarendon Press, 1973.
2. Torquato S., *Random heterogeneous materials*, New York, NY: Springer, 2002.
3. McCartney L. Neil, A. Kelly, Maxwell's far-field methodology applied to the prediction of properties of multi-phase isotropic particulate composites, *Proc. R. Soc. London A* **464**, 423, 2008.
4. Weng, G. J., Some elastic properties of reinforced solids with special reference to isotropic ones containing spherical inclusions, *Int. J. Eng. Sci.* **22**, 845-856, 1984.
5. Mori, T., K. Tanaka, Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions, *Acta Metall.* **21**, 571-574. 1973.
6. Benveniste, Y., Revisiting the generalized self-consistent scheme in composites: Clarification of some aspects and a new formulation, *J. Mech. Phys. Solids*, **56**, 2984, 2008.
7. Hashin, Z., S. Shtrikman, A variational approach to the theory of the elastic behavior of multiphase materials, *J. Mech. Phys. Solids*, **11**, 127-140, 1963.
8. Markov, K. Z., K. D. Zvyatkov, Optimal third-order bounds on the effective properties of some composite media, and related problems, *Advances in Mechanics* (Warsaw) **14**(4), 3-46, 1991.
9. Markov, K. Z., Kr. D. Zvyatkov, On the optimal third-order bounds on the effective elastic moduli of random dispersions of spheres, *Annuaire Univ. Sofia, Fac. Math. Inf., Livre 2, Mécanique*, **83**/1989, 37-63, 1992.
10. Quintanilla, J. and Torquato, S. (1995). New bounds on the elastic moduli of suspensions of spheres, *J. Appl. Phys.* **77**, 4361-4372, 1995.
11. Beran, M. J., Molyneux, J., Use of classical variational principles to determine bounds for the effective bulk modulus in heterogeneous media, *Quart. Appl. Math.* **24**, 107-118, 1966.
12. Tsvyatkov, Kr. D., Bounds on the effective elastic moduli of multi-phase dispersions of spheres, to be published.

13. Torquato, S., Bulk properties of two-phase disordered media. III. New bounds on the effective conductivity of dispersions of penetrable spheres, *J. Chem. Phys.* **84**, 6345, 1986.
14. Stratonovich, R. L., *Topics in theory of random noises*, Vol. 1, New York, Gordon and Breach, 1967.
15. C. I. Christov, A further development of the concept of random density function with application to Volterra-Wiener expansions, *C. R. Acad. bulg. sci.* **38**(1), 35-38, 1985.
16. Zvyatkov, Kr. D., On the effective conductivity of a class of random dispersions, *Annuaire Univ. Sofia, Fac. Math. Inf., Livre 2*, **89**, 217, 1995.
17. Tsvyatkov, Kr. D., On the effective conductivity of multi-phase dispersions, *Proceedings of the Conference MATHTEX 2012, Univ. Shumen, Fac. Math. Inf., Vol. 1*, 85-90, 2013. (in Bulgarian)
18. Beran, M. J., Use of the variational approach to determine bounds for the effective permittivity in random media, *Nuovo Cimento* **38**, 771, 1965.
19. Torquato, S., Microscopic Approach to Transport in Two-Phase Random Media, Ph.D. thesis, State University of New York at Stony Brook, 1980.
20. Milton, G. W., Bounds on the electromagnetic, elastic, and other properties of two-component composites., *Physical Review Letters* **46**(8), 542, 1981.
21. Miller, C. A., S. Torquato, Effective conductivity of hard-sphere dispersions, *J. Appl. Phys.* **68**, 5486, 1990.
22. Beasley, J. D, S. Torquato, Bounds on the effective conductivity of suspension of random impenetrable spheres, *J. Appl. Phys.* **60**, 3556, 1986.
23. Tsvyatkov, Kr. D., Bounds on the effective conductivity of multi-phase dispersions of spheres, to be published.

**Красимир Д. Цвятков**

ШУ „Епископ Константин Преславски“, гр. Шумен, ФМИ,

катедра „Математически анализ“

E-mail: ktsvyatkov@abv.bg



## SIGN IN THE MARKETING COMMUNICATION

TRUFKA R. DIMITROVA

**ABSTRACT:** *The company sign or logo is an important tool for communication, impact, identification and connectivity. We have studied the influence of the sign over two particular products through examining the absorption coefficient, vibration frequency of the Lorentz oscillators, refraction of the light. We have made an experiment for the explanation of the essence and the mechanisms of influence, conclusion for the meaning and the application of the sign.*

**KEYWORDS:** *logo, sign, sign language, absorption coefficient, marketing communication, vibration frequency of the Lorentz oscillators*

### Introduction

The creation of the company logo or sign is one of the most important steps in the initial phase of the development of every firm. It can contribute for the creation of a company image of the entity, which will distinguish it from the competitors, will attract and keep the attention and will have an impact over the audience and the whole environment. Because of the mass impact the last mentioned is a huge responsibility, which should be used with a lot of knowledge, enlightenment and awareness of connectivity. In this research we look at the sign as a sacred symbol. The sacred sign of family, state or spiritual practice exists thousands years back and are written on walls, plates, bread, flag and stamps. They have relation to the spiritual plan of the Universe and they are timeless perfection and reality. The sacred geometry simultaneously consist all the aspects of the language as a main tool for communication: 1. sound /vibration, consonance; 2. numbers, proportions and sequence of numbers; 3. archetype of geometric shapes/circle, triangle, square, etc. [1]. The scared geometry call the architecture of the Universe pure communication, because the body reacts to the vibration, to the rationality and the messages of the different shapes provoking different feeling/sensual knowledge.

Therefore some authors define the sacred geometry as the mind of the Universe, common language, omnipresent unity or integrity which makes it a harmonizing factor in the exchange. The marketing communication has a similar function and the end goal of marketing is exchange of all the benefits with all the stakeholders. The research and the approach used are determined from the following considerations:

- The author of trade marks Stefan Kanchev – the creator of the signs of Bulgarian National Television, Petrol, The Union of Bulgarian Artists, National Art Gallery, Balcancar, Bulgarian Science Academy, of publishing houses like “Science and Art”, “Technology”, “Education”, of Sofia opera, theater “Sofia”, puppet theater, received recognition long ago not only in Europe but also in the whole world. There are American publications with selected trade marks from all over the world and the majority of them are designed by Stefan Kanchev. In 1966 in New York is organized the first world expo of trademarks and the only Bulgarian with an impressive presence is Stefan Kanchev. He is included in the encyclopedia ‘Who’s who’ in the graphic design in a couple of consecutive editions. Possibly this is because Stefan Kanchev is inspired mostly from the Bulgarian spirit expressed in the folklore. Important fact is that he comes from an old family of iconographers. His father is an iconographer and this has a big influence over Kanchev’s worldview. He is influenced by the Bulgarian church mural, from the icon, the Bulgarian rugs and embroideries, stone sculptures in which the sacred geometry is present; [2]

- Symbolism is an ancient science. In the past almost the whole knowledge in the world was disguised by different symbols. According to a legend in the sign of the Bulgarian is encoded the ancient science “isometric”, through which people will have the ability to master the ancient knowledge for the harmony between the man and the nature, the universal formula for resolving the human contradictions. Every geometric shape has a different message. The circle in static, e.g., is completeness, perfection, unity, the triangle – might, stability, balance, the square – instability, concern. Through its

vibration the sign communicates at the same time with the people, the Earth, the space – it transfers information, it is a weapon, a link or a wire [1]. It acts like an antenna and changes the energy system of the body with which resonates, it becomes an emitter. Human DNA consists of icosahedrons and dodecahedrons [3]. Maybe the time has come to go back to the ancient symbols, the sacred geometry, to get to know them, to rediscover them, renovate them and live them again;

- Daniel Kage – master of geometry and sculpture from Vienna, reflects the connection between the nature, the Universe and the spiritual world, with his art he spreads the knowledge of the sacred geometry. He speaks about the inner connectivity with the nature and the important meaning of the ancient knowledge in present times. The sacred geometry reveals the secret codes of the Universe. The sacred geometric shapes are powerful mandalas which allow us to connect with the higher dimensions in order to keep the vibrating energy in one and the same frequency with the Universe and therefore to find inner peace / mandala – a Tibetan word for a wheel, integrity, circle of faith, awareness, expression of the heart which leads to self-awareness. Drawings joining together amazing figures and strict geometric shapes.

- We base this research on results for a study by professor Chavdar Kacaunov on the adaptometric / radiesthetic/ definition of the impact of the symbols orenda over the human bio-field (aura). He emphatically proves the ability of the symbols orenda to harmonize the human bio-field in cases of energy shortage and energy surplus;

- Our study of the impact on the absorption coefficient of water over different marketing tools—signs, slogan, attitude and clay, showed the most significant the influence of the sign. This provoked our interest in a deeper study of the impact of the sign on different solutions – water and clay solution 1%. We chose the sign orenda as an influence tool, because it is a sacred symbol which is defined as an unity of spirit, soul and body, integrity, freedom, initiation and desire for life, the basis of life. Orenda is a spiritual journey, concentrated intention for happiness, synchronized connection of the soul

(figure 1).



Figure 1. **The sign Orenda**

The main goal of this study is to find objective evidence and indicators for the influence of “the sign language” on a particular product. This will reveal the role of the sign, it will increase the responsibility in its use, the enlightenment and the professionalism in its creation. Our working hypothesis is that the sign changes the vibration of the object it acts on and therefore it has an impact on the consumer.

### **I. Essence of the sign**

As a major element of semiotics the shortest definition of the sign is an abstract group of all the sensory receptive signals which are related to a particular object of the state of things. If we apply the definition of professor Kaftandjiev sign is everything we use to express something during communication. The company sign or or emblem is called **logo design**. It is a basic element of the corporate style and represents original drawing or image of the name and the activity of a particular firm, product brand or service. The design of a company logo can be created from a print, graphic image or a combination of both. The company or corporate identity in marketing is “the face” of the firm. It is expressed through the harmony of the advertisement materials, products packaging, trademarks, and also the messages. The logo and the complimentary graphic elements should be designed according a set of rules which determine the color palette, the prints, the outlook of the pages and other tools that ensure visual continuity and recognition of all the physical aspects of the object. The creation of a corporate identity starts with the design of a company sign (logo) – separately or in combination with a print (logotype), package of



materials for marketing corporate communication – business card, form, envelope, file, color image of the firm as well as designing all the additional materials needed for the marketing presentation. The nature of the symbols is matter studied long ago by the philosophy and the semiotics. But nowadays the most common notion is that the efficiency and the sense of a particular sign depends both form the receiver and the one who sends the message through him. If the “sender” is not familiar with the particular language of the sign, he would not be capable to express the message or he would create a wrong notion in “the receiver” of the message. Therefore in advertisement and the advertising messages is needed a deep knowledge and sense of the right and effective use of symbols, signs and their symbolism. The inability to send the desired message would lead to a failure for the particular advertisement and the creation of mistakes and possibly negative associations within the target group. The unique company sign (the logo) could be [4]:

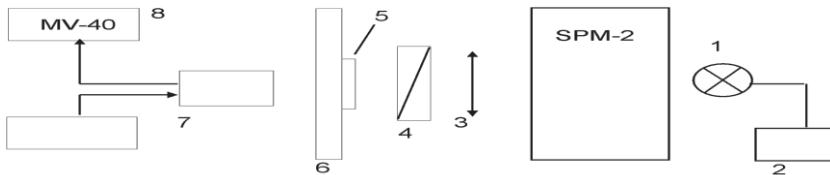
- Logo **print** – the most common logo with a design focused on the text. It is suitable for companies who can easily and successfully visualize their activity through the text of the logo. Another reason for common use of the **logo print** could be the easy recognition of the products (services) by the written name rather than by one symbol (sign). Such logo are the trademarks Panasonic, Samsung, Sharp, etc.;
- Logo **letter** – Often it represents an abbreviation from the name of the company or the product in the cases when the initials are better interpreted than the full name or when the name of the company consist several words. Such logo are J & B, JPS, JPG, etc.;
- Logo **symbol** (sign) – it represents simple but strong graphic symbol harmonized with the company, the product or the service. It is suitable when the company activity needs an emblem which is correctly interpreted by the consumers. Such are the logo of trademarks like Blaupunkt, Nike, Apple Computer, etc.;

- Logo **image** (illustration) – graphic image (illustration) that includes a symbol and a text inscription of the name of the company/product.

## II. Methodology of the experiment

In the Lorentz model the quantum analogue of the classic linear oscillator includes all the direct transitions between zones, all the transition in which the electron transfers from one energy zone to another without a change in its wave vector. The Drude model is applicable with metals in which the electrons are free and the quantum analogue of the classic oscillator includes transitions within the zone. The acceleration of the electrons under the influence of light makes them stay in the zone they are. With the acceleration their transition in a state with a higher energy does not depend on the wave vector.

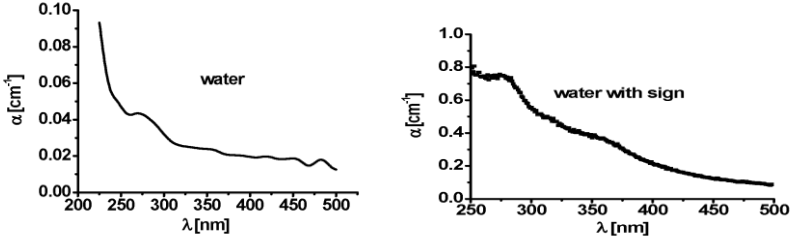
The experimental setting for measurement of the absorption coefficient in the visible spectrum consist the following components: halogen lamp (1) with a stabilized voltage source 3H-7 (2), monochromator SPM-2, collimating system of quartz lenses (3), cuvette with the solution under study (4), cuvette-holder (5), detector Hamamatsu S2281-01 (6) and picoampere measurement MV-40 (7) (figure 2). The thickness of the cuvette used is  $d = 0.995$  cm.



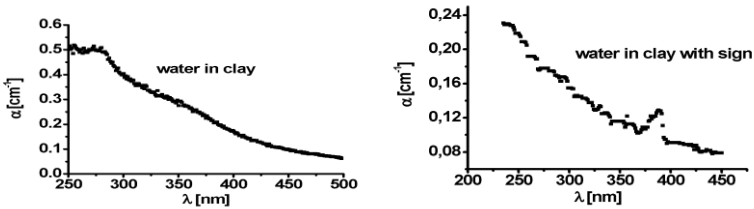
**Figure 2.** Experimental setting for measurement of the absorption coefficient  $\alpha(\lambda)$ .

The absorption coefficient is determined according the Beer-Bouguer-Lambert law  $\alpha(\lambda) = (1/d) \cdot [\ln(I_0/I)]$ , where  $d$  is thickness of

the sample,  $I_0$  is intensity of the falling light and  $I$  is intensity of the transmitted light (figures 3, 4).



**Figure 3.** The absorption spectra of water solutions in the spectral region 200 – 500 nm.



**Figure 4.** The absorption spectra of clay solutions in the spectral region 200 – 500 nm.

When the electromagnetic wave is distributed in an isotropic immersive environment, the absorption coefficient is represented as:

$$(1) \quad \alpha(\lambda) \approx [N\epsilon^2(\gamma/2)]/[2cn\epsilon_0m(\lambda_0-\lambda)^2 + (\gamma/2)^2]$$

The normalized curve of the absorption coefficient has the shape:

$$(2) \quad L(\lambda) = [\alpha(\lambda)/\alpha_{\max}] = (\gamma/2)^2/[(\lambda_0-\lambda)^2 + (\gamma/2)^2],$$

where

$$(3) \quad \alpha_{\max} = [Ne^2]/[2en\epsilon_0m(\gamma/2)].$$

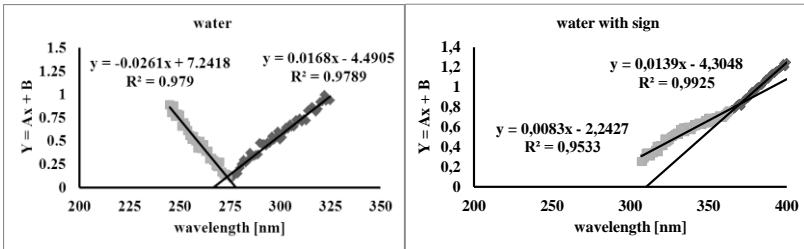
Whether the curve is actually a Lorentz curve could be checked as follows: The dependence  $L(\lambda)$  is reduced to linear through a linear correlation analysis.

Therefore the equality (1) is transformed into the equality

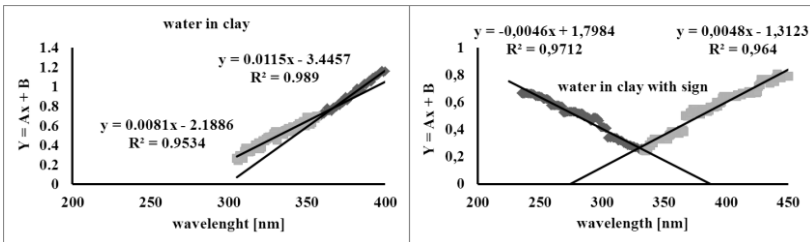
$$(4) \quad [(1/L(\lambda)) - 1]^{1/2} = [\lambda_0/(\gamma/2)] - [1/(\gamma/2)]\lambda.$$

$\lambda_0$  is own wavelength oscillation of the oscillators per one unit of volume, and  $\gamma$  is coefficient of attenuation which accounts the loss of energy in the vibration of the oscillators. If  $Y = [(1/L(\lambda)) - 1]^{1/2}$ ,

$B = [\lambda_0/(\gamma/2)]$ ,  $A = - [1/(\gamma/2)]$  and  $x = \lambda$ , then we can write down the following linear function  $Y = Ax + B$  (figures 5, 6).



**Figure 5.** The experimental dependence  $[(1/L(\lambda)) - 1]^{1/2}$  for water solutions.



**Figure 6.** The experimental dependence  $[(1/L(\lambda)) - 1]^{1/2}$  for clay solutions.

If the coefficient of correlation is  $R^2 = 0,98$ , then the probability P would be 0,95. At the end we can conclude that the dependence between Y and x is linear and the curve is a Lorentz curve.

For the absorption coefficient and the related Lorentz curves of water, water after the influence of the sign orenda, clay solution and clay solution after the influence of the sign we have the following results.

**Table 1.** Summary of the research results

Object of study	water	water and sign	clay solution	clay solution and sign
Absorption coefficient [ $\text{cm}^{-1}$ ]	0,09	0,8	0,5	0,23
Frequency of vibration of the Lorentz oscillators [ $\text{s}^{-1}$ ]	6,85	5,18	5,23	5,66
Ph	7,3	7,36	7,38	6,96
the frequency of fading dipole oscillator $\omega_0$ [ $\text{s}^{-1}$ ]	$6,85 \cdot 10^{15}$	$5,18 \cdot 10^{15}$ *	$5,28 \cdot 10^{15}$ *	$5,66 \cdot 10^{15}$

The analysis of the results shows the following (table 1):

1. Water has a low absorption coefficient and high vibration frequency of the Lorentz oscillators, which means that electrons are on high energy levels and do not absorb. The structure is chaotic and unbalanced;
2. Water and sign have 8 times higher absorption coefficient and lower vibration frequency of the Lorentz oscillators, which means that electrons are at low energy levels, it is needed more energy from outside to get them on a higher level and to start secondary emission. The wave length is increased. This means that the structure is in equilibrium and it is balanced;

3. The changes in clay solution are similar to those of water and sign, but in terms of quantity the structure of water and sign is more balanced. The influence of the clay and the sign on the water is identical, but the sign is more powerful.
4. Clay solution compared to the previously accounted influence of the sign on object, decreases the absorption coefficient and increases the vibration frequency of Lorentz oscillators, which means that the structure loses its balance. The explanation is the one-direction action of clay and sign, they start fighting each other when they are together, they decrease the power of the impact of the sign because the spectrum structure of the clay is balanced. Compared to water this object is also more balanced, harmonized and in equilibrium;
5. The analysis of the change of Ph proves the above mentioned conclusions, as the sign and the clay make the object more alkaline, e.g. pore useful.

### **III. Conclusions**

1. The sign or enda has a very significant influence on both products and it also balances and leads to equilibrium the spectrum structure. The degree of influence is different and depends from the structure of the object. The mechanism of influence is a change in vibration frequency in the Lorentz oscillators. The result from the influence fully complies with the description of this symbol. Similar influence is positive not only for the product and its consumer but also for the whole environment.
2. The usage of symbols from the sacred geometry in the design of a sign not only improves the communication with the consumer but also changes his spirituality and harmony, contributes to the transformation of the Earth of a better harmonized place for living. The sign becomes a unique energy print of the company.

3. We need to study and apply the sacred geometry, to further explore the influence of the different geometric real company signs on one and the same object.
4. The results from the experiment prove that the sign can have a significant role in salesmanagement in two aspects:  
through direct communication of the sign and its impact on the optic abilities of the product;  
through added value to the consumer value of the product.

### **Acknowledgment**

This development was funded by Project RD-08-96/06.02.2017 from the Scientific Research Fund in Konstantin Preslavsky University of Shumen.

### **REFERENCES:**

1. Symbology : The use of symbols in visual communications, 4<sup>th</sup> Communications Conference, New York, Editor: Elwood Whitney, 1970
2. M. Stancheva, Logo book Stefan Kanchev, 2012,  
ISBN: 978 954 491 823 1
3. St. Skinner, Sacred Geometry : Deciphering the Code, Sterling Publishing Co., Inc., New York, 2006
4. Al Cooper, World of Logotypes : Trademark Encyclopedia, vol. 1, 1976

### **Trufka Dimitrova**

dept. "Economy and modeling"

Shumen University "Konstantin Preslavsky"

Shumen, Bulgaria

e-mail address: trufkatd@abv.bg





**РЕАЛИЗАЦИЯ МЕЖПРЕДМЕТНЫХ СВЯЗЕЙ В  
ОБУЧЕНИИ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ В  
ПЕДАГОГИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ  
(НА ПРИМЕРЕ ТЕМЫ «ВЫРАЖЕНИЯ И ИХ  
ПРЕОБРАЗОВАНИЯ»)\***

**ВАЛЕНТИНА Г. БЕВЗ, ЛЮДМИЛА Ф. СУХОЙВАНЕНКО**

**IMPLEMENTATION OF INTER-PROMOTIONAL  
RELATIONS IN THE TRAINING OF ELEMENTARY  
MATHEMATICS IN THE PEDAGOGICAL UNIVERSITY  
(ON THE EXAMPLE OF THE THEMES OF  
"EXPRESSION AND THEIR TRANSFORMATION")**

**VALENTINE G. BEVZ, LYUDMILA F. SUKHOYVANENKO**

***ABSTRACT:** The paper reveals the grounds for necessity of introducing interdisciplinary connections into the practice of intending mathematics teachers training. Certain examples of implementing previous, concomitant and perspective interdisciplinary connections of «Elementary Mathematics» with «History of Mathematics», «Methodology of mathematics», «Mathematical Analysis», and «Algebra and the Theory of Numbers» are given.*

***KEYWORDS:** interdisciplinary connections, elementary mathematics, history of mathematics, mathematical analysis, algebra and the theory of numbers, methodology of mathematics, future teachers of mathematics.*

**Введение.** Характерными чертами современного развития науки является углубление взаимосвязанных между собой процессов дифференциации и интеграции научного знания. Интеграция предполагает установление и усиление взаимосвязей

---

\* Эта статья осуществляется с помощью фонда Научных исследований ШУ «Епископа Константина Преславского» – № РД- 08-105/06.02.2017

между науками. Результатом дифференциации является выделение в самостоятельные отрасли науки отдельных теоретических систем. Центральной проблемой интеграции и дифференциации наук является проблема соотношения наук, характеризующаяся единством двух сторон этого процесса: связью и разграничением.

Как особая форма знания, наука возникла и долгое время существовала как единое целое (*μωθημα*), а позже от нее отделились логика, математика, астрономия. Только в XVIII ст. завершился процесс отделения от единого научного знания физики, химии, биологии и др. Но природные связи между этими науками остались навсегда.

Процессы интеграции и дифференциации характерны и для самой математики. Математика сегодня – это наука со сложной структурой и иерархией, в ней существует разделение на отдельные отрасли: алгебра, геометрия, математический анализ, теория вероятностей, математическая статистика, топология и тому подобное. Эта дифференциация нашла свое отражение и в процессе обучения. Здесь она заключается в изучении студентами отдельных научно-познавательных комплексов (учебных дисциплин, каждая из которых в той или иной степени раскрывает предмет, основные задачи, методы, средства и пути развития соответствующей отрасли) линейной алгебры, алгебры и теории чисел, аналитической геометрии, математического анализа, дискретной математики и других. Эти дисциплины вместе с курсами элементарной математики, истории математики и методики обучения математике обеспечивают необходимую математическую подготовку будущих учителей.

Распределение математики на учебные дисциплины оправдывает себя, поскольку позволяет основательно изучить каждую из них и глубоко осмыслить их теоретической основы и приложения, способствует одновременному ознакомлению студентов с важными математическими отраслями и быстрому накоплению новых знаний, навыков и умений. В то же время изучение математики таким образом не обеспечивает создание у студентов общего целостного взгляда на математику.

Различные аспекты проблемы интеграции знаний были и остаются перспективным направлением психолого-педагогических исследований, главное место среди которых занимают исследования, посвященные обобщению и систематизации знаний, реализации внутрипредметных и межпредметных связей в процессе обучения. В условиях быстрого увеличения объемов новых знаний в современном обществе интегрированный подход к подготовке будущих учителей математики призван обеспечить снижение информационной нагрузки на студентов и формирование у них целостной системы знаний.

**Изложение основного материала.** Осуществление межпредметных связей в обучении играет важную роль в повышении практической и научно-теоретической подготовки студентов, существенной особенностью которой является овладение студентами обобщенным характером познавательной деятельности. В процессе обучения в педагогическом университете студенты должны овладеть большим объемом знаний и приобрести опыт, касающийся различных учебных дисциплин. Но не все студенты воспринимают обучение отдельных учебных предметов как единый взаимосвязанный процесс, а потому не всегда могут установить взаимосвязи между полученными знаниями. Именно поэтому для формирования у будущего учителя математики профессиональной и математической компетентности, системного усвоения знаний, умений и навыков целесообразно устанавливать и реализовывать межпредметные связи. Осмысление таких связей сосредоточивает внимание студентов на главном, способствует систематизации и обобщению их знаний, выявлению и устранению пробелов в знаниях и тому подобное.

Различные подходы к определению понятия «межпредметные связи» и определению разных функций межпредметных связей рассмотрены в статье [3].

Использование межпредметных связей на занятиях по предметам математического цикла для будущих учителей математики позволяет повысить мотивацию студентов к

изучению предмета; лучше усвоить материал, повысить качество знаний; активизировать познавательную деятельность студентов на занятиях; облегчить понимание студентами изучаемых явлений и процессов; анализировать, сопоставлять факты из различных областей знаний; осуществлять целостное научное восприятие окружающего мира; наиболее полно реализовать профессионально-образовательные возможности каждого студента.

Одной из фундаментальных учебных дисциплин в подготовке учителя математики в педагогических вузах Украины является «Элементарная математика». Об этом свидетельствуют большое количество часов, которое выделяется на ее изучение, и задачи самой учебной дисциплины. За период своего существования, а это почти столетие, менялись название, содержание, задачи, количество часов, а также велись дискуссии о семестре ее изучения. Элементарная математика – это совокупность разделов, задач и методов математики, не использующих общие понятия переменной, функции, границы, множества. Элементарная математика использует понятия, которые сложились до появления математического анализа. Она охватывает в основном арифметику и так называемую элементарную теорию чисел, элементарную алгебру, элементарную геометрию, тригонометрию.

В предисловии к книге [1] И. А. Гибш пишет: «Элементарная математика представляет собой дисциплину, точные грани которой не могут быть установлены. Но в одном нет сомнения: современная наука включает в область элементарной математики большое количество разделов, которые выходят за пределы школьного курса элементарной математики средней школы. Эти разделы содержат в себе как дополнительный материал, на который опираются другие разделы математики, так и учения, имеющие тесную связь с курсом элементарной математики средней школы, представляя собой научную основу этого курса».

Остановимся подробнее на структуре современного курса элементарной математики в педагогическом университете,

который является важной составляющей в подготовке будущих учителей. Эта учебная дисциплина изучается студентами во всех педагогических университетах, в каждом из которых создаются собственные программы. На основе анализа программ нескольких педагогических университетов (Национальный педагогический университет имени М. П. Драгоманова, Глуховский национальный педагогический университет имени Александра Довженка, Полтавский национальный педагогический университет имени В. Г. Короленка, Уманский государственный педагогический университет имени Павла Тычины) установлено, что в пояснительных записках к программам определен предмет, цели, задачи и междисциплинарные связи курса «Элементарная математика».

*Предметом изучения* учебной дисциплины являются избранные вопросы элементарной математики, изучаемые в школьном курсе математики основной и старшей профильной школы, а именно: основные понятия, факты и соотношения о числах, выражениях, уравнениях, неравенствах, функциях и геометрических объектах.

*Основная цель* учебной дисциплины – повысить общую математическую культуру студентов, научить их решать школьные задачи по математике как на повышенном, так и на углубленном уровнях (уровень факультативных занятий, классов и школ с углубленным изучением математики, конкурсных заданий, олимпиад юных математиков и т. д.).

*Задачи курса:* изучение понятийного аппарата некоторых важных разделов элементарной математики (тригонометрии, арифметики, алгебры, геометрии), содержания и способов доказательства центральных теорем, овладение студентами общими и специальными методами решения основных типов школьных математических задач.

*Междисциплинарные связи.* Изучение курса «Элементарная математика» тесно связано с учебными дисциплинами «Высшая алгебра», «Аналитическая геометрия», «Математический анализ», «Научные основы школьного курса математики», «Методика математики», «История математики», а также с

математическими дисциплинами «Школьного курса математики».

Учебный курс «Элементарная математика» состоит из следующих содержательных модулей:

1. *Числовые множества.* Неотъемлемые целые числа, арифметические действия и свойства. Рациональные числа, арифметические действия и свойства. Действительные числа, действия над действительными числами.

2. *Выражения и их преобразования.* Рациональные выражения, тождественные преобразования рациональных выражений. Иррациональные выражения и их преобразования. Трансцендентные выражения, тождественные преобразования трансцендентных выражений.

3. *Функции и их графики.* Функции в школьном курсе математики, их свойства и графики. Построение графиков элементарных функций методом геометрических преобразований.

4. *Уравнения и неравенства.* Общие сведения о уравнениях. Способы решения алгебраических уравнений и систем уравнений. Общие сведения о неравенстве. Способы решения алгебраических неравенств. Методы доказательства неравенств.

5. *Геометрические фигуры и величины.* Методы и способы решения планиметрических задач на вычисление и доказательство. Методы и способы решения планиметрических задач на построение. Координатный и векторный методы решения задач в курсе планиметрии.

Анализ учебных программ дисциплин, включенных в планы подготовки будущих учителей математики, дает возможность установить тесные связи курса «Элементарная математика» с курсом «История математики» и отразить их в учебном процессе при изучении каждого из определенных модулей. Межпредметные связи «Элементарной математики» и «Истории математики» являются *содержательно-информационными, перспективными и двусторонними (возобновляемыми)* связями, поскольку историю математики студенты начинают изучать позже, чем элементарную

математику, а в курсе «Истории математики» рассматривается отдельный период «Математика постоянных величин», который касается формирования и развития элементарной математики.

Установление и реализация межпредметных связей элементарной математики и истории математики дает возможность студентам осознать гуманитарный потенциал математических дисциплин и эффективно реализовать его в педагогической деятельности, а также предоставляет будущим учителям историко-математические знания, необходимые им для правильного разрешения методологических и методических вопросов, возникающих в процессе обучения математике в школе.

Рассматриваемые межпредметные связи в обучении будущих учителей математики выполняют ряд важных функций:

1) образовательную (формируются системность, глубина, осознанность знаний, раскрывается роль и место конкретных математических знаний в системе наук и в практической деятельности людей);

2) воспитательную (воспитание личности через формирование общей культуры и грамотности, возбуждение интереса к предмету и влечения к научному творчеству, понимание места и роли предметных знаний, осознание необходимости овладения новыми знаниями);

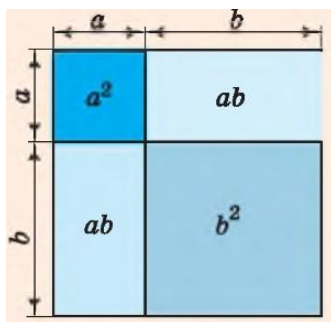
3) развивающую (развитие системного и творческого мышления студентов, формирование их познавательной активности, самостоятельности и интереса к познанию нового, создание условий для понимания логики построения научных теорий).

Осуществление межпредметных связей на практике вызывает немало трудностей: как организовать познавательную деятельность студентов, чтобы они хотели устанавливать связи между различными учебными предметами и умели их использовать, как вызвать познавательный интерес будущих учителей к мировоззренческим вопросам науки; каким образом объединить усилия преподавателей различных предметов в достижении воспитательного эффекта обучения? Часто

преподаватели считают, что реализация межпредметных связей с историей математики через использование исторического материала потребует существенного увеличения количества часов на изучение учебного курса. По нашему мнению, существуют возможности освещения исторических аспектов вопросов, изучаемых в курсе элементарной математики, без лишней траты времени. Приведем несколько примеров, касающихся содержательного модуля «Выражения и их преобразования». При изучении этого модуля в курсе элементарной математики рассматриваются следующие темы:

- Тожественные преобразования целых выражений;
- Бином Ньютона. Свойства биномиальных коэффициентов;
- Теорема Безу. Деление многочленов;
- Круговая перестановка. Метод неопределенных коэффициентов;
- Разложение многочленов на множители;
- Упрощение дробных выражений. Производные пропорции;
- Действия над степенями с рациональным показателем. Преобразование иррациональных выражений;
- Степень с действительным показателем. Действия над степенями. Логарифм числа;
- Тожественные преобразования показательных и логарифмических выражений;
- Тригонометрические выражения. Основные тригонометрические тождества. Тожественные преобразования тригонометрических выражений.





**Рис.1**

Первая тема «Тожественные преобразования целых выражений» хорошо знакома студентам. Кроме истории математики здесь естественным образом реализуются предыдущие связи со школьным курсом математики и перспективные связи с методикой обучения математике. Почти все школьные учебники алгебры для 7 класса в теме «Формулы сокращенного умножения» содержат рисунки, похожие на рисунок 1. Это геометрическая интерпретация квадрата двучлена. Именно геометрическим способом доказывалась формула квадрата двучлена в «Началах» Евклида. Такое доказательство является наглядным и понятным для учащихся. А в учителей создаются возможности для развития критического мышления учащихся, если обсудить с ними алгебраический и геометрический способ доказательства формул сокращенного умножения.

Актуальным для дальнейшего изучения методики обучения математике является рассмотрение задач повышенной сложности из действующих учебников математики, в частности исторических задач.

Рассматривая вторую тему – «Бином Ньютона. Свойства биномиальных коэффициентов» в контексте преобразования целых выражений студентам целесообразно сообщить, что правило нахождения биномиальных коэффициентов в разложении  $(a + b)^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  знали и использовали Математики

Древнего Востока. Б. Паскаль показал, как записать выражение любой степени бинома с натуральным показателем с помощью специально построенного числового треугольника (треугольник Паскаля). Основная заслуга Ньютона состояла в том, что он распространил формулу бинома на случай произвольного действительного  $n$ . В случае дробных и отрицательных показателей количество членов разложения бинома всегда бесконечна, то есть сводится к бесконечным рядам. Распространение формулы разложения бинома на действительные показатели имело большое значение для дальнейшего развития математики. Именно поэтому формулу разложения  $(a + b)^n$  и для натурального  $n$  называют бином Ньютона.

Такое сообщение создает условия для установления внутренне предметных связей в курсе элементарной математики (целые выражения и выражения, содержащие степени с действительным показателем) и межпредметных связей элементарной математики с математическим анализом (теория бесконечных рядов, ряд Тейлора).

Реализовать внутренне предметные связи в курсе элементарной математики (делимость чисел и разложение многочленов на множители) и межпредметные связи с историей математики можно при изучении темы «Разложение многочленов на множители».

Студентам на занятии предлагается самостоятельно разложить на множители выражение  $a^4 + 4$ . После того, как студенты выполняют (или не выполняют) поставленную задачу целесообразно предложить им рассмотреть схожую задачу известного французского математика и философа Софи Жермен (1776 – 1831).

*Задача.* Доказать, что каждое число вида  $a^4 + 4$  является составным ( $a > 1$ ).

*Решение.* Преобразуем выражение  $a^4 + 4$ . Имеем:

$$a^4 + 4 = a^4 + 4a^2 + 4 - 4a^2 = (a^2 + 2)^2 - (2a)^2 = (a^2 + 2 + 2a)(a^2 + 2 - 2a).$$

Здесь  $a^2 + 2 + 2a \neq 1$ ,  $a^2 + 2 - 2a = (a - 1)^2 + 1 \neq 1$ . Поэтому,  $a^4 + 4$  имеет два различных делителя, отличных от самого числа и единицы. Значит, это число составное.

Решение исторических задач в курсе элементарной математики стимулирует повышение интереса студентов к изучению предмета, расширяет научное мировоззрение и поднимает общий уровень культуры. С помощью исторических задач можно не только оживить занятия и создать условия для более основательного и сознательного усвоения математических понятий студентами, но и сформировать у них представление об элементарной математике как науке, которая развивается.

Последняя тема этого модуля посвящена тригонометрии. Предлагается рассмотреть вопрос: синус, косинус, тангенс и котангенс действительного числа; основные тригонометрические тождества; понятие арксинуса, арккосинуса, арктангенса и арккотангенса действительного числа; основные тождества; способы преобразования тригонометрических выражений. Этот материал, за исключением, возможно, обратных тригонометрических функций, хорошо знакомый студентам еще со школы. Чтобы повысить внимание и интерес к его рассмотрению, студентов можно привлечь к обсуждению следующих вопросов:

- Что называется синусом действительного числа?
- Как изменится определение, если рассматривать круг произвольного радиуса?
- Почему при рассмотрении единичного круга не нарушается всеобщность?
- Кто впервые предложил рассматривать круг единичного радиуса?

Понятно, что студенты смогут ответить на первые три вопроса. На последний – ответ дает преподаватель. Он может быть и значительно шире.

Тригонометрия возникла в глубокой древности как вспомогательный раздел астрономии. Древние историки приписывали создание тригонометрии "отцу греческой астрономии" Гиппарху (II в. до н. э.). Полное изложение

древнегреческой тригонометрии сделано в "Альмагесте" Птолемея. Там выведены основные тригонометрические соотношения, но формулировались они с помощью понятия хорды: вместо линии синусов рассматривали хорду соответствующего центрального угла. Птолемей делил круг на 360 частей, диаметр – на 120, радиус – на 60, а каждую образовавшуюся часть – еще на 60 и т. д. Это придавало ему возможность находить хорды, пользуясь шестидесятеричной системой счисления.

Хорды заменили синусами в Индии. Там также ввели понятие косинуса и синус-верзуса ( $1 - \cos\alpha$ ). Тригонометрия как наука оформилась в трудах математиков Ближнего и Среднего Востока (IX – XII в.). Важное значение для развития тригонометрии мало новшество, введенное Абу Райхан Беруни: он заменил радиус круга, брался как и в Птолемея, в 60 частей, на единицу. Объяснение этому он дал в третьей книге «Канона Мас'уда»: «Мы предпочитаем для числа диаметра такое, чтобы оно было из двух частей, то есть единиц, чтобы половина диаметра, которая называется крупнейшим синусом, а иногда - полным синусом, была единицей. Тогда в наших действиях отпадает необходимость вспоминать умножения на него и деления на него, а также превращение его в минуты или понижение в разряд, как это все было бы необходимым, если бы он имел 60 частей» [4, с. 81].

По нашему мнению, эти сведения пригодятся студентам как для усвоения элементарной математики, так и для изучения позже методики обучения математике и истории математики. А в целом такая интеграция знаний будет способствовать повышению качества подготовки будущего учителя математики и осознанном использовании исторических сведений в процессе будущей педагогической деятельности.

Рассмотрим темы по элементарной математике, на которых целесообразно реализовать межпредметные связи с алгеброй и теорией чисел. Эту дисциплину студенты изучают раньше, чем элементарную математику, поэтому можем говорить о *предыдущих* и *двусторонних (возобновляемых)* связях. Поскольку

содержание теоремы и способы ее использования к делению многочленов не меняются, то установленные связи характеризуются как *содержательно-информационные и операционно-деятельностные*.

Рассмотрим, как мы реализовали межпредметные связи при изучении темы «Теорема Безу. Деление многочленов». На это практическое занятие студенты получили (кроме задач по предыдущей теме) домашнее задание, что касалось повторения опорных сведений с новой темы и решения задач такого вида:

1. Разделить многочлены:

а)  $x^4 + 2x^3 - 5x + 6$  на  $x - 1$ ;

б)  $2x^5 - 5x^3 + 8x^2 + 1$  на  $x + 3$ .

2. Выполнить деления двучленов  $a^n \pm b^n$  на  $a \pm b$ , пользуясь последствиями теоремы Безу:

а)  $8x^3 - 27$  на  $2x - 3$ ; б)  $3\frac{3}{8} - 8a^{12}$  на  $1,5 - 2a^4$ .

Проверка подготовки теоретического материала на практическом занятии осуществлялась с помощью интерактивной технологии «Закончи предложение». Первые вопросы формулирует преподаватель, а затем студенты сами определяют вопрос сокурсникам. Представим несколько вопросов, сформулированных студентами:

1. Выражение, которое не содержит деления на выражение с переменной, называется ... (*целью*).

2. Записать на доске формулу биннома Ньютона:

$$((x + a)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} a + C_n^2 x^{n-2} a^2 + \dots + C_n^{n-1} x a^{n-1} + C_n^n a^n).$$

3. По теореме Безу «остаток при делении многочлена  $P(x)$  на многочлен  $x - a$  равен ... (*значению этого многочлена при  $x = a$ , то есть  $P(a)$* )».

4. Примером простого алгоритма деления многочлена на бином  $x - a$  есть ... (*схема Горнера*).

Проверка выполнения студентами практической части домашнего задания показала, что задачи не вызвали у студентов существенных трудностей. Многие студенты выполнили первое задание непосредственным делением «в столбик», объяснив это

тем, что этот метод им хорошо знаком со школы. То есть в явном виде на этом занятии были реализованы связи не только с алгеброй и теорией чисел, но и со школьным курсом математики.

На этом занятии и были также реализованы межпредметные связи методики обучения математике: для решения на пару предлагались задачи повышенной сложности со школьных учебников и олимпиадные задачи.

Во время практического занятия по теме: «Круговая перестановка. Метод неопределенных коэффициентов» необходимо обратить внимание студентов на то, что схему расписания дроби на элементарные дроби студенты основательно изучали в курсе АТЧ и знакомились в математическом анализе (интегрирование рациональных функций), в частности, в учебном пособии [2], поэтому в целях актуализации знаний по данной теме и реализации предыдущих МПЗ целесообразно рассмотреть задачи:

*Заменить подынтегральное выражение суммой рациональных дробей с неопределенными коэффициентами и используя метод неопределенных коэффициентов найти неизвестные числа:*

$$\text{а) } \int \frac{x^2+1}{x^3-x^2} dx; \text{ б) } \int \frac{(x^3+1)dx}{x^3-5x^2+6x}; \text{ в) } \int \frac{x^3+x-1}{x^4+4x^2+4} dx; \text{ г) } \int \frac{x^4-3x^2-3x-2}{x^3-x^2-2x} dx.$$

Во время практического занятия также необходимо рассмотреть задачи из сборников задач по элементарной математике на применение метода «неопределенных коэффициентов», например:

1) Найти  $A, B, C$ , при которых справедливо тождество

$$\frac{x^2+5}{x^3-3x-2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2};$$

2) Найти  $A, B, C$ , чтобы для всех допустимых значений  $x$  имело место равенство

$$\frac{x^2+5}{x^3-3x+2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-1}.$$

Раскладывая рациональные дроби на элементарные дроби задача сводится к решению системы уравнений, способы

решения которых рассматривались в курсе линейной алгебры (метод Гаусса, формулы Крамера, метод обратной матрицы), поэтому студенты могут самостоятельно выбрать способ решения системы. Кроме того, следует обратить внимание, что метод сложения является заключительным этапом метода Гаусса.

При решении указанных задач происходит систематизация знаний о делении многочлена на многочлен (*МПС ЭМ и АТЧ*), представление рациональной дроби в виде суммы элементарных дробей (*МПС ЭМ и Мат. анализ*), решения систем уравнений (*МПС ЭМ и линейная алгебра*).

Метод неопределенных коэффициентов применяется не только в курсе математического анализа при интеграции рациональных дробей, а также в комплексном анализе (ряд Лорана), дифференциальных уравнениях (частные решения ЛНДУ).

Итак, при использовании метода «неопределенных коэффициентов» в учебной дисциплине «Элементарная математика» происходит реализация *предыдущих* и *восстановительных* межпредметных связей элементарной математики с алгеброй и теорией чисел и математическим анализом и *сопутствующих* межпредметных связей с комплексным анализом и дифференциальными уравнениями. В учебных дисциплинах также имеются связи в содержании фактического материала, а, следовательно, идет речь о реализации *содержательно-информационных межпредметных связей*.

Определение и реализация предыдущих, восстановительных, содержательно-информационных, межпредметных связей «Элементарной математики» с «Математическим анализом» и «АТЧ» обеспечивает воспроизведение в памяти знакомого материала из смежных дисциплин, обобщению предварительно изученного учебного материала, применению уже отработанных практических навыков, повышению уровня умственного развития студентов, формированию интегрированного мышления студентов, навыков и умений межпредметного характера, что в свою очередь

способствует повышению профессиональной компетентности будущих учителей математики.

**Выводы.** Таким образом, совершенствование методической системы преподавания учебной дисциплины «Элементарная математика» при использовании межпредметных связей со смежными учебными дисциплинами является необходимым условием повышения профессиональной компетентности будущих учителей математики. Поскольку безошибочное основательное усвоение учебного материала на предыдущем этапе обучения будет способствовать осмысленному изучению нового материала и повысит методическую подготовку будущего учителя математики, то необходимо усилить психологическую и теоретическую подготовку учителей для комплексного использования межпредметных связей.

#### **ЛИТЕРАТУРА:**

1. Гибш И. А. Элементарная математика: пособие для высших пед. учеб. заведений. / М.: Учпедгиз, 1936. 264 с.
2. Зализко В. Д., Заика Е. В., Кугай Н. В. Учебное пособие по математическому анализу / Киев Национальный педагогический университет имени М. П. Драгоманова, 2011. 325 с.
3. Кугай Н. В., Сухойваненко Л. Ф. Методологические знания и межпредметные связи. BUDAPEST. – Science and Education a New Dimension. Pedagogy and Psychology, II (16) Issue: 33, 2014 www / seanewdim.com. С. 54-58.
4. Сираждинов С. Х., Матвиевская Г. П. Абу Райхан Беруни и его математические труды: пособие для учащихся./ М.: Просвещение, 1978. 98 с.

#### **Валентина Г. Бевз**

НПУ “М. П. Драгоманов”, гр. Киев, Украина  
E-mail: bevezvalya@gmail.com

#### **Людмила Ф. Сухойваненко**

НПУ “М. П. Драгоманов”, гр. Киев, Украина, докторант  
E-mail: lyuda.sukhoivanenko@gmail.com



## **ПРОЕКТНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ: СОВРЕМЕННЫЕ ТЕНДЕНЦИИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ В ПРОЦЕССЕ ИЗУЧЕНИЯ АЛГЕБРЫ В ОСНОВНОЙ ШКОЛЕ\***

**СВЕТЛАНА М. ЛУКЬЯНОВА, СВЕТЛАНА Н. МОВЧАН**

## **PROJECT TECHNOLOGIES: MODERN TENDENCIES OF USE IN THE PROCESS OF STUDYING ALGEBRA IN THE MAIN SCHOOL**

**SVETLANA M. LUKYANOVA, SVETLANA N. MOVCHAN.**

***ABSTRACT:** In a scientific paper describes the feasibility of design technology in modern education to achieve its main objectives, as the reform of modern education provides a number of significant changes. Project technologies of training have the educational opportunities that allow the students to form the ability to freely adapt to unstable living conditions, affect these conditions in order to achieve personal success and social progress.*

***KEYWORDS:** project, project technology, the goal of education.*

Изменение принципа «сначала знания, а затем их применение» на принцип «использование знаний в процессе их получения» является одной из ведущих тенденций современного образовательного процесса. А создание условий, в которых каждый ученик может применить свои способности, реализовать свой творческий потенциал, является актуальной проблемой современного школьного образования. Моделирование современного урока должно обеспечивать оптимальные условия формирования опыта практического применения приобретенных знаний и реализации процесса сотворчества учителя и учеников, обусловленной их совместной деятельностью. В связи с этим

---

\* Эта статья осуществляется с помощью фонда Научных исследований ШУ «Епископа Константина Преславского» – № РД- 08-105/06.02.2017

актуальной сейчас является *потребность в реформировании организации учебного процесса изучения математики в современной школе и профессиональной подготовки будущих учителей математики* в педагогических университетах.

Это соответствующим образом требует и изменений в целях современного образования. Конечно, традиционных образовательных целей никто не должен отменять – учить, воспитывать, развивать гармонично и всесторонне необходимо. Тем не менее, сегодня более важной для каждого человека во время обучения на любом уровне должна стать возможность реализовать себя, удовлетворить свои запросы, приобрести такие знания и умения, которые отвечают его целям, интересам и жизненным планам. Это делает человека уверенным в себе, решительным, дальновидным, что является немаловажными и востребованными характеристиками личности каждого члена современного общества.

Поэтому к перечню целей современного образования нужно добавить: 1) формирование способности человека самостоятельно и независимо учиться на протяжении жизни; 2) формирование способности самостоятельно принимать решения, планировать свою деятельность, нести ответственность за результаты этой деятельности; 3) формирование способности быть уверенным в себе во время решения жизненных проблем; 4) формирование убежденности в ценности мирного сосуществования; 5) формирование осведомленности в особенностях предпринимательской деятельности; 6) формирование осведомленности и способности применять востребованные обществом технологии [3, 4].

Исходя из выше сказанного, одним из основных заданий современного школьного образования есть своевременное формирование у учеников способности применять приобретенные знания и оперативно организовывать получение новых знаний. Обеспечить выполнение этой образовательной задачи в условиях традиционного обучения довольно сложно. Одним из перспективных путей развития и перестройки современного образовательного процесса является внедрение

инновационных технологий и методов, которые позволяют создать условия для становления личности, готовой к самореализации.

Анализируя современное развитие педагогических технологий, можно выделить определенные тенденции их трансформации к реалиям современного общества:

1) поворот от предоставления знаний и их запоминание к самостоятельному поиску и кооперации усилий;

2) значительное увеличение активности учащихся;

3) замена контроля знаний, основанного на тестировании, наблюдением и оценыванием промежуточных результатов работы над проектом;

4) обучение, основанное на соревновании, заменяется кооперацией, сотрудничеством;

5) поворот от овладения всеми учащимися одним и тем же материалом до овладения учащимися различным материалом;

6) поворот от вербального мышления к интеграции визуального и вербального мышления.

Таким образом, методы обучения приобретают характер открытых образовательных технологий в силу субъектности позиции учащегося (ученика, студента), нацеленности на получение индивидуальных образовательных результатов, рефлексивность, коммуникативность, интерактивность. Важным является и то, что «прописаны этапы движения к цели, но сама цель, выбор конкретного содержания и приёмов внутри этих этапов зависят от субъекта деятельности».

Особого внимания среди них заслуживает *проектная технология обучения*, которая под влиянием современной тенденции технологизации педагогической науки получила развитие из метода проектов. Основателями проектного обучения принято считать американского философа и учёного Дж. Дьюи и его ученика В.Килпатрика. В России зарождение метода проектов связывают с деятельностью С.Т.Шацких, Н.К.Крупской, А.С.Макаренка, П. П.Блонского.

Анализ научно-методической литературы и многочисленных публикаций в периодических изданиях

свидетельствует о том, что вопрос организации обучения с применением проектных технологий рассматривается в работах многих отечественных и зарубежных ученых и педагогов.

Так, например, С. Генкал определяет педагогические условия, которые обеспечивают эффективность применения индивидуальных образовательных проектов с целью формирования самостоятельной познавательной деятельности учеников; Н. Полихун, С. Петровский акцентируют внимание на целесообразности применения проектных технологий в изучении предметов естественно-математического цикла; Н. Гордеева обосновывает важность применения проектных технологий для формирования жизненных компетентностей; интересными и познавательными есть исследования Т. Хоменко, в которых сделаны выводы относительно родственности концепции личностно-ориентированного обучения в педагогике Украины и концепции «проектно-ориентированного» обучения в школах Германии.

В основу метода проектов положена идея о направленности учебно-познавательной деятельности ученика на результат, который достигается путем решения той или иной практически или теоретически значимой для ученика проблемы. Внешний результат можно будет увидеть, осознать, применить на практике. Внутренний результат – опыт деятельности – станет тем достоянием ребенка, что соединит знания и умения, компетенции и ценности, обогатит духовный мир ученика [2,5].

Как известно, компетентности ученика являются основными качественными показателями результата его обучения в школе [1]. Анализ сути компетентностного подхода и ведущих идей по применению проектных технологий во время обучения учащихся основной школы математики, позволяет сделать вывод об их общих ориентирах, а именно:

- не столько передавать ученикам определенный объем знаний, сколько научить их применять эти знания к решению практических (прикладных) задач;

- развивать в учениках коммуникативные навыки, умение работать с разными людьми, умение прислушиваться к мнению

других участников учебно-воспитательного процесса, умение убеждать в дискуссии, выполнять различные социальные роли, преодолевать конфликты;

- развивать умение собирать необходимую информацию, выдвигать гипотезы, пользоваться исследовательскими методами, делать самоанализ и др.

Традиционные методы обучения не позволяют в полной мере эффективно решить педагогическую проблему формирования жизненных компетенций учащихся, которая является одной из приоритетных в национальной образовательной политике[4]. В противоположность им учебное проектирование направлено не только на возбуждение потребности в развитии аналитических, исследовательских, коммуникативных, организационных, рефлексивных умений и навыков, но и обязательно предполагает их системное применение, целенаправленно проверяет степень их надежности и эффективности приобретенных учащимися знаний, умений и навыков. Следовательно, применение в школьной практике проектных технологий для формирования ключевых и специально-предметных компетенций учащихся при обучении алгебре целесообразно.

Так же, как показывает практика, использование учебных проектов различных видов способствует должному уровню реализации внутрипредметных и межпредметных связей курса алгебры. Это в свою очередь позволяет обеспечить целостность учебного курса алгебры и действенно решить проблему усиления его прикладной направленности.

Применение проектных технологий во время обучения алгебре учащихся основной школы полезно еще и из соображений психологического и социального становления подростка, так как именно в подростковом возрасте ведущая деятельность учащихся осуществляется в плоскости их социальных взаимоотношений с другими людьми. Это, безусловно, способствует формированию сознания подростка: он сознательно выбирает тот или иной вид деятельности, определяет свое функциональное задачи в ней, приобретает умения и навыки

сотрудничества, необходимые для жизни в современном обществе.

Следует отметить, что выбор типа проекта[2,6] зависит как от конкретной учебной темы, так и от возрастных особенностей и учебных возможностей учащихся, задействованных в выполнении проекта. Так для учащихся 7-8 классов характерны недостаточный объем знаний по математике, заниженная оценка собственных возможностей, неумение оперативно искать необходимую информацию, резкая критика постановки задач и целей, отказ от помощи, заметная зависимость от консолидации группы. Дети этой возрастной категории отдадут предпочтение краткосрочным персональным или средней продолжительности групповым проектам. Эти проекты имеют преимущественно информационно-поисковый или практико-ориентированный характер.

Ученики 9 класса имеют больший объем знаний по математике, стремятся к максимальной экономии времени и сил на выполнение проекта, имеют достаточную волевую подготовленность. В связи с этим для них посильной является работа над долгосрочными исследовательскими, межпредметными проектами (например, использование математического аппарата для решения прикладных задач физического, химического, экономического и т.д. содержания).

Проведенное анкетирование среди учителей, которые используют в своей работе проектные технологии, показало, что они отдадут предпочтение именно проведению межпредметных или практико-ориентированным проектам. Основными аргументами для выбора этих типов проектов, по их мнению, есть, *во-первых*, очевидность цели проекта для учащихся: показать связь математики с практической деятельностью человека в различных сферах жизни общества; а, *во-вторых*, благодаря наличию сборников прикладных задач для учеников разных классов, у учителя подготовка технологической карты проекта занимает не продолжительное время, *в-третьих*, подготовка и проведение презентаций результатов этих проектов

происходит во внеурочное время, что даёт возможность не столь жестко регламентировать ход проекта.

Заметим, что во многих странах межпредметные проекты используют для ознакомления учеников с основами предпринимательской деятельности. Например, в школах Англии культура предпринимательства прививается еще с детства. Ученики познают азы предпринимательской деятельности, работая на мини-предприятиях, школьных фирмах. 80% школ Англии имеют свои мини-предприятия, в Польше действует около 11 тысяч ученических кооперативов, в Венгрии функционируют 170 школьных сберегательных касс. Ученики разрабатывают и выполняют проекты на уроках, учитывая потребности людей, организуют мини-предприятия по производству и продаже товаров и услуг, получают непосредственный опыт на предприятиях. Таким образом, осуществляется социально-экономическое образование учеников, к которому современный рынок предъявляет повышенные требования [7,8].

Исходя из результатов проведённого исследования, можно утверждать, что следует уделять должное внимание и проектам, которые непосредственно связаны с изучением программного материала. Такие проекты помогают раскрытию внутрипредметных связей, что положительно сказывается на усилении дидактического совершенствования курса алгебры и способствует формированию у учащихся четкого логического взаимно подчинения разных алгебраических понятий, теорем, правил, способов решения задач.

Во время подготовки такого проекта учителю нужно разработать эффективную модель управления и организации учебно-познавательной деятельности учащихся по изучению конкретной темы с учетом того, что ученик не должен исполнять только роль объекта управления и научения, а должен быть субъектом сообучения. Немаловажным есть и распределение сложного учебного процесса на отдельные этапы с оптимальным определением взаимодействий учителя и учеников для достижения сформулированных целей. Так же учитель должен

организовать систему непрерывного контроля деятельности учащихся, поскольку в результате проведения проекта необходимо обеспечить формирование знаний, умений и практических навыков на уровне плановых (заданных в программе) результатов. Очевидно, что выполнение выше определённых задач от учителя требует значительно больше времени и профессиональных умений.

Для большей наглядности поэтапного распределения изучения конкретной темы в ходе проведения проекта целесообразно использовать технологические схемы. Приведём пример такой схемы отдельного модуля «Метод интервалов как универсальный метод решения неравенств» в рамках учебного проекта «Функция: от свойств к применению».



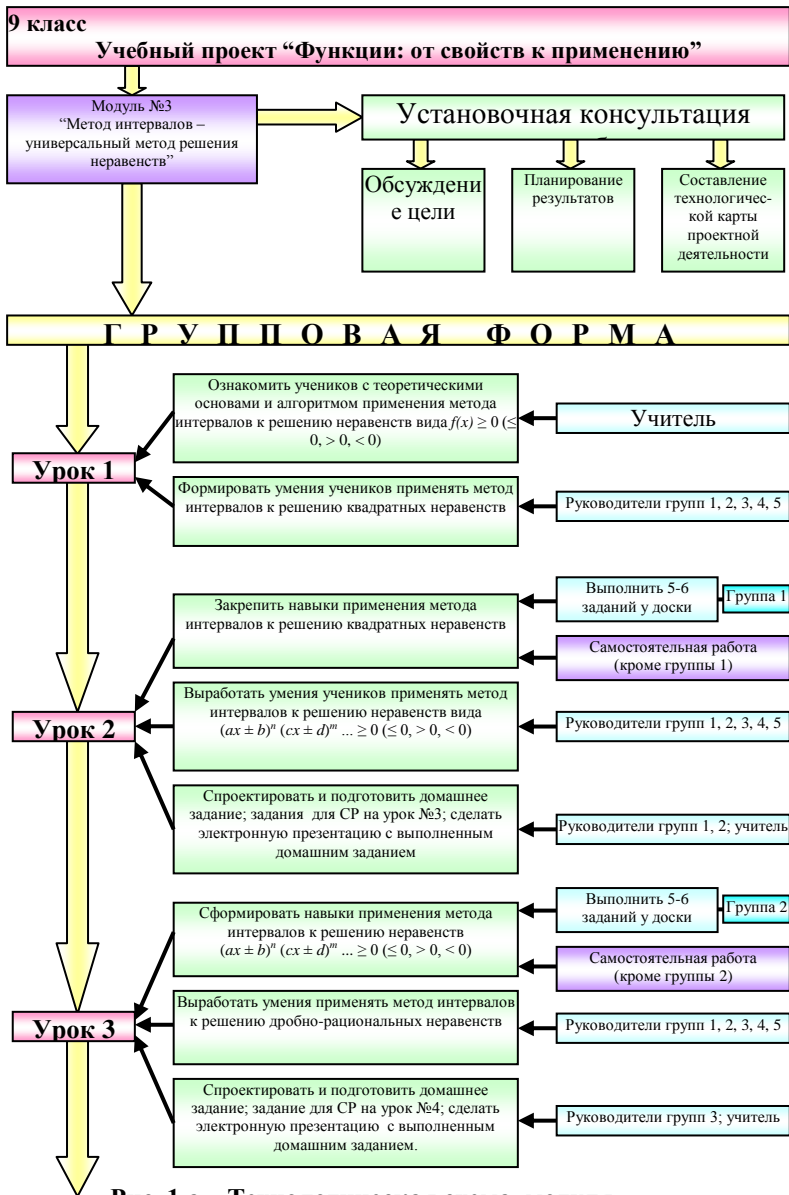


Рис. 1.а – Технологическая схема модуля.

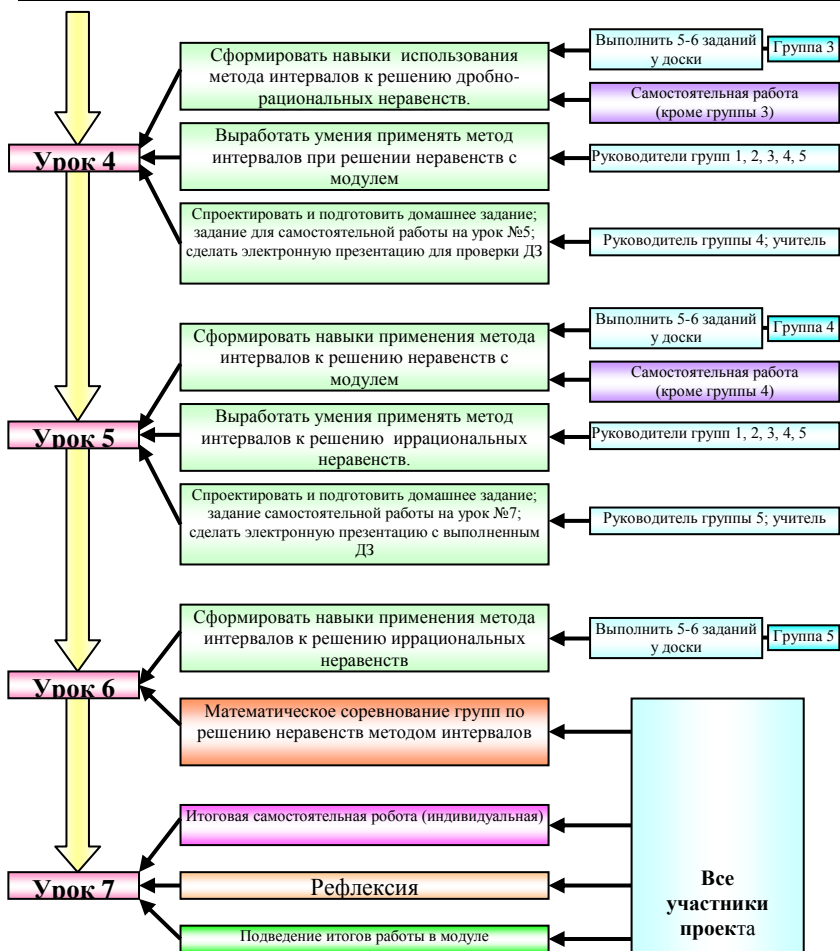


Рис. 1.6 – (Продолжение рис.1.а) Технологическая схема модуля.

*Выводы.* Суть и идея проектной технологии обучения – организация самостоятельной поисковой творческой деятельности учеников. Активизация обучаемого в учебном процессе и максимальное приближение его к жизни – основные ее задачи. Использование на уроках алгебры в основной школе метода проектов способствует формированию у учащихся познавательного интереса к изучению математики, развивает

самостоятельность в получении знаний, умение работать в команде, анализировать, формулировать и проверять гипотезы, отстаивать своё мнение в дискуссиях.

Умение применять в профессиональной деятельности метод проектов – показатель высокой квалификации учителя, его прогрессивной методики обучения и развития учащихся. Недаром проектная технология относится к технологиям XXI века, которые предусматривают, прежде всего, формирование и развитие умение человека адаптироваться к стремительно меняющимся условиям жизни [2]. Учитель математики, использующий метод проектов, осуществляет математическую социализацию личности ученика – умение видеть и применять математику в повседневной жизни.

Организация проектной деятельности учащихся требует немалых усилий от современного учителя математики: умение гармонично сочетать традиционные и проектные технологии обучения математике, обеспечивая развитие ученика в контексте креативного образования. Учитель должен дать возможность каждому ученику проявить самостоятельность в творчестве, дифференцировать объем работы, исходя из индивидуальных возможностей каждого члена проектной группы, наблюдать, советовать, предоставлять индивидуальные консультации.

#### **ЛИТЕРАТУРА:**

1. Про затвердження Державного стандарту базової і повної загальної середньої освіти. Постанова Кабінету Міністрів України від 23.11.2011 №1392 (із змінами, внесеними згідно з Постановою КМ №538 від 07.08.2013) [Електронний ресурс] // Режим доступу: <http://zakon4.rada.gov.ua/laws/show/1392-2011-п>.
2. Жизненная компетентность личности: от теории до практики: Научно-методическое пособие / Под ред. Ермакова И.Г. – Запорожье: Центрион, 2005. – 640 с.
3. Лук'янова С.М. Проектно-дослідницька робота учнів – друге народження // Математика в сучасній школі. – №1 (136) – 2013. – С. 10-17.
4. Лукьянова С.М., Мовчан С.Н. Проектные технологии обучения как средство достижения основных целей современного образования //

- Science and Education a New Dimension. Pedagogy and Psychology, IV (39), Issue: 79, 2016, p.42-46.
5. Лук'янова С.М., Мовчан С.М. Формування ключових і спеціально-предметних компетентностей учнів основної школи під час навчання алгебри із застосуванням проектних технологій // Педагогічні науки: теорія, історія інноваційні технології: наук журнал – Суми: Вид-во СумДПУ імені А.С.Макаренка, 2016. – № 2(56).
  6. Мовчан С.М. Проектні технології у навчанні алгебри учнів основної школи // Математика в рідній школі, № 7–8, 2015, С. 55-59.
  7. Хоменко Т.А. Тенденции развития форм обучения в средней школе Германии во второй половине XX века [Текст]: Автореф. дисс... канд. наук, Харьков, 2005. – 20 с.
  8. Шишов С.Э., Калней В.А. и др. Метод проектов в подготовке к предпринимательской деятельности // Мониторинг образовательного процесса, №6, 2004. – С. 16-21.

**Светлана М. Лукьянова**

НПУ „М. П. Драгоманов“, гр. Киев, Украина, доцент

E-mail: Luksvetlana@ukr.net

**Светлана Н. Мовчан**

гр. Киев, лицей „В.М. Молчанов“ №38, учитель по математика и докторант в НПУ „М. П. Драгоманов“

E-mail: sveta108@ukr.net

## ОБ ОДНОМ ИЗ ПОДХОДОВ ФОРМИРОВАНИЯ ПОНЯТИЯ ПЛОСКОГО ТЕЛА И ЕГО ПЛОЩАДИ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ ПЛАНИМЕТРИИ\*

ТАТЬЯНА А. СНИГУР

## ABOUT ONE OF THE APPROACHES OF FORMING THE CONCEPT OF A FLAT BODY AND ITS AREA IN A SCHOOL COURSE OF PLANIMETRY

TETIANA A. SNIHUR

**ABSTRACT:** *The article proposes one of the approaches to the interpretation of the concept of "flat geometric body". This article also considers methodical recommendations of the formation of the concept of area of flat geometrical body as function on the plural of flat bodies.*

**KEYWORDS:** *geometrical figure, a flat geometric body, square of the flat geometric body, classification of points of a figure.*

**Введение.** Согласно Государственного стандарта базового и полного общего среднего образования в школьном курсе планиметрии выделены две основные содержательные линии: 1) геометрические фигуры и их свойства; 2) геометрические величины, их измерения и вычисления [4].

В курсе математики 5–6-х классов изучаются такие геометрические фигуры как точка, отрезок, луч, прямая, угол, треугольник, прямоугольник, квадрат, окружность, круг и их простейшие свойства; из геометрических величин рассматривают длину отрезка, градусную меру угла, площадь прямоугольника, объем прямоугольного параллелепипеда и единицы их измерения.

---

\* Эта статья осуществляется с помощью фонда Научных исследований ШУ «Епископа Константина Преславского» – № РД- 08-105/06.02.2017

В курсе планиметрии 7–9-х классов основными объектами изучения на плоскости являются точка, прямая, отрезок, луч, угол, треугольник, четырехугольник, многоугольник, окружность, круг. Углубляются и систематизируются сведения о геометрических величинах. В 8 классе вводится одно из важных понятий – понятие площади. Вывод формул для вычисления площадей планиметрических фигур (прямоугольника, параллелограмма, треугольника, ромба, трапеции, правильных многоугольников) опирается на основные свойства площадей [11].

В 8 классе при изучении темы «Многоугольники. Площади многоугольников» уточняется, что такое свойство, как площадь, свойственно не всем геометрическим фигурам. В частности, в программе по математике указано, что ученик должен уметь объяснить, что такое плоский многоугольник. Хотя в учебниках по геометрии понятие плоского многоугольника четко не определяется.

Попытки дать определение понятия плоского многоугольника можно найти в учебниках по геометрии:

- для 8 класса, авторы Бевз Г. П., Бевз В. Г., Владимирова Н. Г.: «Он (четырёхугольник) разделяет плоскость на две области: внутреннюю и внешнюю. Фигуру, состоящую из четырёхугольника и его внутренней области, также называют четырёхугольником» [1, с. 6];

- для 7–11-х классов, автор Погорелов А. В.: «Плоским многоугольником или многоугольную областью называется конечная часть плоскости, ограниченная многоугольником» [12, с. 202];

- для 6–8-х классов, автор Колмогоров А. М.: «Объединение простой замкнутой ломаной и ее внутренней области называется многоугольником» [9, с. 37].

В данной статье предлагается определение понятия плоского геометрического тела, которое можно включить в школьный курс планиметрии средней школы на углубленном уровне изучения данного предмета. Также рассмотрено

формирование понятия площади плоского геометрического тела как функции на множестве геометрических тел.

### **Плоское геометрическое тело**

Рассмотрим некоторые предварительные понятия, которые необходимы для определения понятия плоского геометрического тела.

**1. Понятие геометрической фигуры, отрезка, окружности, круга и окрестности точки.** В планиметрии под *геометрической фигурой*, или плоской фигурой, или просто фигурой понимают произвольное множество (совокупность)  $\Phi$  точек плоскости. Простейшей геометрической фигурой является точка. Из точек состоят все другие геометрические фигуры, например, отрезок, прямая, луч, круг, треугольник, плоскость и т.д.

Из школьного курса планиметрии ученикам известно, что расстояние между двумя точками прямой или плоскости – это длина отрезка, соединяющего эти точки.

К важнейшим фигурам плоскости, в частности, относятся: 1) окружность; 2) круг; 3) открытый круг с центром в данной точке  $O$  и заданным радиусом  $r > 0$ . Так называют множество точек плоскости, для каждой из которых расстояние от точки  $O$  соответственно: 1) равно  $r$ ; 2) не превышает  $r$ ; 3) меньше за  $r$ . При этом можно обозначать:

- $S(O; r)$  – окружность с центром в точке  $O$  и радиусом  $r$ ;
- $K(O; r)$  – круг с центром в точке  $O$  и радиусом  $r$ ;
- $U(O; r)$  – *открытый круг* с центром в точке  $O$  и радиусом  $r$ , который также называют окрестностью (или  $r$  – окрестностью) точки  $O$  (рис. 1).

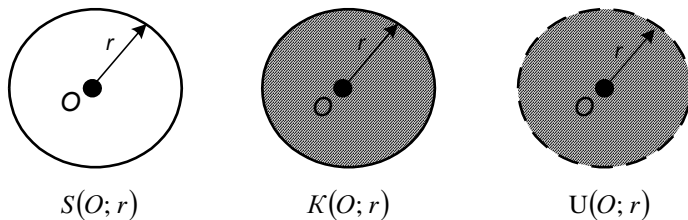


Рис. 1

На рисунке 2 изображена фигура  $F$ , которая состоит из всех точек окрашенной части плоскости, прямой линии  $l$ , точки  $C$  и замкнутой линии  $p$ , которая ограничивает окрашенную часть плоскости.

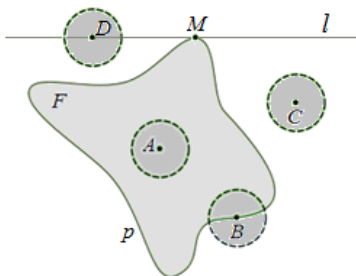


Рис. 2

Плоскую фигуру  $\Phi$  называют *ограниченной*, если все ее точки принадлежат некоторому кругу конечного радиуса.

**Примеры:**

1. Фигуры, представленные на рис. 1 – ограничены.
2. Фигура  $F$  (рис. 2) – не ограничена.

**2. Классификация точек плоскости относительно данной фигуры.** Пусть задано плоскость и некоторую фигуру  $\Phi$  на ней. Тогда точки плоскости относительно фигуры  $\Phi$  называют:

- 1) *внутренней точкой* фигуры  $\Phi$ , когда существует окрестность этой точки, все точки которой принадлежат



фигуре  $\Phi$ ;

2) *внешней точкой фигуры  $\Phi$ , когда существует окрестность этой точки, в котором нет ни одной точки фигуры  $\Phi$ ;*

3) *границной точкой фигуры  $\Phi$ , когда любая окрестность этой точки содержит в себе как точки фигуры  $\Phi$ , так и точки, не принадлежащие фигуре  $\Phi$ ;*

4) *предельной точкой фигуры  $\Phi$ , когда любой окрестность этой точки содержит в себе бесконечное множество точек фигуры  $\Phi$ ;*

5) *изолированной точкой фигуры  $\Phi$ , когда существует окрестность этой точки, в котором только эта точка принадлежит фигуре  $\Phi$ .*

**Примеры:** Если фигура  $\Phi$  – фигура  $F$ , которая изображена на рис. 2, то:

а) *внутренней точкой фигуры  $F$  является каждая точка с окрашенной части, например, точка  $A$ ;*

б) *каждая точка, которая не принадлежит ни окрашенной части, ни прямой линии  $p$ , ни замкнутой линии  $p$  и отличная от точки  $C$ , является внешней точкой фигуры  $F$ ;*

в) *каждая точка, принадлежащая замкнутой линии или прямой линии, а также точка  $C$  являются граничными точками фигуры  $F$ ;*

г) *каждая точка, принадлежащая окрашенной части плоскости, или прямой линии или замкнутой линии, является предельной точкой фигуры  $F$ ;*

д) *единственной изолированной точкой фигуры  $F$  является точка  $C$ .*

Из приведенных выше определений следует, что:

1) *внутренняя точка и изолированная точка фигуры  $\Phi$  всегда принадлежат этой фигуре;*

2) *внешняя точка фигуры  $\Phi$  не принадлежит ей;*

3) *границная точка и предельная точка фигуры  $\Phi$  могут принадлежать, а могут и не принадлежать фигуре  $\Phi$ .*

Легко убедиться, что для произвольной точки плоскости и для заданной на ней фигуре  $\Phi$  возможен один и только один из

трех случаев:

- 1) эта точка является внутренней точкой фигуры  $\Phi$ ;
- 2) эта точка является внешней точкой фигуры  $\Phi$ ;
- 3) эта точка является граничной точкой фигуры  $\Phi$ .

Кроме этого для точки, которая не является внешней, возможен один и только один из двух случаев:

- 4) данная точка является граничной точкой фигуры  $\Phi$ ;
- 5) данная точка является изолированной точкой фигуры  $\Phi$ .

Относительно произвольной точки данной фигуры  $\Phi$  возможен один и только один из двух случаев:

- 6) данная точка является внутренней точкой фигуры  $\Phi$ ;
- 7) данная точка является граничной точкой фигуры  $\Phi$ .

Множество  $G(\Phi)$  всех внутренних точек фигуры  $\Phi$  называют *внутренностью* фигуры  $\Phi$ , а множество  $S(\Phi)$  всех граничных точек фигуры  $\Phi$  называют *границей* фигуры  $\Phi$ .

Объединение фигуры  $\Phi$  с ее границей называют *замыканием* данной фигуры и обозначают  $\bar{\Phi}$ .

**Примеры:**

1. Если  $\Phi = K(0; r)$  или  $\Phi = U(0; r)$ , то внутренность каждой из этих фигур  $G(\Phi) = U(0; r)$ , а замыкание каждой из этих фигур  $\bar{\Phi} = K(0; r)$ .

2. Если  $\Phi = S(0; r)$ , то  $\bar{\Phi} = \Phi$ , а  $G(\Phi) = \emptyset$ . Для всех этих фигур  $\Phi$  их граница  $S(\Phi) = S(0; r)$ .

**3. Открытые и замкнутые фигуры, области и замкнутые области.** Относительно границы  $S(\Phi)$  данной фигуры  $\Phi$  возможен один и только один из трех случаев:

- 1)  $S(\Phi) \subset \Phi$ , то есть каждая точка границы  $S(\Phi)$  является также точкой фигуры  $\Phi$  и тогда фигуру  $\Phi$  называют *замкнутой*;
- 2)  $S(\Phi) \cap \Phi = \emptyset$ , то есть каждая точка границы  $S(\Phi)$  не является точкой фигуры  $\Phi$ , и тогда фигуру  $\Phi$  называют *открытой*;
- 3)  $S(\Phi) \cap \Phi \neq \emptyset$  и  $S(\Phi) \not\subset \Phi$ , то есть некоторые точки

границы  $S(\Phi)$  являются точками фигуры  $\Phi$ , а некоторые нет, и тогда фигура  $\Phi$  не является замкнутой, а также не является открытой.

**Примеры:**

1. Замкнутыми фигурами являются: каждая плоскость и пустая фигура; каждая фигура, которая состоит из конечного множества точек; объединение конечного числа замкнутых фигур, в частности, объединение конечного числа прямых; каждая окружность и каждый многоугольник; замыкание каждой фигуры.

2. Открытыми фигурами являются: каждая плоскость и пустая фигура; открытый круг (окрестность точки) объединение конечного и счетного количества открытых фигур (в частности открытых кругов); внутренность любой фигуры, в частности, внутренность любого многоугольника.

3. Ни замкнутыми, ни открытыми фигурами являются: обычный круг, из которого изъято одну граничную точку; обычный открытый круг, к которому присоединено одну граничную точку; многоугольник, из которого изъято одну вершину.

Открытую фигуру  $\Phi$  называют *областью*, когда любые две точки этой фигуры можно соединить ломаной, которая полностью содержится в этой фигуре. При этом, открытую фигуру  $\Phi$  называют также *линейно связной*.

**Примеры:**

1. Любой открытый круг является областью, а объединение двух открытых кругов без общих точек является открытой фигурой, однако не является областью, поскольку не является линейно связным.

2. Внутренность любого многоугольника является областью.

3. Круг не является областью, поскольку не является открытой фигурой.

**4. Плоское геометрическое тело и его периметр.**  
Геометрическую фигуру  $\Phi$  плоскости называют *плоским*

*геометрическим телом*, если она является замыканием некоторой области  $G$ , то есть  $\Phi = \overline{G} = G \cup S(G)$ . При этом обязательно внутренность  $\Phi$  совпадает с  $G$ , граница  $S(\Phi) = S(G)$  и эту границу называют *периметром* тела  $\Phi$ .

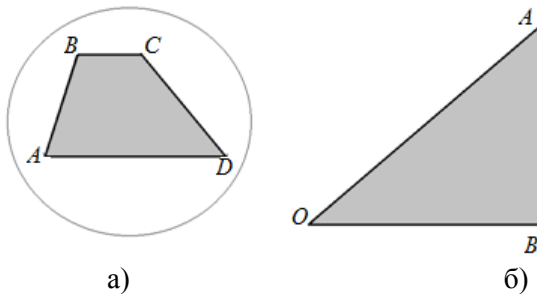
**Примеры:**

1. Круг является плоским телом, а окружность и окрестность – не является телом.

2. Каждый многоугольник является телом, а объединение двух многоугольников может быть телом, а может и не быть.

Плоские геометрические тела могут быть *ограниченными* и *неограниченными*.

**Пример.** На рис. 3 в случае а) имеем ограниченную фигуру  $F$  (трапецию  $ABCD$ ), а в случае б) – неограниченную (плоский угол  $AOB$ ).



**Рис. 3**

Плоская фигура (в частности тело) называется *выпуклой*, если любые две ее точки можно соединить отрезком, который полностью содержится в этой фигуре.

**Пример.** На рис. 4 в случае а) имеем выпуклое плоское геометрическое тело, а в случае б) – невыпуклые.

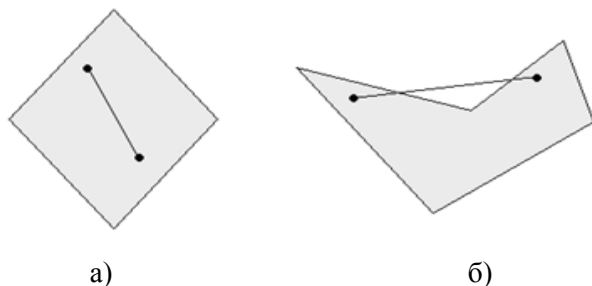


Рис. 4

**5. Критерий плоского геометрического тела.** Из определения плоского геометрического тела следует, что геометрическая фигура  $\Phi$  является телом тогда и только тогда, когда выполняются условия:

- граница фигуры  $\Phi$  совпадает с границей ее внутренности и содержится в  $\Phi$ ;
- любые две внутренние точки фигуры  $\Phi$  можно соединить ломаной, все точки которой являются внутренними точками  $\Phi$ .

*Это утверждение можно считать определением плоского геометрического тела и оно эквивалентно приведенному выше.*

#### **Площадь плоского геометрического тела**

Окружающий нас мир состоит из различного сочетания плоских и объемных фигур. В какой бы сфере не работал человек (строительство, архитектура, геология, агрономия, астрономия и др.), он должен знать свойства геометрических фигур и тел, уметь находить их объемы, площади, производить измерения. Эти умения и навыки необходимы человеку и в его повседневной деятельности.

Измерением площади люди занимаются не одно тысячелетие. Еще 4-5 тыс. лет назад вавилоняне умели вычислять

площадь прямоугольника и трапеции в квадратных единицах. Квадрат издавна служил эталоном при измерении площадей благодаря таким своим свойствам как равные стороны, равные и прямые углы, симметричность и общее совершенство формы. Квадраты легко строить, ими можно заполнить части плоскости (но наряду с этим в Древнем Китае мерой площади был прямоугольник) [3, с. 27].

Казалось бы, если есть единица измерения длины, то с измерением площадей не может быть никаких проблем. Берем квадрат со стороной, длина которой равна единице, например, сажень, и получаем квадратную сажень - вот и единица измерения площади. Или с версты создаем квадратную версту.

Потребность в измерении площадей возникла из-за необходимости знать числовую характеристику земельных участков, чтобы знать размер дани или налога.

Известно, что население Древнего Египта в основном занималось земледелием, но плодородной земли было очень мало – только в долине реки Нил, а дальше шли бескрайние пустыни. Каждую весну Нил разливался и удобрял землю плодородным илом. При разливе реки смывались границы участков, менялись их площади. Тогда потерпевшие обращались к фараону, он посылал землемеров, чтобы восстановить границы участков, выяснить, как изменилась их площадь и установить размер налога. Уже тогда «египтяне начали задумываться над тем, каким же образом следует измерять поля, чтобы можно было отдать каждому то, что ему принадлежит» [14].

В древнем Вавилоне также приходилось восстанавливать границы участков после разлива дважды в год рек Тигр и Евфрат.

Наши предки славяне для измерения площади разбивали земельные участки на куски в форме прямоугольников, треугольников и почти прямоугольной трапеции. Площадь участка треугольной формы исчислялась как половина произведения основания на боковую сторону, а площадь участка в виде трапеции – как произведение полсуммы оснований на боковую сторону («хобот»). Поле неправильной формы делили на отдельные участки в форме прямоугольника, трапеции,

треугольника; измеряли площадь каждой в отдельности, а результаты складывали. В монографии Грацианської Л.Н. можно найти способ измерения поля, которое было в форме неправильного четырехугольника или неправильного треугольника [5, с. 63-64].

Для выполнения таких вычислений не стоило изучать геометрию, прилагать значительные усилия для измерения земельных участков квадратными единицами; здесь точности не требовалось. Даже термин «площадь» не использовался. Например, древнекитайские задачи об измерении полей заканчивались стандартным вопросом: «Спрашивается, какое поле?». Слово «поле» выступало в роли термина «площадь», поскольку последнего еще не было [2, с. 240]. В китайской «Математике в девяти книгах» можно найти следующую задачу: «Есть круглое поле, длина которого 30 бу. Диаметр 10 бу. Спрашивается, какое поле?» [10, с. 445].

На территории этнической Украины население издавна занималось земледелием. В сельскохозяйственной практике нужно было измерять поле. Народные меры, появившиеся в процессе тех или иных полевых работ, имели достаточно условный характер, были слишком приблизительными. Наиболее распространенной была мера «день пахать», или «день земли», или «на один плуг», то есть величина поля, вспаханная в течении дня.

Поскольку производительность вспашки зависела от типа почвы, совершенства орудий пахоты и тягловой силы, то и величины были неодинаковы. В Карпатах мера «день пахать» составляла один морг (0,57 га) земли, а на большинстве этнической территории приближалась к одному гектару. Слово «морг» польско-литовского происхождения, заимствованное из немецкого языка, где 1 поле (волока) имело 30 моргов; франконское поле имело 48 моргов.

На Полесье бытовала мера «соха», то есть примерно 0,40 га. Меньше размером была «упруга» – третья часть меры «день земли», распространенная на Левобережной Украине. «Упруги» были утренние, обеденные, вечерние.

Большие площади земли измерялись «полями» (19-25 га), на Полесье, Волини – «волоками» (21 га), которые делились на «прутья» (1,2-1,5 га). Это были несколько регламентированы меры поля, в отличие от тех, которые определялись по проделанной работе в течение единицы времени. Существовали меры площади по величине скошенного поля («день косить»), по количеству высеянного зерна – «веко» (1/8 га, на которую приходится 25 л зерна ржи для посева).

На Закарпатье крестьяне пользовались мерой, которая называлась «делец» («телека») – величина сельскохозяйственных угодий, что обеспечивала прожиточный минимум для хозяина. Сюда относились: усадьба, поле, луга, пастбища. Народные меры оказались живучими: даже после введения стандартизированных единиц, таких, как десятина (1 га), морг (0,57 га), гольд (0,48 га), кадастровый гольд (0,57 га), угр (1 га) и т.п., крестьяне использовали древние меры [8].

Со временем для пахотных земель главную роль начала выполнять четверть – площадь, на которой высевали четверть (меру объема) ржи. Однако уже в XVI веке стало очевидным, что четверть – очень малая единица для описания земель, поэтому начали использовать десятину. В то время десятина составляла  $50 \times 50 = 2500$  сажень квадратных или 1,166 гектара и состояла из двух четвертей по 0,58 га. Вот только слова «квадратный» тогда не существовало, и такие меры называли «круглыми», «дробными» или «четырёхгранными».

Десятина была официальной счетной единицей, но на практике применяли более удобную единицу – четверть, или четь, равную половине десятины. Четверть (четь) делилась на две осьмины, осьмина – на две полосьмины, а полосьмина – на два четверика. Четверть по коэффициенту три могла делиться на три третника, шесть полтретников и т.д. 1/64 часть четверти (чети) называлась малый четверик.

Ученикам будут интересными исторические задачи об измерении площади земельного участка. К примеру:

*Задача.* В книге В. Подова «К тайнам истории» [13]



написано, что в 1714 году на правом берегу Северского Донца на территории Привольного, где через 40 лет расположилась пятая рота полка Депрерадовича, Василий Щабельский получил около 300 четей земли «для пашения хлеба» и сенокосной луки на 1000 коп, да еще и лесной остров посреди Донца. Попробуйте оценить размер земли, которую получил Василий Щабельский.

*Решение.* Четь (четверть) составляла  $\frac{1}{2}$  десятины. Переход на 7-футовый сажень еще только начался, и в первую очередь он касался кораблестроения. Только в середине XVIII в. стал широко внедряться сажень, равный 7 футам или 213,36 см. А землемерное дело было наиболее консервативным, да еще и на периферии Российской империи. Поэтому с уверенностью можно считать десятину равной 1,12 га, а четь, соответственно, 0,56 га.

Итак, 300 четей пахотной земли, полученной Щабельским, составляет около 168 гектаров. А 1000 коп сенокосы можно приравнять к 100 десятинам по 1,12 га, поскольку 10 коп = 1 десятина. Поэтому добавим еще 112 га. Всего же, не считая острова с лесом, он получил 280 га земли или  $2800000 \text{ м}^2$ , или  $2,8 \text{ км}^2$ .

В 1875 году 17 стран подписали Метрическую конвенцию, по которой обязывались ввести в своих странах систему мер, что, по мнению ее авторов, годилась «на все времена и для всех народов». В соответствии с ней длина измерялась в метрах, масса – в килограммах, а площадь земельных участков – в арах. Ар составлял площадь квадрата со стороной 10 метров, то есть 100 квадратных метров – привычная нам «сотка». Для измерения больших площадей эта величина была недостаточной, поэтому в землепользовании используют единицу в сто «соток» – гектар. Слово «гектар» образовано из слова «ар» (происходит от латинского «ареа» – площадь) и приставки «гекто», что обозначает «сто».

Так измерялись площади земельных участков. Но как измерить площадь небольших предметов, которые не являются прямоугольниками или квадратами, например, площадь листа дерева? В таких случаях пользуются палеткой – прозрачной пластиной, на которую нанесена масштабная квадратная сетка.

Эта пластинка накладывается на фигуру, площадь которой нужно измерить (рис. 5). Подсчитав количество квадратов (полных и неполных), можно найти площадь фигуры.



**Рис. 5**

Для приближенного определения площади плоских фигур неправильной формы используется также прибор, изобретенный в XIX столетии украинским математиком Буняковским В.Я. – планиметр (рис. 6). Это механический прибор, который дает возможность приближенно, путем обвода контура фигуры любой формы определить ее площадь. Планиметры бывают линейные и полярные.



**Рис. 6**

Первые сведения о площади фигуры и способы ее измерения ученики получают на пропедевтическом уровне в 4 классе. В курсе математики 5-6 классов их знания расширяются и

обобщаются сведениями о единицах измерения площади и формулах ее расчета. В 8 классе в курсе геометрии в учащихся формируется понятие площади фигуры, а также выводятся формулы для вычисления площадей прямоугольника, параллелограмма, треугольника, ромба, трапеции, правильных многоугольников [11].

Практика показывает, что даже после изучения данной темы мало кто из учеников может объяснить, что такое площадь геометрической фигуры и какими свойствами она обладает. Это указывает на то, что должен быть другой, более эффективный подход к изучению темы «Многоугольники. Площади многоугольников».

Раскрытие понятия площади плоского геометрического тела стоит начать с практических упражнений на измерение площади с помощью палетки (для небольших по размеру геометрических плоских тел), а также задач на нахождение и сравнения площади приусадебного участка, квартиры, страны и т.д. На основе таких упражнений учащиеся могут сделать ряд важных выводов:

*а) каждому из рассмотренных плоских физических объектов ставится в соответствие положительное число, которое называется его площадью;*

*б) чтобы получить это число, необходимо установить единицу измерения;*

*в) одинаковые физические объекты имеют равные площади;*

*г) если плоское тело состоит из нескольких частей, то его площадь равна сумме площадей этих частей.*

После обсуждения и обобщения результатов рассмотренных задач от физических плоских объектов следует перейти к рассмотрению плоских геометрических тел: прямоугольника, параллелограмма, треугольника, ромба, трапеции, круга, которые, как известно, являются математическими моделями плоских физических объектов. Только теперь можно выяснять, что понимать под площадью плоского геометрического тела?

Ученикам можно предложить следующее определение:

*Определение. **Площадью плоского геометрического тела** называется положительная функция, которая обладает следующими свойствами:*

- 1) задана на множестве плоских геометрических тел;*
- 2) для плоского квадрата, сторона которого равна единице длины, значение функции равно единице (единица измерения);*
- 3) равным плоским телам ставит в соответствие равные значения;*
- 4) аддитивная (если плоское тело разбить на несколько частей, площадь которых известна, то его площадь равна сумме площадей этих частей).*

Таким образом, в учащихся формируется представление о том, что *площадь плоского геометрического тела* – функция  $S: M \rightarrow R_+$ , где  $M$  – множество плоских геометрических тел;  $R_+$  – множество положительных чисел [15].

Как известно, основными способами задания функции являются аналитический, графический, табличный и описательный. Как может быть задана введена функция? Ответ на данный вопрос учащиеся могут получить только частично, изучив указанную тему и тему «Первообразная и интеграл» в курсе алгебры и начал анализа.

Если классифицировать плоские геометрические тела на *простые* и *непростые*, а затем выделить другие классы – параллелограммы, треугольники, круг и т.д., то такую функцию можно задать аналитически. К примеру:

(1)  $S = ab$  – площадь прямоугольника, где  $a$  и  $b$  – стороны прямоугольника; в случае квадрата  $S = a^2$ ;

(2)  $S = ah_a$  – площадь параллелограмма, где  $a$  и  $b$  – стороны параллелограмма,  $h_a$  и  $h_b$  – высоты, проведенные к соответствующим сторонам;

(3)  $S = ah$  – площадь ромба, где  $a$  – сторона,  $h$  – высота ромба;

(4)  $S = \frac{1}{2}(a + b)h$  – площадь трапеции, где  $a$  и  $b$  – основания трапеции,  $h$  – ее высота;

(5)  $S = \frac{1}{2}d_1d_2 \sin \varphi$  – площадь любого выпуклого четырехугольника, где  $d_1, d_2$  – его диагонали,  $\varphi$  – угол между диагоналями;

(6)  $S = \frac{1}{2}ah_a, S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$  – площадь треугольника, где  $a, b$  – стороны треугольника;  $\gamma$  – угол, что лежит напротив стороны  $c$ ;  $h_a$  – высота, проведенная до стороны  $a$ ;

(7)  $S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch_c$  – площадь прямоугольного треугольника;

(8)  $S = pr = \frac{1}{2}nar = \frac{1}{4}a^2n \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n}$  – площадь правильного многоугольника, где  $a$  – сторона,  $n$  – количество сторон многоугольника,  $r$  – радиус вписанного в многоугольник круга;

(9)  $S = \pi R^2$  – площадь круга, де  $R$  – радиус круга.

Эти формулы и станут в дальнейшем предметом изучения на уроках геометрии.

В курсе алгебры и начал анализа ученики ознакомятся с еще одним классом плоских тел – криволинейными трапециями – и формулой для нахождения площади этих фигур с помощью определенного интеграла:

(10)  $S = \int_a^b f(x)dx$  – площадь криволинейной трапеции.

Ученики должны понять, что общей формулы нет и для конкретного класса плоских тел она своя. Рассмотрение других геометрических тел, вероятно, даст другие формулы.

**Выводы.** Предложенный нами способ введения понятия плоского геометрического тела и его площади предлагаем включать в школьный учебник по геометрии для классов академического, профильного и углубленного уровней изучения.

Дальнейшие перспективы развития нашего исследования видим в выводе формул площади многоугольников на основе приведенного выше определения площади плоского геометрического тела и с учетом всех его свойств.

#### **ЛИТЕРАТУРА:**

1. Бевз Г.П. и др. Геометрия: Учебник для 8 кл. средних общеобразовательных учреждений / Г.П. Бевз, В.Г. Бевз, Н. Владимировна. – М.: Вежа, 2008. – 256 с.: ил.
2. Березкина Э.И. Математика древнего Китая. – М.: Наука, 1980. – 311 с.
3. Глейзер Г.И. История математики в школе VII-VIII кл. Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1982. – 240 с.
4. Государственный стандарт базового и полного общего среднего образования. Утвержденный постановлением Кабинета Министров Украины от 23 ноября 2011, №1392.
5. Граціанська Л.М. Нариси з народної математики України. – К.: Вид-во Київського університету, 1968. – 100 с.
6. Жалдак М.И., Михалин Г.А., Деканов С.Я. Математический анализ. Функции многих переменных: Учебное пособие. – К.: НПУ имени М.П. Драгоманова, 2007. – 430 с.
7. Істер О.С. Геометрія: підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закл. / О.С. Істер. – К.: Генеза, 2016. – 216 с.
8. Каленюк С.П. Краєзнавцю про вимірювання / Л.Л. Потапенко. – Лисичанськ: ПП «Прінтекспрес», 2011. – С. 56-62.
9. Колмогоров А.Н., Семенович А.Ф., Черкасов Р.С. Геометрия: Учебное пособие для 6–8 кл. сред. шк. / Под ред. А.Н. Колмогорова. – М.: Просвещение, 1979. – 383 с.
10. Математика в девяти книгах / Пер. и примеч. Э.И. Березкиной. – Ист.-мат. исслед., 1957, вып. X. – С. 445.
11. Математика. Навчальна програма для учнів 5-9 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Програму підготували: М.І. Бурда, Ю.І. Мальований, Є.П. Нелін, Д.А. Номіровський, А.В. Паньков, Н.А. Тарасенкова, М.В. Чемерис, М.С. Якір. – К.: 2012, Затверджено МОНМСУ (наказ МОНМСУ від 06.06.2012 р. № 664).
12. Погорелов А.В. Геометрия: Учеб. для 7–11 кл. сред. шк. – 4-е изд. – М.: Просвещение, 1993. – 383 с.
13. Подов В.И. К тайнам истории [Текст]: Заметки краеведа /

- В.И. Подов; Луганский региональный научно-исследовательский центр по проблемам истории Донбасса. – Луганск: Світлиця, 1996. – 103 с.
14. Прокопович Феофан. Філософські твори в трьох томах. Т. 3. Математика, історичні праці, вірші, листи. Переклад з латинської. – К., 1981. – Режим доступу: <http://litopys.org.ua/procop/proc304.htm>.
15. Снігур Т.О. Формування в учнів поняття площі фігури // Матеріали міжнародної науково-методичної конференції «Проблеми математичної освіти» (ПМО – 2015), м. Черкаси, 4-5 червня 2015 р. – Черкаси: ЧНУ ім. Б. Хмельницького, 2015. – С. 76-77.

**Татьяна А. Снігур**

Одеска націонална академия „О.С.Попова“, гр. Киев, катедра по телекомуникации

E-mail: [snigurtania@gmail.com](mailto:snigurtania@gmail.com)





## ПРИКЛАДНАЯ НАПРАВЛЕННОСТЬ КУРСА АЛГЕБРЫ\*

ВАСИЛИЙ А. ШВЕЦ, АННА А. НОВИКОВА

## APPLIED DIRECTION OF THE ALGEBRA COURSE

VASILY A. SHVETS, ANNA A. NOVIKOVA

**ABSTRACT:** *The article is devoted to the problem of implementation of applied orientation in the course of basic school algebra. The analysis of scientific works devoted to the concept of applied orientation is carried out. The authors define the concept of "applied orientation of the course of algebra" and "practical orientation of the course of algebra". A means of implementing the applied orientation of the course of algebra is an applied problem. The applied tasks reflect the real processes and situations of related disciplines, life and professional activity. The need to create a system of applied tasks is one of the topical problems of the methodology of mathematics.*

**KEYWORDS:** *applied tasks, applied orientation of the course of algebra, mathematical modeling, algebra course.*

Современная общеобразовательная школа, в условиях непрерывно развивающегося производства и технологий, должна обеспечивать ученикам виденье применения изучаемых математических понятий и терминов в реальном мире и повседневной деятельности, понимание того что они являются не искусственно введёнными, а появившимися в результате развития научных достижений и их применения на практике. Именно поэтому обеспечение реализации прикладной направленности школьного курса алгебры является одной из основных целей школьного образования.

---

\* Эта статья осуществляется с помощью фонда Научных исследований ШУ „Епископа Константина Преславского“ – № РД- 08-105/06.02.2017

Проблема прикладной направленности требует постоянного внимания и корректировки в связи с тем, что непрерывно расширяется сфера деятельности человека, а также развивается математика как наука. В методике математики сформировались такие направления в изучении этой проблемы: *прикладная направленность математики в общем понимании или при изучении конкретного предмета* (Г. П. Бевз, Г. М. Возняк, М. В. Егупова, Ю. М. Колягин, А. Д. Мышкис, Л. И. Ничуговская, В. В. Пикан, А. В. Прус, Л. А. Соколенко, Н. А. Терешин, В. В. Фирсов, В. А. Швец); *прикладная направленность обучения математики в средней школе* (Г. М. Возняк, Ю. М. Колягин, В. В. Пикан, И. М. Шапиро); *реализация прикладной направленности через применение в учебном процессе прикладных задач* (Г. Я. Дутка, Л. И. Новицкая, А. В. Прус, Л. А. Соколенко).

Анализ научных исследований показал, что часто тождественными считаются понятия “*прикладная направленность школьного курса математики*” и “*прикладная направленность обучения математики*”. Эти понятия имеют общие и отличительные черты. Рассмотрим их на примере изучения научных работ.

Суть *прикладной направленности курса математики* описал В. В. Фирсов, через **осуществление целенаправленной методологической и содержательной связи математики с практикой**, что предусматривает введение в математику специфических подходов (эвристических или правдоподобных рассуждений) характерных для исследования прикладных проблем математическими методами. Подобная ориентация среднего математического образования будет достигнута, если придать изучению курса математики черты прикладной деятельности. Методологическая связь будет обеспечиваться, по мнению автора, через формирование умений и навыков, характерных для трёх этапов (формализация, решение, интерпретация) применения математики к решению прикладных задач. В. В. Фирсов выделяет прикладную направленность как отдельную смысловую линию курса математики, подчёркивая

этим её место среди функциональной и других смысловых линий [1].

Реализацию *прикладной направленности обучения математики* через применение её в смежных дисциплинах, профессиональной деятельности, сельском хозяйстве и быте видели Ю. М. Колягин и В. В. Пикан. Авторы сделали акцент на том, что прикладная и практическая направленности обучения математике функционируют вместе и дали определения этим понятиям. *Практическая направленность обучения математики* – это направленность содержания и методов обучения на решение упражнений и задач, на формирование у учеников умений самостоятельной деятельности. *Прикладная направленность обучения математики* – это ориентация **содержания и методов обучения**, на применение математики в технике, профессиональной деятельности и смежных дисциплинах.

Курс алгебры основной школы является связующей дисциплиной между математикой 5 – 6 классов и алгеброй и началами анализа 10 – 11 классов. Принимая к сведению выше сказанное, перенесём соответствующие определения на курс алгебры. В нашем понимании, *прикладная направленность школьного курса алгебры* – это целенаправленная ориентация содержания, целей и средств обучения алгебры на: осуществление методологических и содержательных связей курса алгебры с практикой; формирование у учащихся, во время изучения алгебры, математических умений и навыков, необходимых в быту, профессиональной или научной деятельности. *Практическая направленность школьного курса алгебры* – это направленность целей, содержания, средств и методов обучения курсу алгебры на решение задач и упражнений этого курса.

Одним из средств реализации прикладной направленности выступают прикладные задачи, которые возникают в реальных жизненных ситуациях (бытовая, профессиональная, межпредметная), внедрение которых в учебный процесс

сопровождается применением метода математического моделирования.

Выделим следующие этапы математического моделирования, которые применяются в процессе решения прикладной задачи.

*Таблица 1*

*Этапы математического моделирования*

<i>Этап</i>	<i>Деятельность</i>
<b>I. Формализация</b>	Предварительный анализ объекта исследования
	Построение математической модели объекта исследования
	Выбор рациональной модели
<b>II. Исследование построенной математической модели</b>	Реализация математической модели математическими методами; исследование полученной математической модели
<b>III. Интерпретация решения</b>	Анализ результата
	Сопоставление полученных результатов и перенос их на объект, который исследуется

Приведём примеры прикладных задач, которые могут быть использованы на уроках алгебры в качестве дополнения к стандартным.

В прикладной задаче №1 (приведённой ниже) система двойных неравенств выступает математической моделью, которая описывает характеристики нефтяного пятна и сорбента. Задача может быть использована в 9 классе при изучении темы “Неравенства”.

*Задача № 1.* В результате утечки нефти с танкера на поверхности моря образовалось нефтяное пятно. Для его устранения экологи решили использовать сорбенты в виде матов,

которые впитывают нефть в соотношении 1:1. Известно, что один мат-сорбент имеет такие характеристики: ширина от 0,5 до 1 м, длина от 0,5 до 1 м, толщина от 0,5 до 1 м. Выяснить, сколько нужно таких сорбентов, для устранения нефтяного пятна шириной от 500 до 600 м, длиной от 600 до 700 м, толщиной от 0,01 до 0,03 м.

*Примечание:* Сорбент – твёрдое тело, которое выборочно поглощает с окружающей среды вещества.

*Решение.* I. Формализация. Запишем данные по сорбенту в виде системы условий. Пусть  $x$  – ширина сорбента,  $y$  – длина сорбента,  $z$  – толщина сорбента.

$$\begin{cases} 0,5 \leq x \leq 1 \\ 0,5 \leq y \leq 1 - \text{характеристики одного мата-сорбента,} \\ 0,5 \leq z \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 500 \leq x_n \leq 600 \\ 600 \leq y_n \leq 700 - \text{характеристики нефтяного пятна,} \\ 0,01 \leq z_n \leq 0,03 \end{cases}$$

II. Исследование математической модели. Тогда для того чтобы решить задачу нужно найти объёмы нефтяного пятна и сорбента:

Объём нефтяного пятна:  $3000 \leq V_n \leq 12600$ .

Объём одного сорбента:  $0,125 \leq V \leq 1$ .

Найдём отношение объёмов:  $\frac{3000}{1} \leq \frac{V_n}{V} \leq \frac{12600}{0,125}$ .

III. Интерпретация решения. Минимальное количество сорбентов необходимое для устранения нефтяного пятна 3 000 штук, максимальное количество сорбентов 100 800 штук.

Следующая прикладная задача имеет межпредметное содержание и может использоваться как пропедевтический материал к теме “Функция”.

*Задача №2.* Поливая газон возле дома, мальчик заинтересовался, с какой скоростью вытекает вода из шланга. Немного подумал и заметил, что ведро объёмом 10 литров,

наполняется за 8 секунд. Потом измерил с помощью рулетки внутренний диаметр шланга. Он составил 1,9 см. Записать формулу, которая связывает данные со скоростью вытекания воды из шланга.

*Решение.* Шланг имеет форму цилиндра (рис.1), поэтому длина шланга  $l$  равна высоте цилиндра.

Введём вспомогательные обозначения:

$V$  – объём воды;  $S_{оч}$  – площадь поперечного сечения шланга.

$d$  – диаметр шланга;  $t$  – время, за которое вода наполняет ведро объёмом  $V$ ;  $v$  – скорость воды, которая вытекает из шланга.

Запишем формулу, которая выражает внутренний объём

шланга: 
$$V = S_{оч} \cdot l = \pi \cdot \frac{d^2}{4} \cdot l.$$

Выразим длину шланга через

объём и получим 
$$l = \frac{4 \cdot V}{\pi \cdot d^2} \quad (1).$$

Длина шланга – это путь, который преодолевает вода за

время  $t$ :  $l = v \cdot t$ , выразим скорость воды  $v = \frac{l}{t}$  (2), подставим

формулу (1) в (2) и получим 
$$v = \frac{4 \cdot V}{\pi \cdot d^2 \cdot t} \quad (3).$$

Теперь подставляем исходные данные  $V = 10л = 10 \cdot 10^{-3} м^3 = 10^{-2} м^3$ ,  $t = 8 с$ ,  $d = 1,9 см = 1,9 \cdot 10^{-2} м$  в формулу (3) и получаем скорость воды.

$$v = \frac{4 \cdot 10^{-2}}{3,14 \cdot (1,9 \cdot 10^{-2})^2 \cdot 8} = \frac{1}{3,14 \cdot 3,61 \cdot 10^{-2} \cdot 2} = \frac{10^2}{6,28 \cdot 3,61} \approx 4,4 \frac{м}{с}$$

(округляем с недостатком),  $v \approx 4,4 \frac{м}{с}$ .

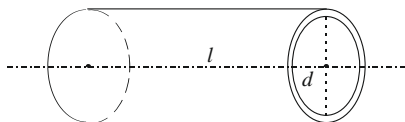
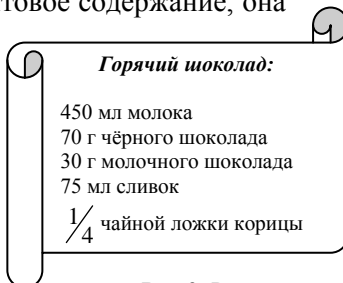


Рис.1. Модель шланга

*Ответ.* Скорость, с которой вода вытекает из шланга, составляет  $v \approx 4,4 \frac{м}{с}$ .

В задаче №3 можно увидеть бытовое содержание, она может быть использована при изучении темы “Тожественные преобразования рациональных выражений”. Открытый характер задачи предусматривает то, что ученик должен получить данные для её решения, сделав самостоятельный их поиск.



**Рис.2.** Рецепт

*Задача №3.* Наталия решила угостить своих подруг горячим шоколадом и нашла в журнале необходимый состав ингредиентов, которые используются для его приготовления (рис. 2). Составить список покупок, которые нужно сделать Наташе, чтобы приготовить 6 порций напитка. Учтите, что в супермаркете можно купить товар в упаковке с разной ёмкостью (сделайте расчёты учитывая ассортимент вашего магазина).

*Решение.* Упаковки товаров обозначенных в рецепте могут быть разной ёмкости, в связи с этим, решение задачи может отличаться от описанного далее. Совершим соответствующие расчёты (таблица 2).

**Таблица 2**

Ингредиент	Необходимое количество	Вместимость одной упаковки товара	Расчёты
Молоко	$6 \cdot 450 = 2\ 700$ (мл)	1 л	3 л
Чёрный шоколад	$6 \cdot 70 = 420$ (г)	90 г	$\frac{420}{90} = 4\frac{2}{3}$ округляем с избытком.

			Необходимо 5 упаковок
Молочный шоколад	$6 \cdot 30 = 180$ (г)	90 г	$\frac{180}{90} = 2$ упаковки
Сливки	$6 \cdot 75 = 450$ (мл)	500 мл	$500 - 450 = 50$ мл остаток. Необходимо взять 1 упаковку
Корица	1 чайная ложка корицы это 8 г, тогда $\frac{1}{4}$ чайной ложки – 2 г. На 6-ть порций необходимо 12 г	20 г	$20 - 12 = 8$ г остаток. Необходимо купить упаковку

Пускай в магазине можно купить молоко в литровой бутылке, корицу в 20 граммовой, чёрный и молочный шоколад в 90 граммовых, а сливки в 500 мл упаковках.

*Ответ.* Хозяйке необходимо купить 3 бутылки молока, 5 упаковок чёрного шоколада, 2 упаковки молочного шоколада, 1 упаковку сливок и корицы.

Далее рассмотрим задачи (№4-№5), в которых линейное уравнение используется в качестве математической модели к прикладной задаче.



**Задача №4.** Пищевой комбинат разливает минеральную воду по бутылкам ёмкостью 0,5 и 2 литра. Экономисты подсчитали, что продукция эффективней продаётся, если полулитровых бутылок будет в три раза меньше чем двухлитровых, в связи с этим сделали соответствующий заказ заготовок (рис. 3). Известно, что масса заготовки для полулитровой бутылки – 22 г, а для двухлитровой – 48 г. Для выполнения заказа завод по производству заготовок использовал 1 тонну полимера. Определить сколько воды удалось разлить в бутылки пищевому комбинату?



**Рис.3.** Заготовки для выдувания пластиковых бутылок

**Решение.** Пускай  $m_{0,5л} = 22г$ ,  $m_{2л} = 48г$ . Вспомним, что

$1\text{тонна} = 10^3\text{кг} = 10^6\text{г}$ . Обозначим через  $x$  – количество двухлитровых бутылок. Составим уравнение, которое

является математической моделью задачи  $\frac{x \cdot m_{0,5л}}{3} + x \cdot m_{2л} = 10^6$ .

Решая его получим число:  $x \cdot \left( \frac{m_{0,5л}}{3} + m_{2л} \right) = 10^6$ ,

$x = \frac{10^6}{\frac{22}{3} + 48} = \frac{10^6 \cdot 3}{166} \approx 180722892$ . Округлим полученное число с

недостатком и получаем 18 072 бутылок по 2 литра и 6 024 бутылки по 0,5 литров.

Определим, сколько минеральной воды завод сможет разлить, в полученное количество бутылок: 1)  $2 \cdot 18\ 072 = 36\ 144$  литров в двухлитровые бутылки; 2)  $0,5 \cdot 6\ 024 = 3\ 012$  литров в бутылки по 0,5 литров.

*Ответ.* Всего удалось разлить 39 156 литров минеральной воды.

*Задача №5.* Ученики 9-А класса школы принимают участие в весенне-летней акции “Чистый город”, которая проходит каждую субботу. Главная цель акции – очистить парки города от мусора. После одной уборки парка в среднем изымается до 20 кг макулатуры, и до 50 кг пластиковых бутылок. Во время последних двух уборок ученики извлекли на 10 кг меньше пластиковых бутылок, на 15 кг меньше макулатуры, но было дополнительно отправлено на утилизацию 30 кг батареек. Сколько денег отложили ученики 9-А класса в фонд школы, если приём сырья пластиковых бутылок рассчитывается как 1 кг по 4 грн 60 коп, макулатура – 1 кг по 2 грн 50 коп, а батарейки – 1 грн за кг.

*Решение.* **Вычислим, сколько средств получили ученики за первую уборку:**  $20 \cdot 2,5 + 50 \cdot 4,6 = 280$  грн. **Далее за последние две уборки ученики получили**  $(5 \cdot 2,5 + 40 \cdot 4,6) = 12,5 + 184 = 196,5$  грн **и еще 30 грн. за утилизацию батареек.**

Всего ученики получили  $280 + 196,5 + 30 = 506,5$  грн .

Числовые выражения в этой задаче – математические модели, с помощью которых получен ответ на поставленный вопрос.

*Ответ.* 506,5 грн .

*Задача №6.* В сети магазинов “Спортивная семья” и “СпортМега” распродажа. “Спортивная семья” провела акцию: цену на пару кроссовок снизили на 20 %, затем новую цену ещё на 25 %, после чего цена составляла 1200 грн. В “СпортМега” цену на пару кроссовок 1500 грн снизили на 25 %, затем новую цену снизили ещё на 40%. Какой была цена товара в магазинах до и после скидок? На сколько процентов снизилась цена товаров в каждом из магазинов?



**Рис.4.** Пара кроссовок из акции

*Решение.* Напомним, формулу сложных процентов: если начальное значение увеличилось на  $x\%$ , то нужно домножить на коэффициент  $k = \left(1 + \frac{x}{100}\right)$ ; если начальное значение уменьшилось на  $x\%$ , то нужно домножить на коэффициент  $k = \left(1 - \frac{x}{100}\right)$ .

Рассчитаем цены для сети “СпортМега”. По условию 1500 грн – начальная цена товара, после снижения на 25% цена составила  $1500 \cdot (1 - 0,25) = 0,75 \cdot 1500 = 1125$  (грн), после повторного снижения на 40%  $1125 \cdot (1 - 0,4) = 0,6 \cdot 1125 = 675$  (грн). Цена снизилась на 55 %.

Рассчитаем цены для сети “Спортивная семья”. Пусть  $a$  – начальная цена товара, после снижения на 20 % цена составила  $a \cdot (1 - 0,2) = 0,8 \cdot a$  (грн), после повторного снижения на 25%  $a \cdot 0,8 \cdot (1 - 0,25) = a \cdot 0,8 \cdot 0,75 = a \cdot 0,6 = 1200$  (грн). Начальная цена товара составила  $a = \frac{1200}{0,6} = 2000$  (грн). Цена снизилась на 60 %.

Проанализируем систему скидок и цен в двух магазинах в таблице 3.

**Таблица 3**  
**Система скидок в магазинах**

	Начальная цена	Скидка № 1	Скидка № 2	Общая скидка	Цена после двух скидок
“Спорт Мега”	1500 грн	25%	40%	55%	675
“Спортивная семья”	2000 грн	20%	25%	60%	1200

Приведённые выше задачи отображают реальные процессы и ситуации из смежных дисциплин, человеческого быта, а также профессиональной деятельности. Отметим, что прикладных задач в школьных учебниках по алгебре мало, а если они и есть, то в разделах для повторения ранее изученного материала или в виде обычных текстовых задач, поэтому вопрос о создании **системы прикладных задач**, которые были бы средством формирования у учащихся умений математического моделирования, является **актуальной** проблемой которая нуждается в решении.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Фирсов В.В. О прикладной ориентации курса математики //Углубленное изучение алгебры и начал анализа / Сост. С.И. Щварцбурд, О.А. Боковнев. – М.: Просвещение, 1972. – С. 215-239.
2. Колягин, Ю.М. О прикладной и практической направленности обучения математике/Ю.М. Колягин, В.В. Пикан // Математика в школе. - 1985. - № 6. – С. 27-32.
3. Швец В. О прикладной направленности школьного курса математики / В. Швец // Дидактика математики: проблеми і дослідження: міжнар. збірник наук. робіт / Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, Донецький нац. університет, Інститут педагогіки АПН України ; редкол. О. І. Скафа

(наук. ред.), В.О. Швець [та ін.]. – Донецьк, 2008. – Вип. 30. – С. 135–142.

4. Соколенко Л. О., Філон Л. Г., Швець В. О. Прикладні задачі природничого характеру в курсі алгебри і початків аналізу: практикум. Навчальний посібник. – Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2010. – 128 с.

**Васи́лий А. Шве́ц**

НПУ “М.П. Драгоманов”, гр. Київ, Україна, професор

E-mail: kmmvm@ukr.net

**Анна А. Новикова**

НПУ “М.П. Драгоманов”, гр. Київ, Україна, докторант

E-mail: chinchoy.anna@gmail.com



## ВЪРХУ „ПРОБЛЕМНИТЕ“ ЗАДАЧИ В ОБУЧЕНИЕТО ПО МАТЕМАТИКА\*

МИРОСЛАВ К. ХРИСТОВ, ЙОРДАН И. НИКОЛОВ

### ON “PROBLEM” TASKS IN MATHEMATIC TRAINING

MIROSLAV K. HRISTOV, YORDAN I. NIKOLOV

**ABSTRACT:** *Mathematics training involves tasks with non-specific formulations of the condition - predetermined or undefined, as well as non-precision solutions for non-existent figures or the so- formal roots of equations. Such problematic problems should be discussed in the preparation of the students of the specialty “Mathematics and Informatics” on the subject “Special and Private Methodology of Mathematics Education”.*

**KEYWORDS:** *problems, mathematics, problems, private methodology.*

Да разгледаме няколко конкурси задачи и да обсъдим проблемите свързани с тях.

Първата задача е зад. 24 от НВО за седми клас по математика през 2017г. [1]:

**Указание:** *Запишете пълното решение на задача 24, придружено с чертеж, който да отговоря на условието и необходимите обосновки.*

**24.** Даден е остроъгълен  $\triangle ABC$  с височина  $CH$  ( $H \in AB$ ). Върху страната  $BC$  е взета точка  $P$  такава, че разстоянията от нея до връх  $C$  и до страната  $AB$  са равни на 4cm. През точка  $P$  е

---

\* Настоящата статия е финансирана от Фонд „Научни изследвания“ към Шуменския университет „Епископ Константин Преславски“ по проект № РД-08-120/06.02.2017

построена права, перпендикулярна на  $BC$ , която пресича правата  $CH$  в точка  $M$  и  $CM = 8$  cm.

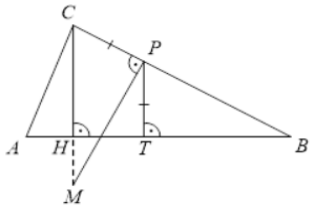
**А)** Намерете дължината на страната  $BC$ .

**Б)** Намерете лицето на  $\triangle ABC$ , ако  $AB = 14$  cm.

**В)** Определете отношението  $CM : CH$ .

Ще приложим и критериите за оценяване, от които се вижда и решението на авторите.

**24. Критерии за оценяване и брой точки по всеки критерий:**

1. За чертеж		<b>2 точки</b>
2. Намиране на $\sphericalangle CMP = 30^\circ$		<b>2 точки</b>
3. Намиране на $\sphericalangle CBH = 30^\circ$		<b>2 точки</b>
4. Намиране на дължината на $BC = 12$ cm		<b>1 точка</b>
5. Намиране дължината на $CH = 6$ cm		<b>1 точка</b>
6. Намиране $S_{\triangle ABC} = 42$ cm <sup>2</sup>		<b>1 точка</b>
7. Намиране на отношението $CM : CH = 8 : 6 = 4 : 3$		<b>1 точка</b>

По решението трябва да се каже, че чертежът е необоснован, защото не е посочено защо т. М не може да е вътрешна за  $\triangle ABC$ .

В случая Б) решението е формално (има някакви верни сметки), но триъгълникът не съществува!

За условието трябва да се каже, че в случая Б) задачата е противоречиво преопределена и наистина от т. 2, 3, 4 от критериите и  $AB = 14$  cm и косинусовата теорема следва:

$$AC^2 = 12^2 + 14^2 - 2 \cdot 12 \cdot 14 \cdot \cos 30^\circ = 340 - 168\sqrt{3},$$



$$\cos \sphericalangle ACB = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2 \cdot AC \cdot BC} = \frac{288 - 168\sqrt{3}}{2 \cdot AC \cdot BC}.$$

От  $228 - 168\sqrt{3} < 0 \Leftrightarrow 12 < 7\sqrt{3} \Leftrightarrow 144 < 147$  - вярно, следва че  $\sphericalangle ACB$  е тъп, т.е.  $\triangle ABC$  е тъпоъгълен.

Някой чиновник може да каже, че косинусовата теорема не се учи в седми клас и че целта е била да се провери знанието за формулата  $S_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$ .

Проблемът се състои в това, че учениците в седми клас могат да работят с линейка и транспортир и да построят  $\triangle ABC$  в случая Б) по  $AB = 14$  cm,  $BC = 12$  cm и  $\sphericalangle ABC = 30^{\circ}$ . Как трябва да се оцени работата на ученик, който загуби голяма част от времето си за да проверява дали  $\triangle ABC$  е остроъгълен в случая Б)? Още повече, че в този случай  $\sphericalangle ACB$  е близък до  $90^{\circ}$ ?

При разглеждането на тази задача учим студентите да не дават такива задачи, а ако дадат преопределена или неопределена до еднаквост фигура, то след това задължително да обсъдят с учениците нуждата от знание за съществуването на фигури.

Учениците от седми клас при изучаването на уравнението  $ax + b = 0$  знаят че да се реши едно параметрично уравнение означава: За всички допустими стойности на параметрите да се намери (докаже) има или няма решение, колко са на брой тези решения и кои са (от какъв вид).

Трябва по аналогия в случая на решаване на геометрични задачи са се каже: От всички възможни фигури трябва да се определи (докаже) има ли или няма такава (такива), които изпълняват дадените условия. В случая на параметрично решение да се изследва за кои фигури е валидно то, има ли изобщо такава фигури.

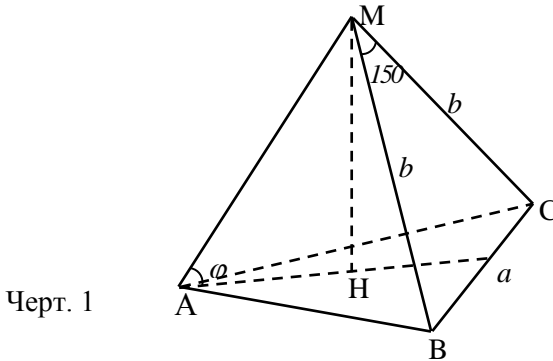
Задача втора. Дадена е правилна триъгълна пирамида  $MABCD$  за която  $\sphericalangle BMC = 150^{\circ}$ . Да се намери косинусът на ъгъла, който околният ръб  $AM$  сключва с основата ( $ABC$ ).

Решение: От  $\triangle BMC \Rightarrow a^2 = 2b^2 + 2b^2 \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = b\sqrt{2 + \sqrt{3}}$  ;

$$AH = \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{b\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{3} \cdot \sqrt{3} \text{ (черт. 1) и } \cos \varphi = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}\sqrt{3}}{3} .$$

Формално  $\cos \varphi$  беше получен. Проблемът е, че пирамидата  $MABCD$  не съществува. Трябва да се докаже твърдението, че за всяка пирамида сумата от равнините ъгли при върха е по-малка от 360 градуса.

В случая може да се установи, че  $\cos \varphi > 1$ .



Задача трета: В правилна четириъгълна пирамида  $\alpha$  е двустенен ъгъл при основата, а  $\beta$  - двустенен ъгъл между две околни стени. При какви съотношения на между основния ръб  $a$  и околния ръб  $b$  е в сила равенството  $\cos \alpha = \sqrt{-\cos \beta}$  ? [4].

- Отг. а) не съществуват такива съотношения;  
 б) за всяко  $a > 0$  и  $b > 0$ ;  
 в) ако  $0 < a < 2b$ ;  
 г)?.

Обсъждаме по-подробно условието, провеждаме дискусия със студенти и стигаме до следното решение:

Посочилите а) съвършено повърхностно смятат, че  $-\cos \beta < 0$  т.е. че даденото решение е невъзможно. Те получават

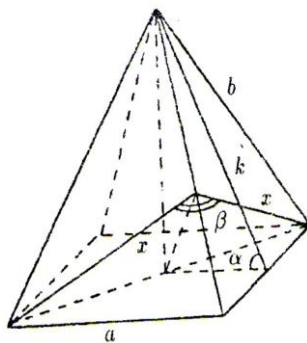
0 точки. Не е трудно да се установи (например чрез косинусовата теорема), че  $\beta$  е тъп ъгъл. Нека  $k$  е апотемата,  $x$  - другата височина в околната стена (черт. 2). Тогава

$$\cos \alpha = \frac{a}{2k}, \sin \frac{\beta}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2x}, \text{ откъдето } \cos \beta = 1 - 2\sin^2 \frac{\beta}{2} = 1 - \frac{a^2}{x^2}.$$

Обаче  $ak = bx$  т.е.  $\frac{a}{x} = \frac{b}{k}$ , и

$$-\cos \beta = \frac{a^2}{x^2} - 1 = \frac{b^2}{k^2} - 1 = \frac{b^2 - k^2}{k^2} = \cos^2 \alpha. \quad \text{Следователно}$$

$\cos \alpha = \sqrt{-\cos \beta}$ . Посочилите б) получават 6 точки. Те не посочват при какви съотношения между  $a$  и  $b$  пирамидата съществува, т.е. не правят изследване. Посочилите в) отчитат неравенството на триъгълника за околната стена ( $a < b + b$ ) и получават 8 точки. (Предполага се че те са установили верността на равенството между  $\cos \alpha$  и  $\cos \beta$ .) Неравенството  $0 < a < 2b$  е само необходимо, но не и достатъчно условие за съществуването на пирамидата.



Черт. 2

Неравенството на триъгълника, приложено обаче за диагонално сечение на пирамидата:  $a\sqrt{2} < 2b$ , води до  $a < b\sqrt{2}$ . (Можем да се убедим, например, че не съществува правилна четириъгълна пирамида с основен ръб 8 и околнен ръб 5).

Посочилите г) с отговор  $0 < a < b \cdot \sqrt{2}$  (или само  $a < b \cdot \sqrt{2}$ ) получават 10 точки, а с друг отговор 0 точки.

Студентите сами откриват проблема: нуждата от изследване и установяване на  $0 < a < 2b$  в г).

Четвъртата задача е от Математическия турнир „Академик Кирил Попов“ в гр.Шумен и е за ученици от 7 клас.

В остроъгълния триъгълник  $ABC$  с ъглополовяща  $CL$  ( $L \in AB$ ), симетралата на страната  $AB$  пресича правата  $CL$  в точка  $O$ . Да се докаже, че:

- а) точката  $O$  е външна за  $\triangle ABC$ ;
- б)  $\sphericalangle ABO = \sphericalangle BCO$ .

Дискутираме решението, дадено като най-очаквано от известна българска учителка по математика, работила дълги години в НППМГ

Използваме стандартни означения за ъглите в  $\triangle ABC$  -  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$ . Щом симетралата на отсечката  $AB$  и ъглополовящата на  $\sphericalangle ACB$  се пресичат, то  $CA \neq CB$  (2 т.). Нека б.о.о. считаме, че  $CA > CB$ . Тогава  $\beta > \alpha$ . Освен това  $OA = OB$  ( $O \in SAB$ ) и  $OM = ON$ , където  $OM$  и  $ON$  са разстоянията от точката  $O$  до раменете на  $\sphericalangle ACB$  ( $M \in AC, N \in BC$ ). От  $\triangle OCM \cong \triangle OCN$  (втори признак) следва, че  $CM = CN$ . Ако допуснем, че  $A \equiv M$ , то  $OA = OM = ON = OB$ , т.е.  $B \equiv N$  и  $CA = CB$ , което е невъзможно. Следователно  $A \neq M$  (1т.) Аналогично  $B \neq N$ . Тогава  $\triangle AOM \cong \triangle BON$  (признак за правоъгълни триъгълници), откъдето  $AM = BN$  (2т.).

а) Да допуснем, че точката  $O$  не е външна за триъгълник  $ABC$ . От доказаното по-горе следва, че  $CA = CM + MA = CN + NB = CB$ , което е невъзможно. Следователно  $O$  е външна за триъгълник  $ABC$  (2т.).

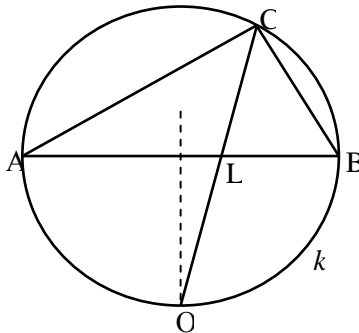
б) от а) следва, че точките  $M$  и  $N$  не са едновременно вътрешни съответно за страните  $AC$  и  $BC$ . С аналогични разсъждения доказваме, че ако  $M$  и  $N$  са едновременно външни съответно за страните  $AC$  и  $BC$ , ще се окаже, че  $CA = CM - MA = CN - NB = CB$ , което е невъзможно (2т.). Тогава едната от двете точки  $M$  и  $N$  е вътрешна, а другата е външна. Тъй като

$OA=OB$ , то  $\angle ABO=\angle BAO(=x)$  (1т.). От  $\beta > \alpha$  следва  $\beta + x > \alpha + x$ , а от еднаквието правоъгълни триъгълници  $AMO$  и  $BNO$  – че  $\alpha + x = \angle MAO = \angle NBO$  (1т.) Окончателно,  $\angle NBC = \alpha + x + \beta + x \Leftrightarrow 2x = 180^\circ - (\alpha + \beta) = \gamma \Leftrightarrow x = \frac{\gamma}{2} \Leftrightarrow \angle ABO = \angle BCO$  (4т.).

Обсъждаме и решението на представилия се най-добре ученик от 7 клас.

От условието следва, че симетралите и ъглополовящите не съвпадат, т.е.  $AC \neq BC$ . Нека  $k$  е описаната окръжност около  $\triangle ABC$  и  $CL \cap k = \{C, O\}$ , (черт.3)  $\angle ACO = \angle BCO$ ,  $\angle ACO =$

$\frac{AC}{2}$ ;  $\angle BCO = \frac{BO}{2} \Rightarrow$  т.  $O$  е среда на дъгата  $AB$ .



Черт.3

Симетралата на отсечката  $AB$  разполовява и дъгата  $AB$ . Следователно т.  $O$  е външна за  $\triangle ABC$ . (Дъгата  $AB$  не съдържа т.  $C$ ). Установяваме, че второто решение е формално по-лесно, то не съдържа логически прагове.

Проблемът се състои в това, че се е предвиждало задачата да се реши със знанията за седми клас, но това не е казано в условието! В седми клас например учениците още не знаят как се измерват вписаните ъгли в окръжност.

Този проблем в много по-общ, защото все още не е ясно с какви знания учениците от четвърти, седми и дванадесети клас могат да участват в национали или международни състезания. Всъщност въпросът опира до това: можеш ли (правилно ли е) на състезания да използваш вярно твърдение, верността на която не можеш сам да установиш! Авторите на статията се убедиха след арбитражиране в много състезания, колко масово се прилага тази практика!

Задача пета. Дадени са функциите  $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$  и  $f(x) > 0$  за  $x \in X \subseteq \mathbb{R}$ . Под степенно показателна функция с основа  $f(x)$  и степенен показател  $g(x)$  се разбира функцията, породена от израза  $[f(x)]^{g(x)}$ , който се дефинира с равенството

$$[f(x)]^{g(x)} = a^{g(x)\log_a f(x)}, \text{ където } a > 0 \text{ и } a \neq 1.$$

Дадено е уравнението  $x^{x+1} = x^2$  и числата 1, 0 и -1. Кои от тези числа са корени на даденото уравнение?

а) 1 е корен; б) -1 и 0 са корени; в) 1, 0 и -1 са корени. [5]

Решение: *Верен отговор а).*

Съгласно дефиницията на степенно показателната функция лявата страна на уравнението има вида:  $a^{(x+1)\log_a x}$  ( $a > 0, a \neq 1$ ). Ето защо дефиниционното множество (множеството от допустимите стойности на неизвестното  $x$ ) за даденото уравнение е  $D_x = \{x \in \mathbb{R} / x > 0\}$ . От посочените числа -1, 0 и 1 само  $1 \in D_x$  и само то може да бъде корен на уравнението. Проверката показва, че  $x=1$  е корен на уравнението.

Числата -1 и 0 превръщат уравнението във вярно числово равенство, но това не е достатъчно, за да ги признаем за корени на уравнението в множеството на реалните числа, защото не принадлежат на  $D_x$ .

При решаване на геометрични задачи често се допускат логически грешки – изпускане на случаи, разсъждение върху подвеждащ чертеж или разсъждения, дължащи се на невярна представа за някаква геометрична фигура – например че

ортоцентърът на триъгълник е пресечната точка на височините му!

Задача шеста. Ако  $H$  е ортоцентърът на триъгълника  $ABC$  и  $AB = CH$  да се намери  $\angle ACB$ . [8]

„Решение“ : Спускаме височината  $AA_1$  (черт. 4). Правоъгълните триъгълници  $ABA_1$  и  $CHA_1$  са еднакви (имат съответно равни хипотенузи и по един остър ъгъл. Тогава  $AA_1 = CA_1$ ,  $\triangle AA_1C$  е равнобедрен и правоъгълен. Следователно за търсения ъгъл имаме  $\angle ACB = 45^\circ$ .

Решение: В изложеното „решение“ тихомълком се предполага, че ортоцентърът  $H$  е вътрешна точка за триъгълника  $ABC$ , т.е. разгледан е само един от възможните три случая – остроъгълен триъгълник.

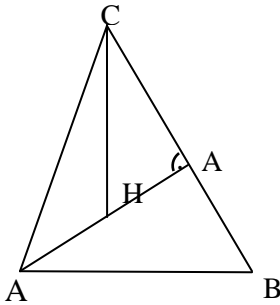
Ако даденият триъгълник е правоъгълен (и  $AB = CH$ ), то: или  $\angle BAC = 90^\circ$  и

$A \equiv H$  или  $\angle ABC = 90^\circ$  и  $B \equiv H$ , като и в двата случая  $\angle ACB = 45^\circ$ . Тук не е възможно  $\angle ACB = 90^\circ$  и  $C \equiv H$  поради  $AB \neq 0$ .

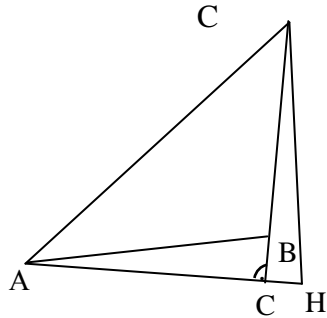
Ако  $\triangle ABC$  е тъпоъгълен и  $\angle ABC > 90^\circ$  (черт. 5), то  $B$  е ортоцентърът на остроъгълния  $\triangle ACH$ , за който  $AB = CH$ . Според доказаното твърдение за остроъгълен триъгълник получаваме  $\angle HAC = 45^\circ$ . От правоъгълния  $\triangle ACC_1$  ( $CC_1 \perp AH, C_1 \in AH$ ) намираме  $\angle ACB = 45^\circ$ . Случаят когато  $\angle BAC > 90^\circ$  е напълно аналогичен.

Накрая ако  $\triangle ABC$  е тъпоъгълен и  $\angle ACB > 90^\circ$  (черт. 6) то  $C$  е ортоцентърът на остроъгълния  $\triangle ABH$ . Тогава  $\angle AHB = 45^\circ$  и търсеният ъгъл лесно се пресмята  $\angle ACB = 360^\circ - 2 \cdot 90^\circ - 45^\circ = 135^\circ$ .

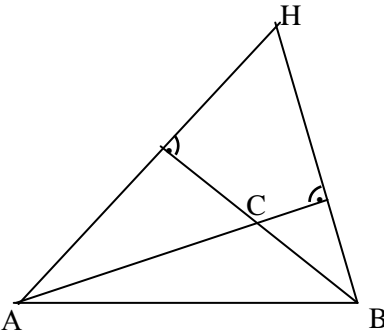
Окончателно получаваме, че ако  $\angle ACB$  е остър ,той е равен на  $45^\circ$ , а ако е тъп той е равен на  $135^\circ$ .



Черт.4



Черт.5



Черт.6

Друг важен въпрос например е преценката дали различни по форма получени отговори на дадена задача са еквивалентни помежду си. Например учителят по математика дал за домашна работа: Да се реши уравнението  $\sin x(1+105^2 x+1052x) = \sin^3 x$ . Учениците получили три „различни“ отговора:



$$\text{A) } \begin{cases} x = k\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases} ; \quad \text{B) } \begin{cases} x = k\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x = \pm 2\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} ; \quad \text{B) } x = k \cdot \frac{\pi}{3} .$$

Студентите стигат до извода, че в тоя случай е нужно само на един общ чертеж да се изобразят (по възможност с различни цветове) вторите рамена на обобщените ъгли от решенията А), Б) и В).

Установяваме, че отговорите А), Б) и В) са еквивалентни помежду си.

### Накрая ще формулираме две методически задачи за самостоятелна работа на студентите

Методическа задача 1. Височината, ъглополовящата и медианата, построени от върха С на  $\triangle ABC$ , са съответно равни на  $6,3\sqrt{5}$  и  $2\sqrt{13}$ . Намерете лицето на триъгълника [3].

Учителят дал следното решение и пояснения към него:

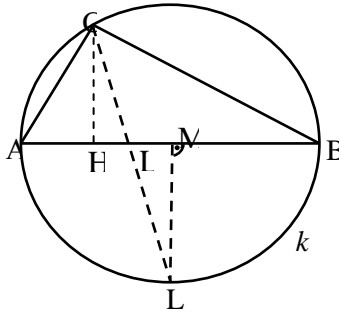
Като се приложи Питагорова теорема за  $\triangle HLC$  и за  $\triangle HMC$  се получава, че  $HL = 3, HM = 4$  и тогава  $LM = 1$ , черт. 7. Да построим втората пресечна точка  $L'$  на ъглополовящата с описаната около триъгълника окръжност. Тогава  $\triangle CHL \sim \triangle L'ML$  (имат по два съответно равни ъгъла), а от подобие на триъгълниците следва пропорционалност на страните им, т.е.

$$\frac{HL}{ML} = \frac{CH}{ML'} = \frac{CL}{LL'} \text{ или } \frac{3}{1} = \frac{6}{ML'} = \frac{3\sqrt{5}}{LL'} . \text{ Получава се, че } LL' = \sqrt{5} .$$

Освен това  $\triangle ALC \sim \triangle BLL'$  и от тук следва, че  $\frac{AL}{LL'} = \frac{CL}{BL}$ . Но тъй като  $AL = AM - 1$ , а  $BL = BM + 1 = AM + 1$ , получаваме, че

$$\frac{AM-1}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{AM+1}. \text{ От уравнението } AM^2 - 1 = 3(\sqrt{5})^2 \text{ се получава,}$$

че  $AM = 4$ . Тогава  $AB = 8$  и  $S_{\triangle ABC} = \frac{8 \cdot 6}{2} = 24$ .



Черт. 7

В задачата се използва едно *типично допълнително построение* - построяването на втората пресечна точка  $L'$  на ъглополовящата на триъгълник с описаната около триъгълника окръжност. От  $AL' = BL'$  следва, че точката  $L'$  лежи на симетралата  $ML'$  на  $AB$ . Това построение води до получаване на няколко двойки подобни триъгълници. В дадената задача дължините на височината, ъглополовящата и медианата определят наредбата на точките  $H$ ,  $L$  и  $M$  върху страната  $AB$ . Вярно е обаче, че за всеки триъгълник точката  $L$  винаги е между точките  $H$  и  $M$ .

Обоснован ли е чертежът и има ли проблеми свързани с решението?

За зад. 2. На учениците от една МГ дали следната задача на конкурс за стипендия по астрономия:

Всички знаем, че Земята е кръгла, макар че не е. (само за информация: Земята представлява ротационен елипсоид – „геоид“, като радиуса на Земята – малката полуос на елипсоида е 6356863 метра – на полюсите и радиуса на екватора – голяма

полуос на елипсоид 6378245 метра. Средния радиус на Земята е 6371302 метра.)

В нашата задача обаче, ще приемем, че повърхността на Земята представлява сфера ( $Z$ ) с радиус  $R$ .

Съществува една мислена окръжност, разположена на височина 35 786 км над повърхността на земята, над екватора(така наречената „геостационарна орбита“). Спътник, който е изведен на тази орбита и се движи с ъгловата скорост на земята, е с изравнена центробежна и гравитационна сила. Практически, той „виси“ над една точка над екватора, като нито пада, нито се отдалечава в открития космос. Това е орбитата, на която са разположени всички спътници, предназначени за разпръскване на телевизионен сигнал. В тази задача, ще обозначим това разстояние с  $G$ .

Целта на нашата задача е, намирайки се в Шумен, да изчислим „къде“ по небето трябва да търсим спътник, качен на геостационарна орбита, който „виси“ над Гринуичкия меридиан.

Нека наблюдателя, се намира на точка  $N$  на сферата  $Z$ .

Нека, през тази точка  $N$  прекараме равнина ( $\mu$ ), която е допирателна спрямо сферата  $Z$ .

На геостационарна орбита се намира точка  $S$  и правата, свързваща центъра на сферата  $Z$  със  $S$ , пресича  $\mu$  в точка  $S_1$ .

Нека равнината ( $\kappa$ ) пресича сферата  $Z$  през центъра и точките  $S_1$  и  $S$  лежат в равнината ( $\kappa$ ).

Нека равнината ( $\pi$ ) е определена от права, перпендикулярна на ( $\kappa$ ) в центъра на  $Z$  и точка  $N$ , която пресича  $\mu$  в права  $NP_1$  като  $P_1$  принадлежи едновременно на равнините ( $\mu$ ), ( $\pi$ ) и ( $\kappa$ ), то:

Ъгълът,  $\angle SNS_1$ , се нарича „ъгъл на място“, а ъгълът  $\angle S_1NP_1$  - „ъгъл по азимут“ и точка  $N$  се намира на географските координати на гр. Шумен – приблизително 43 градуса северна ширина (правата, свързваща  $t.N$  с центъра на  $Z$  пресича равнината ( $\kappa$ ) под ъгъл от 43 градуса – в задачата – ъгъл ( $\alpha$ )) и 27 градуса източна дължина (Равнините, които са перпендикулярни на ( $\kappa$ ), пресичат се в центъра на  $Z$  и минават

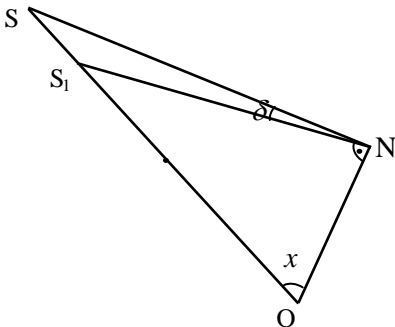
през точките съответно S и N, се пресичат взаимно под ъгъл от 27 градуса – в задачата ъгъл (бета)), то да се изчисли:

Ъгъла на място и ъгъла по азимут при зададените параметри. Да се представят ъглите SNS<sub>1</sub> и S<sub>1</sub>NP<sub>1</sub> като функции на R,G, (алфа) и (бета). При изчисленията може да се използват обозначенията на съответните букви от гръцката азбука.

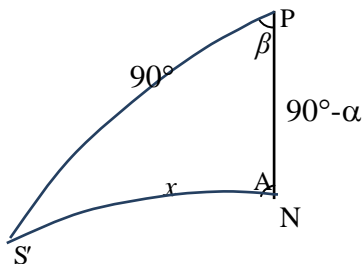
Двама участника дали две различни решения:

Решение 1: Нека O е център на сферата, черт. 8;  $\angle SNS_1 = \delta$ ,  $\angle NOS = x$ ; S' лежи на екватора,  $ON = OS' = R$ ,  $S'S = G$ ,  $OS = OS' + S'S = R + G$ . Прилагаме косинусовата теорема за  $\triangle NOS$ :  $OS^2 = ON^2 + NS^2 - 2.ON.NS.\cos(90^\circ + \delta) \Rightarrow$

$$(1) \quad (R + G)^2 = R^2 + NS^2 + 2.R.NS.\sin \delta .$$



Черт. 8



Черт. 9

Отново прилагаме косинусовата теорема, за  $\triangle NOS$ :

$$NS^2 = ON^2 + OS^2 - 2.ON.OS.\cos x ,$$

$$(2) \quad NS^2 = R^2 + (R + G)^2 - 2.R.(R + G).\cos x ,$$

заместваме в (1) и получаваме следното:

$$(R + G)^2 = R^2 + R^2 + (R + G)^2 - 2.R.(R + G).\cos x + 2.R.NS.\sin \delta ,$$

следователно

$$(3) \quad \sin \delta = \frac{(R+G)\cos x - R}{NS} = \frac{(R+G)\cos x - 1}{\frac{NS}{R}} = \frac{k \cdot \cos x - 1}{\frac{NS}{R}},$$

където  $k = \frac{R+G}{R}$ .

От (2) следва, че  $\frac{NS}{R} = \sqrt{1+k^2 - 2k \cdot \cos x}$ , заместваме в (3)

$$\Rightarrow \sin \delta = \frac{k \cdot \cos x - 1}{\sqrt{1+k^2 - 2k \cdot \cos x}}, \quad \text{но} \quad \cos \delta = \sqrt{1 - \sin^2 \delta} \quad \text{и}$$

$$\cos \delta = \frac{k \cdot \sin x}{\sqrt{1+k^2 - 2k \cdot \cos x}}, \quad \text{тогава} \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{k \cdot \cos x - 1}{k \cdot \sin x} = \frac{\cos x - k^{-1}}{\sin x}.$$

Нека Р е северен полюс, черт. 9,  $\angle S'NP = A$ ,  $S'N = x$ , прилагаме косинусовото правило за сферичния триъгълник  $NPS'$ :

$$\cos x = \cos 90^\circ \cdot \cos(90^\circ - \alpha) + \sin 90^\circ \cdot \sin(90^\circ - \alpha) \cdot \cos \beta \Rightarrow$$

$$(4) \quad \cos x = \cos \alpha \cdot \cos \beta.$$

Заместваме в израза за  $\operatorname{tg} \delta$ :  $\operatorname{tg} \delta = \frac{\cos \alpha \cdot \cos \delta - k^{-1}}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta}}$ . Синусовото

$$\text{правило за } \triangle NS'P: \frac{\sin A}{\sin 90^\circ} = \frac{\sin \beta}{\sin x} \Rightarrow$$

$$(5) \quad \sin A = \frac{\sin \beta}{\sin x}$$

и от тук получаваме

$$\cos A = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \beta}{\sin^2 x}} = \frac{\sqrt{\sin^2 x - \sin^2 \beta}}{\sin x} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x - \sin^2 \beta}}{\sin x} = \frac{\sqrt{\cos^2 \beta - \cos^2 x}}{\sin x}$$

Заместваме  $\cos x$  от (4):

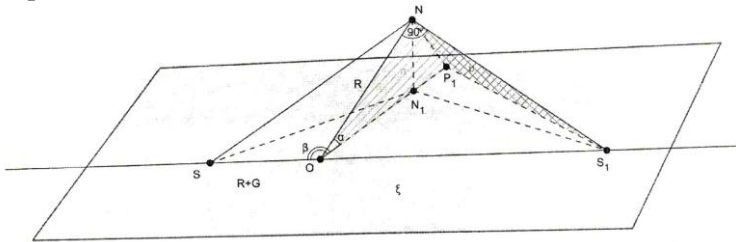
$$(6) \quad \cos A = \frac{\sqrt{\cos^2 \beta - \cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta}}{\sin x} = \frac{\cos \beta \cdot \sin \alpha}{\sin x}.$$

От (5) и (6) получаваме, че  $tg A = \frac{tg \beta}{\sin \alpha}$ .

Остава да се определи дали да се прибавя или изважда  $180^\circ$ , тъй като  $tg$  е периодична функция с период  $180^\circ$ .

Решение 2 (черт.10):

Черт.10



$$\sin \sphericalangle(SNS_1) = \frac{R - (R + G) \cos \alpha \cos \beta}{\sqrt{G^2 + 2R(G + R)(1 - \cos \alpha \cos \beta)}}$$

Отговорете на следните въпроси:

1. Прецизна ли е формулировката на условието?
2. За кой клас е подходяща задачата?
3. Вярно (пълно) ли е решението?
4. Направете стереометричен чертеж като модел на условието.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Национално външно оценяване по математика за 7 клас, 22 май 2017г.
2. Национален математически турнир „Академик Кирил Попов“, Шумен, 29 април 2017г.

3. Нинова, Ю., С. Матакиева. Успех на матурата по математика, PONS, София, 2013г.
4. Трендафилов, И., А. Кючуков. Тестове по математика за кандидат-студенти и ученици. Университетско издателство „Св. Климент Охридски“, София, 1992г.
5. Иванов, И.С., И.Г. Иванов. Тестове и теми със задачи от училищния курс по математика, Шумен, 2001г.
6. Николов, Й., А. Павлов. Преопределени задачи на конкурсни изпити. Сп.Математика и информатика, бр.2,2010 г.
7. Николов, Й., М. Христов. Обучение върху геометрично мислене в горния курс на средното училище, Международна конференция МАТТЕХ 2016г, стр 251-261
8. Кючуков, А., И. Трендафилов. Някои некоректно решени задачи по планиметрия, сп. „Математика“, бр.5, стр 21-24 и бр.8 стр. 11-17, 1992г.

**Мирослав К. Христов**

Шуменски университет „Еп. Константин Преславски“, ФМИ

E-mail: miroslav.hristov@shu.bg

**Йордан И. Николов**

Шуменски университет „Еп. Константин Преславски“, ФМИ

E-mail: yordan\_5@abv.bg





## КЛАСИФИКАЦИЯ НА РУТИРАЩИТЕ ПРОТОКОЛИ В БСМ\*

ТЕОДОРА Т. СТОЯНОВА

## CLASSIFICATION OF ROUTING PROTOCOLS IN WIRELESS SENSOR NETWORKS

TEODORA T. STOYANOVA

**ABSTRACT:** *Wireless Sensor Networks (WSN) consist of small sensor nodes scattered on a relatively large area. Routing protocols are used for network communication. They find the appropriate way to transmit the data and maintain the routes in the network. The routing protocols in WSNs depend on the application and the network architecture. This paper presents the classification and comparison of routing protocols.*

**KEYWORDS:** *Wireless Sensor Network (WSN), sensor nodes, routing protocols, applications.*

### 1. ВЪВЕДЕНИЕ

Безжичната сензорна мрежа (БСМ) съдържа стотици или хиляди сензорни възли, които имат възможност да комуникират по между си или директно да изпращат данните към базова станция (БС). Всеки сензорен възел включва сензорна част, обработваща част, предаваща част, система за откриване на местоположението и батерия. Обикновено са разпръснати в сензорно поле, представляващо област, в която те трябва да следят определени параметри, комуникирайки по между си, за да получават актуална информация. [1]

---

\* Настоящата статия е финансирана от Фонд „Научни изследвания“ към Шуменския университет „Епископ Константин Преславски“ по проект № РД-08-97/06.02.2017 г.

Като основен фактор, който прави безжичните сензорни мрежи атрактивни е предимството им да събират и предават информация за област, в която човешкият фактор е сведен до минимум или напълно невъзможен, при това за достатъчно дълъг период от време.

Цел на създаване на безжичните сензорни мрежи е военното приложение, но днес се използват в много индустриални и потребителски приложения, като мониторинг и контрол на машини и тръбопроводи, управление на верига за доставки, проследяване на цел и т.н. [2] Използват се и в области, като транспорт, здравеопазване, околната среда и др.

Една БСМ се състои от протоколи и алгоритми със самоорганизиращи възможности. Те са необходими за комуникация и изпращане на данни от един сензорен възел до друг. Съществуват множество рутиращи протоколи, но продължава да се работи върху създаването на нови и по-ефективни. Протоколите за рутиране са класифицирани по множество различни начини.

### **Предизвикателства пред БСМ**

Има редица предизвикателства пред БСМ, които създават ограничения за нейното използването, като основните са:

- Управление на ограничена енергия

Различните приложения на БСМ се нуждаят от повече енергия, но ограничението на мощността понякога причинява отказ в процеса на функциониране.

- Липса на ресурси

Малкият размер на сензорните възли води до ограничение на ресурси. Всеки сензор има ограничена памет, честотна лента и изчислителна способност.

- Машабируемост и мобилност

Възлите в сензорната мрежа се преместват много често от началната си позиция, така че това води до отказ на връзката, който засяга комуникацията между тях.

- Динамични мрежови топологии

Сензорните възли се разполагат без предварително планиране, така че топологията на мрежата може да се промени

поради много причини, като промяна на позицията на възела, отказ на възел поради физически увреждания и ограничена налична мощност.

- Адаптивност

Движенията на възлите причиняват отказ на комуникация. Преустройството на маршрута трябва да бъде бързо и приспособимо.

- Събираемост на данни

Събирането на данни намалява количеството енергия, което се използва по време на предаването им между възлите. Това увеличава живота на сензорните възли.

- Качество на услугата

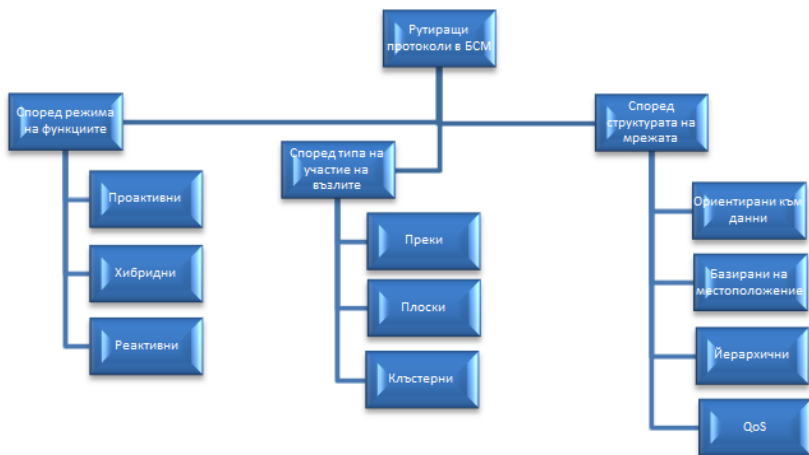
БСМ се използват за различни приложения. Някои приложения са доста критични и се нуждаят от надеждно обслужване навреме.

- Сигурност

Сигурната комуникация между възлите е много важна. Необходимо е да осигури поверителност и цялостност на данните.[3]

## **2. ГРУПИРАНЕ НА РУТИРАЩИТЕ ПРОТОКОЛИ В БСМ**

Рутирането е метод за изпращане на данни между два възела използвайки съответни протоколи за рутиране, избирайки най-ефективния път, така че данните да достигнат до целевия възел. Мрежовият слой е отговорен за осъществяване на движението на постъпващите данни. Енергията на повечето от възлите-източници не може да осигури достигане на данните до местоназначението поради тяхното далечно разстояние и в такъв случай, междинни сензорни възли препращат пакетите. БСМ има някои ограничения, като например снабдяването с енергия, честотна лента и други. Редица протоколи за рутиране са проектирани за БСМ и те са фокусирани предимно върху потреблението на енергия. Дизайнът на протоколите е приспособен към конкретното приложение и вида на самата мрежата.



**Фиг. 1. Групиране на рутиращи протоколи в БСМ**

Рутиращите протоколи за БСМ са групирани на база режим на функциите, мрежова структура и типа на участие на сензорните възли. Протоколите от първата група се делят на активни, реактивни и хибридни. В режим на участие протоколите могат да бъдат плоски, преки (директни) и клъстерно базирани. Протоколите според структурата на мрежата могат да бъдат ориентирани към данните, базирани на местоположение, йерархични или QoS (качество на услугата) базирани.

### *2.1. Протоколи на база режим на функциите*

В **проактивните** протоколи, рутиращата таблица се генерира от всеки възел и информацията за маршрутите на цялостна мрежа се актуализират периодично. Тъй като тази информация обикновено се пази в таблици те се наричат още table-driven протоколи. Необходимо е да съществува контрол на трафика, за да се запази таблицата за рутирание, актуална и надеждна по цялата мрежа.

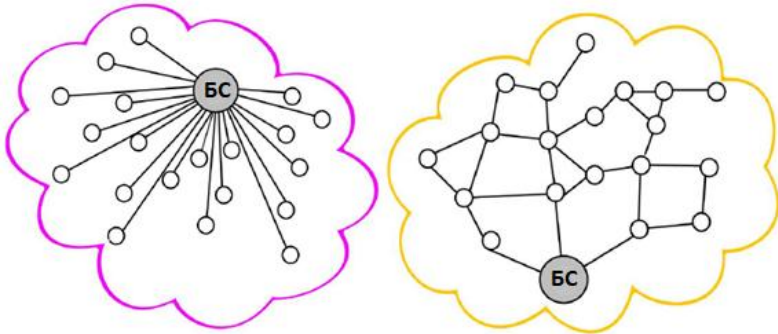
В **реактивните** протоколи за маршрутизация не се генерира рутираща таблица и откриването на маршрут се извършва в съответствие с изискванията. Маршрутите между възлите стават ясни при поискване. Възелът-източник задейства искане за откриване на маршрут през мрежата и чака отговор от

възела-получател. Понякога този процес отнема време и води до забавяне в мрежата. Веднъж открит, маршрута се пази докато е наличен и докато се използва. След определен период без да бъде използван той се отстранява и при следваща необходимост се търси наново. Предимството на проактивните маршрутизиращи протоколи е времето за използване на маршрута. Тъй като той е наличен може да се използва веднага, докато при реактивните е необходимо време за неговото откриване, което довежда до забавяне на предаването на първия пакет. Въпреки това проактивните протоколи са свързани с поддържане на таблици, т.е. необходимо е устройствата да имат по-голям капацитет от памет.

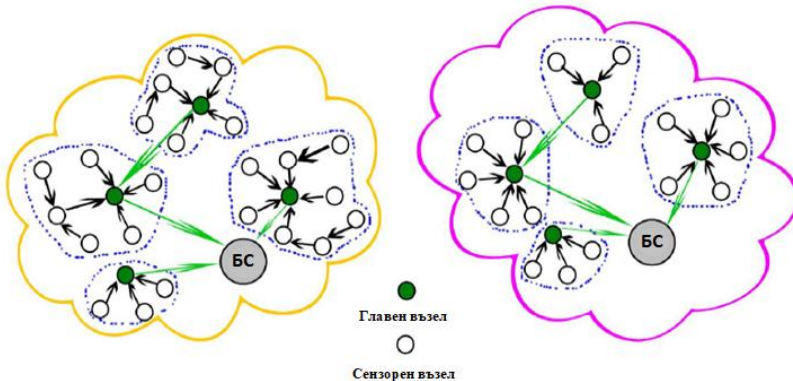
Третия тип протоколи, *хибридните* имат за цел да спечелят от предимствата на предходните два, използвайки както реактивен, така и проактивен подход. Хибридният подход намалява разходите за мрежата. Той първо изчислява всички маршрути и след това подобрява маршрути по време на рутирание. [4]

## 2.2. Според типа на участие на възлите

Втората класификация е според начина на взаимодействие на възлите и в тази категория, трите вида протоколи за маршрутизация са: *преки* (директни), *плоски* и *кълъстерни*. Прекият вид се основава на изпращане на цялата информация, директно до базовата станция, показано на фиг.2. При плоския тип възлите първоначално намират валиден маршрут до базовата станция, след което изпращат пакети до нея или до други възли чрез рутирание, като Sensor Protocols for Information via Negotiation (SPIN), Direct Diffusion (DD) и Rumour Routing. При кълъстерният тип областта се разделя на няколко малки кълъстери, в които главния възел директно комуникира с базовата станция или първо изпраща данните си до съседен главен възел, който от своя страна ги препраща към БС, както е показано на фиг. 3. [5]



Фиг. 2. Пряка и плоска архитектура



Фиг. 3. Клъстерна архитектура multi-hops и single-hop

### 2.3. Протоколи базирани на структурата на мрежата

**Протоколите ориентирани към данни** зависят от етикет или наименование на необходимите данни и са отговорни за премахване на излишни предавания. В тази категория, базовата станция изпраща заявки, изискващи определени данни от възлите в мрежата и ако данните съответстват на заявката, то те ги изпращат обратно към нея. Примерните рутиращи протоколи базирани на заявки са Directed Diffusion (DD), COUGAR, Sensor Protocols for Information via Negotiation (SPIN) и др.

**Йерархично базираните протоколи** извършват енергийно ефективно рутирание, избирайки по-високи енергийни възли за обработка и изпращане на информацията към базовата станция или към междинен главен възел. Тези видове протоколи извършват енергийно ефективна маршрутизация в БСМ и са най-подходящи за намаляване на размера на общите предавания на съобщения. Най-популярните протоколи за маршрутизация в тази категория са Low Energy Adaptive Clustering Hierarchy (LEACH), Power-Efficient Gathering in Sensor Information Systems (PEGASIS), Threshold-sensitive Energy Efficient sensor Network protocol (TEEN) и Adaptive Periodic TEEN (APTEEN).

**Протоколите базирани на местоположение**, изискват информация за местоположението на сензорните възли обикновено достъпни от GPS (Global Positioning System) сигнали или силни радио сигнали. В тази категория, чрез протоколите за рутирание се изчислява разстоянието до съседен възел от силата на входящия сигнал. За да се пести енергия в мрежата възлите използват активно или спящо състояние, като при активно състояние възелът е „жив“, а в спящо състояние възела почива. Най-популярните протоколи в тази категория са Geographic Adaptive Fidelity (GAF) и Geographic and Energy Aware Routing (GEAR).

**Протоколи базирани на качеството на услугата (QoS)**, при които рутирането се фокусира върху някой изисквания на мрежовия слой, като надеждност и латентност. Сензорната мрежа се основава на функцията за баланс и качество на мрежата, енергийна ефективност и качество на данните. Най-популярни протоколи, които се вписват в тази категория са SPEED (Stateless Protocol for Real-Time Communication in Sensor Networks) и Sequential Assignment Routing (SAR). [4]

В Таблица 1 са сравнени гореспоменатите рутиращи протоколи базирани на структурата на мрежата. Ясно се вижда предимствата и недостатъците на протоколите по отношение на мащабируемост, разход на енергия, мобилност, агрегиране на данни, локализация и др. [3, 9, 10, 11]

**Таблица 1. Сравнение на рутиращи протоколи в БСМ**

Рутингирани протоколи	Класификация	Матрибуе-мост	Рехоџ на енергия	Мобилност	Базирани на застави	Събирани на данни	Локализация	QoS	Базирани на Договаряне	Базирани на повече от един път
GAF	базирани на местоположението	добра	ограничен	ограничена	не	не	не	не	не	не
SPAN	базирани на местоположението	ограничена	ограничен	ограничена	не	не	не	не	да	не
GEAR	базирани на местоположението	ограничена	ограничен	ограничена	не	не	не	не	не	не
SPIN	ориентиран към данните	ограничена	ограничен	ограничена	да	да	не	не	да	да
Directed Diffusion	ориентиран към данните	ограничена	ограничен	ограничена	да	да	да	да	да	да
Rumor Routing	ориентиран към данните	добра	нисък	ограничена	да	да	не	не	не	не
COUGAR	ориентиран към данните	ограничена	ограничен	не	да	да	не	не	не	не
ACQUIRE	ориентиран към данните	ограничена	нисък	ограничена	да	да	не	не	не	не
VGA	йерархичен	добра	нисък	не	не	да	да	не	да	да
LEACH	йерархичен	добра	максимален	фиксирана БС	не	да	да	не	не	не
PEGASIS	йерархичен	добра	максимален	фиксирана БС	не	не	да	не	не	не
TEEN	йерархичен	добра	максимален	фиксирана БС	не	да	да	не	не	не
APTEEN	йерархичен	добра	максимален	фиксирана БС	не	да	да	не	не	не
SAR	QoS базирани	ограничена	висок	не	да	да	не	да	да	не
SPEED	QoS базирани	ограничена	нисък	не	да	не	не	да	не	не

### 3. КЛАСИФИКАЦИЯ СПОРЕД РАЗПОЛОЖЕНИЕТО НА БСМ

В зависимост от условията на разполагане на земята, под земята или във водата, има няколко вида безжични сензорни мрежи:

- **Сухоzemни (Terrestrial):** При този вид сензорни мрежи, стотици до хиляди сензори са разположени произволно в дадена област. Този тип БСМ се използва главно в областта на мониторинга на околната среда и е предизвикателство за устойчивостта на мрежата по отношение на управлението на енергията.

- **Подземни (Underground):** Тези много специални сензорни възли са известни с високата си цена и необходимата логистика за поддръжка и предварително планирано разгръщане. Сензори са монтирани в почвата за селското стопанство или в стените на мина за наблюдение на условията в почвата. Въпреки това, в този



тип мрежа, има възел на повърхността, който има роля да препредава прихванатата информация от подземните възли към базовата станция.

- **Подводни (Underwater):** Този тип БСМ са все още голямо предизвикателство поради факта, че средата, в която са разположени възлите е враждебна и обикновено се използва за проучване. Тези възли са по-скъпи от наземни сензори, безжичната комуникация е акустична, честотната лента е ограничена, загубата на сигнала е повтарящ се, закъсненията и проблемите със синхронизацията са големи.

- **Мултимедийни (Multimedia):** Този тип БСМ позволява наблюдение на събития в реално време, като например изображения, видеоклипове и звук. Тези сензори са оборудвани с камери и микрофони. Отдава се значение на параметри, като добър трафик, което предполага висока консумация на енергия, обработка и компресия на данни, добро качество на услугата. Необходимо е предварително планиране за внедряване на тези сензори.

- **Мобилни (Mobile):** В този най-нов тип БСМ, възлите са способни на репозициониране и автономно реорганизиране на мрежата. След първоначалното внедряване, възлите се разпръскват, за да събират информация. Също така съществува и хибридна мрежа, която представлява комбинация от мобилни и фиксирани сензори. [5, 6]

#### 4. КЛАСИФИКАЦИЯ СПОРЕД ПРИЛОЖЕНИЯТА

БСМ са привлекли вниманието на научната общност през последните години и се извършва огромно количество изследователска работа за решаване на практически и теоретични въпроси. Днес повечето разположени БСМ измерват температурата на скаларни физически явления, налягане, влажност или местоположение на обекти. Като цяло, повечето сензорни мрежи са толерантни към забавянията и приложения са ниска скорост на честотната лента. [7]

Наличието на евтини сензори и безжична комуникация допринасят за разработването на широк спектър от приложения

както в гражданската, така и във военната област. В Таблица 2 са обобщени приложенията на БСМ.

**Таблица 2. Приложения на БСМ**

Област	Предназначение	Приложения
Мониторинг на околната среда	Мониторинг на различни параметри или условия на околната среда	Мониторинг на естествената среда: условия на диви животни или растения в диви местообитания, екологични параметри на местообитанията, като влажност, налягане, температура, и радиация. Мониторинг на качеството на въздуха или водата: хидрохимични полета, контрол на замърсяването на въздуха. Мониторинг на опасностите: места с биологични или химични опасности, например химически завод или бойно поле. Мониторинг при бедствия: откриване на горски пожари или наводнения, посока и магнитуд на земетресение, като предоставя оценка на безопасността на сградата.
Военни приложения	Военно командване, комуникационен контрол и интелигентна система	Мониторинг на бойното поле: наличие и проследяване на движението на войски и сухопътни превозни средства, което позволява непрекъснато наблюдение на вражески сили. Защита на обекта: защита на атомни централи, стратегически мостове, петролопроводи и газопроводи, комуникационни центрове, военни щабове. Интелигентно ръководене: да насочва безпилотни роботизирани автомобили, танкове, изстребители, подводници, ракети, или торпеда към мишените и да координира помежду си, за да постигнат по-ефективни атаки или защити. Дистанционно наблюдение: дистанционно наблюдение на ядрени, биологически и химически оръжия, откриване на потенциални терористични атаки, и разузнаване.
Приложения за здравеопаз-	За да се наблюдават и проследяват	Поведенчески мониторинг: да се наблюдава поведението на пациента у дома с цел предупреждаване на лекарите за

ването	пациенти, като по този начин значително се облекчава недостига на медицински персонал и се намаляват разходите за здравеопазване	предоставяне на спешна медицинска помощ. Медицинско наблюдение: мониторинг на жизнените показатели, параметри на околната среда, както и географски местоположения за дългосрочно, неинвазивно и амбулаторно проследяване на болни или възрастни хора с незабавни предупреждения до здравни работници при спешен случай, незабавни съобщения до потребителите за техните настоящи здравни състояния и актуализации в реално време на медицинската документация на потребителя.
Контрол на индустриалния процес	За наблюдение на производствените процеси и състоянието на производственото оборудване за намаляване на разходите за поддръжка, увеличаване на живот на машината, както и безопасността на персонала	Мониторинг и контрол на производствените процеси: наблюдение и контрол на поточни линии, производствени предприятия и процеси. Мониторинг на състоянието: на тръбопроводи и машини.
Сигурност и надзор	За наблюдение на сгради и критични инсталации	Идентифициране и проследяване на нарушители: разполагане на сензори в сграда, летища, подземи, както и други критични инфраструктури, например атомни електроцентрали или комуникационни центрове за идентифициране и проследяване на нарушители с цел да осигури навременни сигнализираня и защита от атаки.
Домашни мрежи	За да се осигури по-удобна и интелигентна жизнена среда за хората	Интелигентен дом: smart хладилник свързан със smart печка или микровълнова печка може да се използва за изготвяне на меню, въз основа на съдържанието на хладилника и да изпрати съответните параметри за

		готвене на smart печката или микровълновата печка за определяне желаната температура и време за готвене. Възможна е и реализация на отдалечено наблюдение и контрол на съдържанието на телевизор, видео, DVD или CD плеъри. Отдалечено наблюдение: при него дистанционно да може да се отчетат полезни данни в дома, като вода, газ, електричество и след това да изпрати показанията на отдалечен център чрез безжична комуникация.
--	--	--

Съществуват редица предложени протоколи за рутиране в БСМ. Различните приложения изискват различни видове протоколи за рутиране, които имат различни степени на надеждност. [7, 8] Според конкретното приложение, протоколите са:

- Мониторинг на околната среда - SPAN, GAF, COUGAR, ACQUIR, DD

- Военна област – GAF
- Здравни грижа - GBR, SAR
- Контрол на индустриалния процес – SAR
- Домашни мрежи - GRER, APTTEN.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рутирането в БСМ е актуална област за изследване, която има за цел да удължи живота на мрежа.

В тази статия са представени предизвикателствата пред БСМ, групирани са рутиращите протоколи на база режим на функциите, мрежова структура и типа на участие на сензорните възли. Също така е представена класификацията според разположението и според приложенията на БСМ.

Въпреки, многообразието от рутиращи протоколи и приложения, все още има много предизвикателства, които трябва да бъдат решени в безжичните сензорни мрежи. Част от тях са свързани с изследване на ефективността на информационната защита в тези мрежи. [12]

**ЛИТЕРАТУРА:**

1. Al-Karaki, J., A. Kamal. Routing Techniques In Wireless Sensor Networks: A Survey. // IEEE Wireless Communications, vol. 11, 2004.
2. Patel, A., R. Jhaveri, K. Dangarwala. Wireless Sensor Network – Theoretical Findings and Applications.// International Journal of Computer Applications, vol. 63, 2013.
3. Anjali, Shikha, M. Sharma. Wireless Sensor Networks: Routing Protocols and Security Issues.// 5th ICCCNT, 2014.
4. Anwar, R., M. Bakhtiari, A. Zainal, K. Qureshi. A Survey of Wireless Sensor Network Security and Routing Techniques.// Research Journal of Applied Sciences, Engineering and Technology, vol. 9(11), 2015.
5. Ari, A., A. Gueroui, N. Labraoui, B. Yenke. Concepts And Evolution Of Research In The Field Of Wireless Sensor Networks.// IJCNC, vol.7, 2015.
6. Yu, X., P. Wu, W. Han, Z. Zhang, Z. Overview of wireless underground sensor networks for agriculture.// African Journal of Biotechnology, vol. 11(17), 2014.
7. Singh, S., M. Singh, D. Singh. Applications, Classifications, and Selections of Energy-Efficient Routing Protocols for Wireless Sensor Networks.// IJAEST, vol. 1, 2010.
8. Singh, S., M. Singh, D. Singh. Routing Protocols in Wireless Sensor Networks – A Survey.// IJCSES, vol.1, 2010.
9. Liu, X. A Survey on Clustering Routing Protocols in Wireless Sensor Networks.// Sensors, vol. 12, 2012
10. Biradar, R., V. Patil, D. Sawant , D. Mudholkar . Classification And Comparison Of Routing Protocols In Wireless Sensor Networks.// UbiCC Journal, vol. 4, 2010.
11. Chauhan, P., T. Kumar. Power Optimization in Wireless Sensor Network: A Perspective.// IJETR, vol. 3, 2015.
12. Nachev, A., S. Zhelezov. Assessing the efficiency of information protection systems in the computer systems and networks.// Collection "Information technology and security", vol. 2(1), 2013.

**Теодора Тихомирова Стоянова**

ШУ „Епископ Константин Преславски“, гр. Шумен

E-mail: t.stoyanova@shu.bg



## СЪДЪРЖАНИЕ

<b>A TRIANGULAR MODEL OF A COUPLING OF A DISEPARATIVE AND INTIDISEPERATIVE OPERATIONS WITH REAL SPECTRA</b> GALINA S. BORISOVA.....	3
<b>ON BIGGER PRIMES</b> IVO M. MICHALOV, IVAN S. IVANOV, SINTIA A. VLADIMIROVA, FANI M. ALEKSANDROVA.....	15
<b>ВЪРХУ ЕФЕКТИВНИЯ ОБЕМЕН МОДУЛ НА МНОГОФАЗНИ ДИСПЕРСИИ</b> КРАСИМИР Д. ЦВЯТКОВ.....	25
<b>SIGH IN THE MARKETING COMMUNICATION</b> TRUFKA R. DIMITROVA.....	45
<b>МЕЖДУПРЕДМЕТНЫХ СВЯЗЕЙ В ОБУЧЕНИИ РЕАЛИЗАЦИЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ В ПЕДАГОГИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ (НА ПРИМЕРЕ ТЕМЫ «ВЫРАЖЕНИЯ И ИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ»)</b> ВАЛЕНТИНА Г. БЕВЗ, ЛЮДМИЛА В. СУХОЙВАВАНЕНКО.....	57
<b>ПРОЕКТНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ: СОВРЕМЕННЫЕ ТЕНДЕНЦИИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ В ПРОЦЕССЕ ИЗУЧЕНИЯ АЛГЕБРЫ В ОСНОВНОЙ ШКОЛЕ</b> СВЕТЛАНА М. ЛУКЪЯНОВА, СВЕТЛАНА Н. МОВЧАН.....	73
<b>ОБ ОДНОМ ИЗ ПОДХОДОВ ФОРМИРОВАНИЯ ПОНЯТИЯ ПЛОСКОГО ТЕЛА И ЕГО ПЛОЩАДИ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ ПЛАНИМЕТРИИ</b> ТАТЯНА А. СНИГУР.....	85
<b>ПРИКЛАДНАЯ НАПРАВЛЕННОСТЬ КУРСА АЛГЕБРЫ</b> ВАСИЛИЙ А. ШВЕЦ, АННА А. НОВИКОВА.....	105
<b>ВЪРХУ „ПРОБЛЕМНИТЕ“ ЗАДАЧИ В ОБУЧЕНИЕТО ПО МАТЕМАТИКА</b> МИРОСЛАВ К. ХРИСТОВ, ЙОРДАН И. НИКОЛОВ.....	119
<b>КЛАСИФИКАЦИЯ НА РУТИРАЩИТЕ ПРОТОКОЛИ</b> ТЕДОРА Т. СТОЯНОВА.....	137