Задачи за **втори етап** (месец февруари)
на Турнира за купата на Декана по математика

Задача 1.

а) Пресметнете границата

$$A = \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{2n^3+n-10}{\sqrt{7}n^3+2n^2+1}\right)^n \sin(2021n)\right).$$

б) Докажете равенството

$$arctg\, x^{2021} + arctg\,\frac{1}{x^{2021}} = \frac{\pi}{2} - A$$

за $\forall x \in (0, +\infty)$, където A е границата в а).

Задача 2.

В окръжност с радиус 1 е вписан трапец ABCD с основа AB=2. Ако φ е големината на острия ъгъл между диагоналите AC и BD, то

а) Докажете, че лицето на трапеца е равно на $sin\varphi(1+\cos\varphi)$.

б) Да се намери стойността на φ, за която лицето на трапеца е най-голямо.

Задача 3.

В Евклидовата равнина е даден квадрат $MNPQ$ с дължина на страната 1. Разглеждаме всички равностранни триъгълници ABC със свойството: върхът A принадлежи на отсечката $[MN]$, върхът B – на лъча $NP^{\rightarrow}$, а върхът C – на лъча $MQ^{\rightarrow}$. Да се определи средата S на отсечката $[BC]$ чрез векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ с представители насочените отсечки $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{MQ}$, съответно, и да се докаже, че S е постоянна точка.