

Задачи за трети етап (месец март)
на Турнира за купата на Декана по математика

Задача 1.

Четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност. Продълженията на срещуположните страни AB и DC се пресичат в точка E , а на страните AD и BC в точка F . Да се докаже, че пресечните точки на страните на четириъгълника $ABCD$, с ъглополовящите на ъглите $\angle AED$ и $\angle AFB$ са върхове на ромб.

Задача 2.

Нека $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ е функцията на Ойлер.

- а) Намерете броя на естествените числа, по-малки от 120 и взаимно прости с 30.
- б) Намерете всички естествени числа n , за които $\varphi(n) = 120$ и $n = pq$, където p и q са различни прости числа.
- в) Нека S е сумата на всички естествени числа, по-малки от n и взаимно прости с n . Докажете, че $S = \frac{1}{2}n\varphi(n)$.

Упътване: Използвайте, че ако $(a, n) = 1$, то $(a, n-a) = 1$.

Задача 3.

Да се намери уравнението на множеството от петите на перпендикулярите, спуснати от върха на параболата $y^2 = -4ax$ към допирателните на тази парабола.