

Задачи за трети етап (месец март)
на Турнира за купата на декана по математика

Задача 1.

Да се изследва функцията $f(x)$ и да се начертае графиката ѝ, ако

$$f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x}} + 1 - A$$

$$\text{и } A = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3(\sqrt{12-x}-3)}{5(5-\sqrt{x+22})}.$$

Задача 2.

Даден е квадрат $ABCD$ с дължина на страната 1. Нека точка M лежи върху страната CD . Ако $x = CM$ и ъгъл $\angle AMB = \theta$, то да се докаже, че $x^2 - x + 1 = \cot g(\theta)$.

Задача 3.

Равностранни триъгълници с дължини на страните, съответно $1, 3, 5, 7, \dots$, са разположени така, че основите им лежат на една права и десният връх на основата на всеки триъгълник съвпада с левия връх на основата на следващия триъгълник. Да се докаже, че

- а) върховете, срещулежащи на основата, лежат на една парабола;
- б) разстоянието от фокуса на параболата от а) до всеки трети връх на равностранен триъгълник от редицата триъгълници, описана по-горе, е цяло число.