

Задачи за трети етап (месец март 2023)
на Турнира за купата на Декана по математика

Задача 1. Ако A е границата

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2023^n}{2022 n!} \cos(2023n) \right),$$

1) докажете неравенството $\ln(x + 1) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - A$ за $\forall x \geq 0$;

2) изследвайте функцията

$$f(x) = (1 - A)x - \ln(x + 1)$$

и начертайте графиката ѝ.

Задача 2. Дължината на бедрата на трапец са равни на **3** см и **5** см. Известно е, че в трапеца може да се впише окръжност. Средната основа на трапеца го дели на две части, лицата на които се отнасят както **5 : 11**. Намерете дължините на основите на трапеца.

Задача 3. Да се докаже, че ако две параболи с взаимно перпендикулярни оси се пресичат в четири точки, то тези точки лежат на една окръжност.