

ИТЕРАЦИОНЕН МЕТОД НА СИЛВЕСТЪР НА РЕШЕНИЕ НА РИКАТИЕВО УРАВНЕНИЕ

ИВАН Г. ИВАНОВ, НЕЛИ Л. НЕДЕЛЧЕВА-БАЕВА

SYLVESTER'S ITERATION METHOD ON SOLUTION OF RICCATI EQUATION

IVAN G. IVANOV, NELI L. NEDELICHEVA-BAEVA

ABSTRACT: The paper is devoted to Sylvester's iteration method for solving matrix equation of Riccati. Find a solution of the matrix Riccati equation by Newton's method and Sylvester's iteration method and a comparison of both methods.

KEYWORDS: положително определени системи, матрични уравнения на Рикати, итерационен процес, метод на Нютон, итерационен метод на Силвестър.

Увод

Интересът към уравненията на Рикати ни мотивира за тази разработка. В настоящия доклад ще разгледаме матричното рикатиево уравнение:

$$(1) \quad 0 = -\begin{pmatrix} A^T & 0 \\ 0 & A^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} A - \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} (S_1 \ S_2) \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix},$$

където $(-A)$ е $n \times n$ Z -матрица, $S_j = B_j R_{jj}^{-1} B_j^T$ за $j = 1, 2$, Q_j – симетрична квадратна матрица с размерност n , R_{jj} – симетрична квадратна матрица от съответна размерност, B_j – матрица с размерност $n \times m_j$, за $j = 1, 2$, а X_1, X_2 са неизвестните матрици. Ние ще използваме матрици от различни редове.

Реална $n \times n$ матрица A ще наричаме Z -матрица, ако съществува реално число s и $C \geq 0$ е $n \times n$ матрица, такава че $A = sI_n - C$, където I_n е единична матрица от ред n [1], реална $n \times n$ неособена матрица $A = (a_{ij})$ се нарича M -матрица, ако $a_{ij} \leq 0$ за $i \neq j$ и $A^{-1} \geq 0$ [5].

Системи от вида

$$\dot{x} = Ax + B_1 u_1 + B_2 u_2, \quad x(0) = x_0,$$

се наричат положителни, ако за всички неотрицателни начални състояния x_0 и неотрицателни функции на управление u_1 и u_2 , то векторът на състоянието $x(t)$ е неотрицателен във всеки един момент. За управление на положителни системи от горния вид е необходимо да се реши уравнение от вида (1). Методът на Нютон е приложен към решаването на уравнение (1) и това е направено от Jank, Kremer в [1].

Когато записваме $A > 0$ ($A \geq 0$) за матрица A с размерност $n \times m$ ще имаме предвид $a_{ij} > 0$ ($a_{ij} \geq 0$) за всяко $1 \leq i \leq n$ и $1 \leq j \leq m$, т.е. елементите на матрицата са положителни (неотрицателни). За разглежданията матриците Q и S са $Q_k \geq 0$, и $S_k \leq 0$, $k=1,2$. В хода на разсъжденията ще използваме факта, че матричното уравнение $AXB=C$ е еквивалентно на линейната система $(B^T \otimes A) \text{vec } X = \text{vec } C$, където vec означава трансформация на съответната матрица във вектор стълб, следвайки стълбовете на матрицата.

Метод на Нютон

В настоящето изследване ще представим два метода за решаване на уравнението (1). Първият метод е изследван и представен в [1] чрез итерационна формула (8):

$$(2) \quad -K_{i+1}(A - SK_i) - (D - K_i S)K_{i+1} = Q + K_i SK_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

където $D = \begin{pmatrix} A^T & 0 \\ 0 & A^T \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}$, $S = (S_1 \ S_2)$.

Това всъщност е методът на Нютон за (1). Въведен е разходен функционал:

$$(3) \quad J_i(u_1, u_2) = \int_0^\infty (x^T Q_i x + \sum_{j=1}^2 u_j^T R_{ij} u_j) dt, \quad \text{за } i = 1, 2,$$

който се минимизира, а входната функция u_i е стратегията на i -тия играч.

Сходимостта на метода е доказана с Теорема 1 (Теорема 5 в [1]):

Теорема 1. Нека в положително определената система

$$(4) \quad \dot{x} = Ax + B_1 u_1 + B_2 u_2, \quad x(0) = x_0,$$

матрицата $-A$ е M -матрица. За матриците Q и S във функционалите на разходите (3) се предполага, че $Q \geq 0$ и $S \leq 0$. Предполагаме допълнително, че съществува такова $P \geq 0$, че $R(P) \geq 0$, а редицата на Нютон $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $K_0 = 0$, е добре дефинирана и клони монотонно към решението $K \geq 0$. Решението K е най-малкото решение от множеството на всички неотрицателни решения.

В доказателството на Теорема 1. се използва Теорема 2:

Теорема 2. За Z -матрицата A са еквивалентни следните твърдения:

(i) A е M -матрица.

(ii) $A^{-1} \geq 0$.

(iii) $Av > 0$ за всеки вектор $v > 0$.

(iv) Всички собствени стойности на матрицата A имат положителни реални части, т.е. матрицата $-A$ е устойчива матрица.

Итерационен метод на Силвестър

За разсъжденията сега уравнението на Рикати (1) записваме във вида

$$P(X) := -\tilde{A}^T X - X \tilde{A} - \tilde{Q} + X \tilde{S} X + X^T \tilde{S} X^T = 0,$$

където $\tilde{A} = \text{diag}(A, A)$; $\tilde{Q} = \text{diag}(Q_1, Q_2)$; $\tilde{S} = \text{diag}(S_1, S_2)$;

$X = \text{diag}(X_1, X_2)$, $T = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$, I означава единична матрица от съответна размерност.

Заедно с това уравнението (1) записваме като две самостоятелни уравнения със събираеми, които ги свързват:

$$(5) \quad -A^T X_1 - X_1 A - Q_1 + X_1 S_1 X_1 + X_1 S_2 X_2 = 0$$

$$(6) \quad -A^T X_2 - X_2 A - Q_2 + X_2 S_1 X_1 + X_2 S_2 X_2 = 0$$

Преобразуваме уравненията:

$$-(A^T - X_1 S_1) X_1 - X_1 (A - S_2 X_2) - Q_1 = 0$$

$$-(A^T - X_2 S_2) X_2 - X_2 (A - S_1 X_1) - Q_2 = 0$$

Извеждаме следните итерационни формули:

$$(7) \quad -(A^T - X_1^{(i)} S_1) X_1^{(i+1)} - X_1^{(i+1)} (A - S_2 X_2^{(i)}) - Q_1 = 0$$

$$(8) \quad -(A^T - X_2^{(i)} S_2) X_2^{(i+1)} - X_2^{(i+1)} (A - S_1 X_1^{(i)}) - Q_2 = 0$$

Формулите (7)-(8) задават нов итерационен метод, който ще наричаме итерационен метод на Силвестър. Характерното за него е, че на всяка стъпка се решават две линейни матрични уравнения от типа „уравнения на Силвестър“. Уравненията (7)-(8) могат да се обединят по следния начин в матричен вид:

$$(9) \quad -(\tilde{A}^T - X^{(i)} \tilde{S}) X^{(i+1)} - X^{(i+1)} (\tilde{A} - T \tilde{S} X^{(i)} T) - \tilde{Q} = 0,$$

където $X^{(i)} = \text{diag}(X_1^{(i)}, X_2^{(i)})$. Записът (9) е еквивалентен с формула (7)-(8). Ще използваме уравнение (9), за да изследваме сходимостта на итерационния метод на Силвестър. Ще използваме матричната функция

$$P(X^{(0)}) := -(\tilde{A}^T - X^{(0)} \tilde{S}) X^{(0)} - X^{(0)} (\tilde{A} - T \tilde{S} X^{(0)} T) - \tilde{Q},$$

подсказана от вида на (9), или

$$P_1(X_1^{(0)}, X_2^{(0)}) := -(A^T - X_1^{(0)} S_1) X_1^{(0)} - X_1^{(0)} (A - S_2 X_2^{(0)}) - Q_1$$

$$P_2(X_1^{(0)}, X_2^{(0)}) := -(A^T - X_2^{(0)} S_2) X_2^{(0)} - X_2^{(0)} (A - S_1 X_1^{(0)}) - Q_2.$$

В следващата теорема ще изведем някои свойства на итерационния процес на Силвестър (7)-(8) за решаване на рикатиевото уравнение (1).

Теорема 3. Нека да предположим съществуването на две неотрицателни матрици $\tilde{X}$ и $X^{(0)}$, за които $X^{(0)} \leq \tilde{X}$, $P(X^{(0)}) \leq 0$ и $P(\tilde{X}) \geq 0$. Началната матрица $X^{(0)} = \text{diag}(X_1^{(0)}, X_2^{(0)})$ избираме, така че $-(A^T - X_1^{(0)} S_1)$ и $-(A^T - X_2^{(0)} S_2)$ са М-матрици. Тогава матричните редици $\{X_1^{(i)}, X_2^{(i)}\}_{i=0}^{\infty}$, дефинирани чрез (7)-(8), притежават следните свойства:

- (i) $X^{(i+1)} \geq X^{(i)}$, $i=0,1,2,\dots$;
- (ii) $X^{(i)} \leq \tilde{X}$ за $i=1,2,\dots$;
- (iii) $-(A^T - X_1^{(i)} S_1)$ и $-(A^T - X_2^{(i)} S_2)$ са М-матрици за $i=1,2,\dots$;
- (iv) Матричните редици $\{X_1^{(i)}, X_2^{(i)}\}_{i=0}^{\infty}$ са сходящи към неотрицателно решение $\tilde{X} = (\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)$ на уравнението (1), за което $\tilde{X} \leq \tilde{X}$.

Доказателство.

При доказателството на теоремата ще използваме фактите, че произведението на неотрицателни матрици е неотрицателна матрица, както и това, че ако три матрици А, В и С, за които: А и С са неотрицателни, а В е неположителна, то произведението им е неположителна матрица. От условието $P(X^{(0)}) \leq 0$ правим извод, че $P_1(X_1^{(0)}, X_2^{(0)}) = Q_{01} \leq 0$ и $P_2(X_1^{(0)}, X_2^{(0)}) = Q_{02} \leq 0$. Образуваме разликата между уравнение (7) при $i=0$ и $P_1(X_1^{(0)}, X_2^{(0)})$. Получаваме

$$-(A^T - X_1^{(0)} S_1)(X_1^{(1)} - X_1^{(0)}) - (X_1^{(1)} - X_1^{(0)})(A - S_2 X_2^{(0)}) - Q_1 + Q_1 = -Q_{10}$$

Последното е линейно матрично уравнение на Силвестър спрямо неизвестната матрица $X_1^{(1)} - X_1^{(0)}$. Дясната страна на това уравнение е неотрицателна матрица. Неговото решение намираме след решаване на линейната система уравнения:

$$\left[\left(-(A^T - X_2^{(0)} S_2) \right) \otimes I_n + I_n \otimes \left(-(A^T - X_1^{(0)} S_1) \right) \right] \text{vec}(X_1^{(1)} - X_1^{(0)}) = -\text{vec} Q_{10}$$

Означаваме

$$L_0 = - \left[\left(A^T - X_2^{(0)} S_2 \right) \otimes I_n + I_n \otimes \left(A^T - X_1^{(0)} S_1 \right) \right]$$

Уравнението записваме

$$L_0 \operatorname{vec}(X_1^{(1)} - X_1^{(0)}) = -\operatorname{vec} Q_{10}$$

Съгласно изискването за матрицата $X^{(0)}$ получаваме, че матрицата L_0 е М-матрица, а от Теорема 2 следва, че $L_0^{-1} \geq 0$ и тъй като $-\operatorname{vec} Q_{10} \geq 0$, то

$$\operatorname{vec}(X_1^{(1)} - X_1^{(0)}) = -L_0^{-1} \operatorname{vec} Q_{10} \geq 0,$$

което означава $X_1^{(1)} - X_1^{(0)} \geq 0$, или $X_1^{(1)} \geq X_1^{(0)}$, $X_2^{(1)} \geq X_2^{(0)}$. Следователно

$$X^{(1)} \geq X^{(0)}.$$

С това доказахме свойство (i) при $i=0$.

Сега ще докажем свойство (ii) при $i=1$. Знаем, че $-(A^T - X_1^0 S_1)$ и $-(A^T - X_2^{(0)} S_2)$ са М-матрици. Образоваме матрицата

$$(10) \quad (A^T - X_1^{(0)} S_1)(\hat{X}_1 - X_1^{(1)}) + (\hat{X}_1 - X_1^{(1)})(A - S_2 X_2^{(0)})$$

Ще докажем, че $\hat{X}_1 - X_1^{(1)}$ е неотрицателна матрица. Пресмятаме

$$(11) \quad (A^T - X_1^0 S_1)\hat{X}_1 - (A^T - X_1^0 S_1)X_1^1 + \hat{X}_1(A - S_2 X_2^0) - X_1^1(A - S_2 X_2^0) = \\ = A^T \hat{X}_1 - X_1^{(0)} S_1 \hat{X}_1 + \hat{X}_1 A - \hat{X}_1 S_2 X_2^{(0)} + Q_1.$$

Но

$$P_1(\hat{X}_1, \hat{X}_2) = -(A^T - \hat{X}_1 S_1) \hat{X}_1 - \hat{X}_1(A - S_2 \hat{X}_2) - Q_1 \\ = -A^T \hat{X}_1 - \hat{X}_1 A + \hat{X}_1 S_1 \hat{X}_1 + \hat{X}_1 S_2 \hat{X}_2 - Q_1,$$

$$\text{или} \quad A^T \hat{X}_1 + \hat{X}_1 A = -P_1(\hat{X}_1, \hat{X}_2) + \hat{X}_1 S_1 \hat{X}_1 + \hat{X}_1 S_2 \hat{X}_2 - Q_1.$$

След заместване в (11) достигаем до

$$-P_1(\hat{X}_1, \hat{X}_2) + \hat{X}_1 S_1 \hat{X}_1 + \hat{X}_1 S_2 \hat{X}_2 - Q_1 - X_1^0 S_1 \hat{X}_1 - \hat{X}_1 S_2 X_2^0 + Q_1 \\ = -P_1(\hat{X}_1, \hat{X}_2) + (\hat{X}_1 - X_1^0) S_1 \hat{X}_1 + \hat{X}_1 S_2 (\hat{X}_2 - X_2^0) = Z_1^1$$

По допускане $P(\hat{X}) \geq 0$, т.е. $P_1(\hat{X}_1, \hat{X}_2) \geq 0$, S_1 и S_2 са неположителни, $\hat{X}_1$ и $\hat{X}_2$ са неотрицателни, а също и $\hat{X}_k \geq X_k^{(0)}$ за $k=1,2$. Следователно последната матрица е неположителна, $Z_1^1 \leq 0$. Тогава матрицата (10) задава следното матрично уравнение

$$-(A^T - X_1^{(0)} S_1)(\hat{X}_1 - X_1^{(1)}) - (\hat{X}_1 - X_1^{(1)})(A - S_2 X_2^{(0)}) = -Z_1^1 \geq 0$$

или

$$L_0 \operatorname{vec}(\hat{X}_1 - X_1^{(1)}) = -\operatorname{vec} Z_1^1.$$

Следователно стигаем до извода, че $\hat{X}_1 - X_1^{(1)} \geq 0$, или $\hat{X}_1 \geq X_1^{(1)}$. След подобни разсъждения се доказва неравенството $\hat{X}_2 \geq X_2^{(1)}$. Следователно

$$\hat{X} \geq X^{(1)}.$$

С това доказахме свойство (ii) при $i=1$.

Сега ще докажем свойство (iii) при $i=1$. Трябва да докажем, че матриците $-(A^T - X_1^{(1)} S_1)$ и $-(A^T - X_2^{(1)} S_2)$ са М-матрици, т.е. че матрицата

$$L_1 = -[(A^T - X_2^{(1)} S_2) \otimes I_n + I_n \otimes (A^T - X_1^{(1)} S_1)]$$

е М-матрица или L_1^{-1} е неотрицателна ($L_1^{-1} \geq 0$). Да разгледаме следната матрица:

$$(\hat{X}_1 - X_1^{(1)})(A - S_2 X_2^{(1)}) + (A^T - X_1^{(1)} S_1)(\hat{X}_1 - X_1^{(1)})$$

Целта ни ще бъде да докажем, че матрицата е *неположителна* и тъй като $\tilde{X}_1 - X_1^{(1)} \geq 0$, то ще следва, че L_1 е М-матрица и следователно $\left(-\left(A^T - X_1^{(1)} S_1\right)\right)$ и $\left(-\left(A^T - X_2^{(1)} S_2\right)\right)$ са М-матрици.

Преобразуваме

$$\begin{aligned} & \left(\tilde{X}_1 - X_1^{(1)}\right)\left(A - S_2 X_2^{(1)}\right) + \left(A^T - X_1^{(1)} S_1\right)\left(\tilde{X}_1 - X_1^{(1)}\right) = \\ & = \tilde{X}_1\left(A - S_2 X_2^{(1)}\right) + \left(A^T - X_1^{(1)} S_1\right)\tilde{X}_1 - X_1^{(1)}\left(A - S_2 X_2^{(1)}\right) - \left(A^T - X_1^{(1)} S_1\right)X_1^{(1)}. \end{aligned}$$

Сега ще преобразуваме израза

$$\begin{aligned} & -X_1^{(1)}\left(A - S_2 X_2^{(1)}\right) - \left(A^T - X_1^{(1)} S_1\right)X_1^{(1)} = \\ & = -\left(A^T - X_1^{(0)} S_1 + X_1^{(0)} S_1 - X_1^{(1)} S_1\right)X_1^{(1)} - X_1^{(1)}\left(A - S_2 X_2^{(0)} + S_2 X_2^{(0)} - S_2 X_2^{(1)}\right) \\ & = -\left[A^T - X_1^{(0)} S_1 + \left(X_1^{(0)} - X_1^{(1)}\right)S_1\right]X_1^{(1)} - X_1^{(1)}\left[A - S_2 X_2^{(0)} + S_2\left(X_2^{(0)} - X_2^{(1)}\right)\right] \\ & = -\left(A^T - X_1^{(0)} S_1\right)X_1^{(1)} + \left(X_1^{(1)} - X_1^{(0)}\right)S_1 X_1^{(1)} \\ & \quad - X_1^{(1)}\left(A - S_2 X_2^{(0)}\right) + X_1^{(1)} S_2\left(X_2^{(1)} - X_2^{(0)}\right). \end{aligned}$$

Използваме итерационната формула (7) при $i=0$, за да продължим преобразованието:

$$\begin{aligned} & -X_1^{(1)}\left(A - S_2 X_2^{(1)}\right) - \left(A^T - X_1^{(1)} S_1\right)X_1^{(1)} = \\ & = Q_1 + W_{10}, \end{aligned}$$

където

$$W_{10} = \left(X_1^{(1)} - X_1^{(0)}\right)S_1 X_1^{(1)} + X_1^{(1)} S_2\left(X_2^{(1)} - X_2^{(0)}\right).$$

Тъй като $X_k^{(1)} - X_k^{(0)} \geq 0$, $S_k \leq 0$, $X_k^{(1)} \geq 0$, за $k=1,2$, то $W_{10} \leq 0$.

Вече може да продължим с преобразуването

$$\begin{aligned} & \left(\tilde{X}_1 - X_1^{(1)}\right)\left(A - S_2 X_2^{(1)}\right) + \left(A^T - X_1^{(1)} S_1\right)\left(\tilde{X}_1 - X_1^{(1)}\right) = \\ & = \tilde{X}_1\left(A - S_2 X_2^{(1)}\right) + \left(A^T - X_1^{(1)} S_1\right)\tilde{X}_1 + Q_1 + W_{10} \\ & \quad - \tilde{X}_1 A + A^T \tilde{X}_1 - \tilde{X}_1 S_2 X_2^{(1)} - X_1^{(1)} S_1 \tilde{X}_1 + Q_1 + W_{10} \\ & = +Q_1 + W_{10} \\ & \quad - P_1\left(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2\right) - Q_1 + \tilde{X}_1 S_1 \tilde{X}_1 + \tilde{X}_1 S_2 \tilde{X}_2 - \tilde{X}_1 S_2 X_2^{(1)} - X_1^{(1)} S_1 \tilde{X}_1, \end{aligned}$$

защото

$$P_1\left(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2\right) = A^T \tilde{X}_1 \quad \tilde{X}_1 A \quad Q_1 \mid \tilde{X}_1 S_1 \tilde{X}_1 \mid \tilde{X}_1 S_2 \tilde{X}_2.$$

Продължаваме веригата равенства:

$$\begin{aligned} & \left(\tilde{X}_1 - X_1^{(1)}\right)\left(A - S_2 X_2^{(1)}\right) + \left(A^T - X_1^{(1)} S_1\right)\left(\tilde{X}_1 - X_1^{(1)}\right) = \\ & = +Q_1 + W_{10} \\ & \quad - P_1\left(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2\right) - Q_1 + \left(\tilde{X}_1 - X_1^{(1)}\right)S_1 \tilde{X}_1 + \tilde{X}_1 S_2\left(\tilde{X}_2 - X_2^{(1)}\right) = \tilde{W}_{10}. \end{aligned}$$

Така стигнахме до равенството

$$(12) \quad \left(\tilde{X}_1 - X_1^{(1)}\right)\left(A - S_2 X_2^{(1)}\right) + \left(A^T - X_1^{(1)} S_1\right)\left(\tilde{X}_1 - X_1^{(1)}\right) = \tilde{W}_{10}.$$

Тъй като $\tilde{X}_k \geq 0$, $P_k(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2) \geq 0$, $\tilde{X}_k - X_k^{(1)} > 0$ за $k=1,2$, то $\tilde{W}_{10} \leq 0$. Разглеждаме матрицата $\tilde{X}_1 - X_1^{(1)}$ като неотрицателно решение на уравнението на Силвестър във вида

$$-(\tilde{X}_1 - X_1^{(1)})(A - S_2 X_2^{(1)}) - (A^T - X_1^{(1)} S_1)(\tilde{X}_1 - X_1^{(1)}) = -\tilde{W}_{10}.$$

Представяме решението:

$$0 \leq \text{vec}(\tilde{X}_1 - X_1^{(1)}) = -L_1^{-1} \text{vec} \tilde{W}_{10}, \quad (-\text{vec} \tilde{W}_{10} \geq 0).$$

Последното означава, че L_1^{-1} е неотрицателна матрица, т.е. матриците $(-(A^T - X_1^{(1)} S_1))$ и $(-(A^T - X_2^{(1)} S_2))$ са М-матрици. С това доказахме свойство (iii) при $i=1$.

По подобен начин може да се докажат свойствата (i), (ii) и (iii) за стойности на индекса $i > 1$. Може да се направи извод, че матричните редици от неотрицателни матрици $\{X_1^{(i)}, X_2^{(i)}\}_{i=0}^{\infty}$ са сходящи. Нека тяхната граница е двойката матрици: $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2$. Тази граница е неотрицателно решение на уравненията (5)-(6), а следователно и на уравнението (1). Тъй като всички членове на матричните редици са не по-големи от $\tilde{X}$, то следва че и техните граници ще удовлетворяват това свойство.

Числени експерименти

Сега ще опишем числени експерименти за пресмятане на неотрицателно решение на изследваното уравнение (1). За намиране на решението ще използваме описаните итерационни алгоритми – първи метод (метод на Нютон) и втори метод (итерационен метод на Силвестър). Ще формиране матричните коефициенти на уравнението (1) и след това с двата метода ще намерим решението. Тъй като матричните коефициенти формираме с функцията за случайни числа на Матлаб (R2009b) `randn`, то ще направим серия от експерименти. Ще фиксираме размерността на n и за всяка стойност на n сто пъти, а след това и хиляда пъти, ще формиране матричните коефициенти и ще търсим решението със всеки от описаните методи. Като резултат от експериментите за всяка стойност на n и всеки метод ще отбележим следните параметри: "Max It" – най-големият брой итерации от сто/хиляда повторения и "Av It" – средният брой итерации.

Матричните коефициенти формираме по следния начин:

$$A = \text{abs}(\text{randn}(n))/100$$

$$B_1 = \text{zeros}(n, 1); \quad B_1(1) = \text{abs}(\text{randn}(1,1))/2;$$

$$B_2 = \text{eye}(n, n); \quad B_2(n, n) = n/3;$$

$$Q_1 = Q_2 = \begin{pmatrix} n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad Q_1, Q_2 \text{ са } n \times n \text{ матрици,}$$

$$R_{11} = -1,$$

$$R_{22} = \begin{pmatrix} -40 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -40 \end{pmatrix}, R_{22} \text{ е } n \times n \text{ матрица.}$$

При метода на Нютон аритметичните операции на една итерация са три събиращения, пет изваждания, осем умножения и веднъж използване на функцията `lyap` на Матлаб за намиране решение на линейно матрично уравнение от типа „уравнение на Силвестър“, а при итерационния метод на Силвестър – четиринадесет изваждания, дванадесет умножения и два пъти използване на функцията `lyap`.

При реализацията на първия метод се използват $26n^2 + n + 1$ брой клетки от паметта на компютъра, а при втория – $17n^2 + n + 1$ брой клетки.

За провеждане на експеримента променяме размерността n : $n=4, 5, 6, 7$ и 8 . За всяка стойност на n провеждаме 100 повторения и 1000 повторения. Резултатите от тези две повторения са описани в следващите две таблици.

Таблица 1. Резултати при проведени 100 повторения

N	Метод на Нютон (2)		Итерационен метод на Силвестър (7)-(8)	
	Max It	Av It	Max It	Av It
4	4	3,070	12	5,300
5	4	3,100	12	5,630
6	4	3,160	14	6,030
7	6	3,310	55	7,140
8	4	3,220	15	6,620

Таблица 2. Резултати при проведени 1000 повторения

N	Метод на Нютон (2)		Итерационен метод на Силвестър (7)-(8)	
	Max It	Av It	Max It	Av It
4	4	3,101	15	5,557
5	4	3,155	13	5,796
6	5	3,194	20	6,099
7	6	3,245	34	6,428
8	5	3,291	23	6,767

Изводи

При метода на Нютон се решава линейно матрично уравнение на Силвестър, но участващите матрици са с по-голяма размерност. Итерационният метод на Силвестър има две предимства. Първо, използва по-малко памет, и второ, като използва формула (7) и намираме $X_1^{(i+1)}$, след това същото това $X_1^{(i+1)}$ замества в (8) и вместо (8) решаваме следното уравнение

$$-(A' - X_2^i S_2) X_2^{i+1} - X_2^{i+1} (A - S_1 X_1^{(i+1)}) - Q_2 = 0,$$

което води до ускорение в итерационния метод на Силвестър.

ЛИТЕРАТУРА

1. **G. Jank**, D. Kremer. Open loop Nash games and positive systems solvability conditions for non symmetric Riccati equations.
2. **Йорданов**, Й. Т. Matlab. Техника, София, 2007.
3. **Тренчев**, И., П. Миланов. Въведение в MATLAB. Югозападен университет „Неофит Рилски“.
4. **Караколева**, С., Е. Велева. Висша математика 3. Практикум по „Числени методи“ с MATLAB. Русенски университет „Ангел Кънчев“, Русе, 2004.
5. **Иванов**, И., М. Петков. Приложен матричен анализ. „Светлана“, Шумен, 2000.