Годишник на Шуменски университет „Епископ Константин Преславски“
Факултет по математика и информатика, том XIX C, 2018, стр. 117 - 128

# REALIZATION OF METHODOLOGICAL IDEAS REGARDING THE INDIVIDUAL WORK OF STUDENTS IN THE DISCIPLINE “MATHEMATICAL ANALYSIS”

LILYANA M. KARAKASHEVA

**ABSTRACT:** *The article discusses students' individual work in the process of their higher education both as a separate form of study, and as an integral part of the other organisational forms of education - lecture and seminar. The author presents different variants of task systems suitable for lecturer guided individual work, as well as tasks for students' individual work.*

**KEYWORDS:** *lecturer guided individual work, students' individual work, teaching mathematics in higher education*

# ВЪРХУ РЕАЛИЗАЦИЯТА НА МЕТОДИЧЕСКИ ИДЕИ ПРИ САМОСТОЯТЕЛНАТА РАБОТА НА СТУДЕНТИТЕ ПО ДИСЦИПЛИНАТА „МАТЕМАТИЧЕСКИ АНАЛИЗ“*

ЛИЛЯНА М. КАРАКАШЕВА

## Въведение

Акцентите в университетското обучение са върху формиране на ориентирани към практиката знания, умения и компетенции. Качеството на усвоените знания и придобитите умения е в пряка зависимост от интелектуалната и практическа

*Настоящата статия е частично финансирана от проект № РД-08-164/09.02.2018 към Шуменския университет „Епископ Константин Преславски“

дейност, която студентите извършват в процеса на обучение. Основен дял като хорариум, който е заложен в учебните програми по всяка дисциплина, заема самостоятелната работа на студентите. Тя се разглежда като отделна форма на обучение, но от друга страна – тя е неделима съставка на останалите организационни форми на обучение по математическите дисциплини-лекция и семинарно упражнение. Затова въпросът за организацията и управлението на самостоятелната работа на студентите във висшето училище е значим от дидактическа гледна точка.

## Изложение

Във висшето училище основният подход за въвеждане на понятията в математическите дисциплини е абстрактно-дедуктивният. Понятията се въвеждат чрез дефиниции и след това се конкретизират, а теоремите се формулират наготово и след това се доказват. Обемът на изучаваните теореми е голям. Известно е, че запомнянето и трайността на помненето на дадено знание зависят от редица фактори, някои от които са:

- „количеството и характера на проведените упражнения при усвояването му;
- степента на активност в дейностите при неговото усвояване“ [5, с.149].

Затова организацията на основните дейности на студентите определя в голяма степен ефективността на процеса на обучение. Особено място в този процес заема организацията на самостоятелната работа на студентите, която се разглежда в нейните две разновидности:

- самостоятелна работа на студентите под ръководството на преподавателя и
- студентска самостоятелна работа.

Самостоятелната работа на студентите под ръководството на преподавателя се планира и ръководи по-често от ръководителя на семинарните упражнения. Дългосрочната самостоятелна работа на студентите (курсов проект, подготовка за текущ контрол, подготовка за изпит, подготовка на научно съобщение за участие в студентска научна сесия и др.) се отнася към втората разновидност-студентска самостоятелна работа.

В настоящата публикация ще поставим акцент върху реализацията на текущата самостоятелна работа на студентите. След всяка тема от учебното съдържание по съответната дисциплина е целесъобразно да се дава подходящо подбрана система от задачи за самостоятелна работа. Подобни системи от задачи отсъстват от популярните сборници, които се препоръчват на студентите. Особено за студентите от първи курс е важно системите от задачи да са съставени според принципа за системност и последователност. Задачите трябва да са подредени по ниво на сложност. За някои задачи от заданието за самостоятелна работа е удачно да се дават и кратки упътвания.

Представяме вариант на *система от задачи за самостоятелна работа*, която може да се възложи на студентите след провеждане на първото упражнение по темата „Производна на функция на една променлива“ от учебната дисциплина „Математически анализ I част“.

**Задача 1.** Функциите $f$ и $g$ притежават производна в точката $x=0$ и $f(0)=0$, $g(0)=0$, $g'(0)\neq 0$. Докажете, че $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f'(0)}{g'(0)}$.

**Задача 2.** Нека $f(x)=(x-x_0)g(x)$, където $g$ е непрекъсната в точката $x_0$. Докажете, че $f'(x_0)=g(x_0)$.

**Задача 3.** Намерете едностранните производни на функцията $f(x)=|x-x_0|g(x)$ в точката $x_0$, където $g$ е непрекъсната функция в точката $x_0$. Има ли функцията $f$ производна в точката $x_0$?

**Задача 4**. Намерете производната на функцията $f$, дефинирана върху множеството $\mathbb{R}$ чрез:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-x+1, & \text{за } x\geq 1 \\ \dfrac{x^3}{3}+\dfrac{2}{3}, & \text{за } x<1 \end{cases}$$ в точката $x_0=1$.

**Задача 5.** Намерете производната на функцията $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ и покажете, че $f'$ е прекъсната в точката $x_0=0$.

**Задача 6.** При какви стойности на $n$, функцията $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, дефинирана с равенствата

$$f(x)=\begin{cases} x^n\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

а) е непрекъсната в точката $x_0=0$;

б) е диференцируема в точката $x_0=0$;

в) има непрекъсната първа производна в точката $x_0=0$

**Задача 7.** Нека функцията $f$ е дефинирана в околност на точката $x_0=0$. Означаваме $h=x-x_0$. Да дефинираме симетрична производна на $f$ в точката $x_0=0$ чрез $f_s'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$, когато тази граница съществува.

а) Покажете, че ако функцията $f$ притежава едностранни производни в точката $x_0 = 0$, то тя има симетрична производна в тази точка и $$f_s'(x_0) = \frac{1}{2}\left[f_-'(x_0) + f_+'(x_0)\right].$$

б) Покажете, че функцията $f$, дефинирана с равенствата: $f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, има симетрична производна в точката $x_0 = 0$, но не притежава нито лява, нито дясна производна в тази точка.

Последната задача от тази система задачи съдейства за *разширяване на знанията* на студентите върху разглежданата тема. Подобни задачи подготвят студентите за самостоятелна творческа дейност.

Педагогическият ни опит показва, че трудни се оказват онези въпроси от учебното съдържание, които в епохата на възникването им са си пробивали бавно и мъчително път в науката. Може да се предполага, че историческите трудности показват, че са възможни и психологически трудности и за съвременните студенти, запознаващи се с тези въпроси за първи път.

Интересно е да се отбележи, че физикът Вилхелм Вебер (1804–1894) просто не искал да повярва, че съществуват непрекъснати функции, които не са диференцируеми. Затова и бил шокиран, когато през 1872 г. Карл Вайерщрас (1815–1897) дал пример на функция, която е непрекъсната за всяко реално $x$ и не е диференцируема за никое реално $x$.

За да се разбере връзката между понятията „непрекъснатост“ и „диференцируемост на функция в точка“ не е достатъчно само доказването на съответната теорема.

Необходимо е да се разгледат от студентите много примери на непрекъснати функции с една или повече ъглови точки.

Ще припомним една мисъл на Исак Нютон „При изучаването на една наука примерите могат да бъдат толкова поучителни, колкото теорията“.

Затова е целесъобразно за самостоятелна работа на студентите да се предложи например следната *система от задачи*.

**Задача 1.** Докажете, че всяка от дадените непрекъснати функции не е диференцируема в посочените точки:

а) $f(x) = |x-1|e^x$, $\quad x = 1$;

б) $g(x) = e^{|x|}$, $\quad x = 0$;

в) $h(x) = 2x^2 - |x-1|$, $\quad x = 1$;

г) $\varphi(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2}$ , $\quad x = 1$.

**Задача 2.** Докажете, че всяка от дадените непрекъснати функции не е диференцируема в посочените точки:

а) $f(x) = |(x-2)(x-3)|$, $\quad x = 2, x = 3$;

б) $g(x) = |x^2 - 1|$, $\quad x = -1, x = 1$;

в) $\Psi(x) = |\sin x|$, $\quad x = k\pi, k \in Z$.

**Задача 3.** Изследвайте за диференцируемост в точката $x = 0$ функциите:

а) $f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{за } x \geq 0 \\ \sin x, & \text{за } x < 0 \end{cases}$;

б) $g(x) = \begin{cases} e^x, & \text{за } x \geq 0 \\ 1 + \sin x, & \text{за } x < 0 \end{cases}$.

**Задача 4.** Покажете, че функцията

$f(x)=\begin{cases} x, & \text{за } x\in \mathbf{Q} \\ -x, & \text{за } x\in \mathbf{I} \end{cases}$ е непрекъсната, но не е диференцируема в точката $x_0=0$.

**Задача 5.** Докажете, че функцията

$f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{за } x\in \mathbf{Q} \\ -x^2, & \text{за } x\in \mathbf{I} \end{cases}$ има производна само в точката $x_0=0$.

**Задача 6.** Нека $f:D\to\mathbb{R}$.

Кои от следните твърдения са верни:

а) Ако функцията $f, x\in D$ е диференцируема в точка $x_0\in D$, то тя е непрекъсната в точката $x_0$.

б) Ако функцията $f, x\in D$ е непрекъсната в точка $x_0\in D$, то тя е диференцируема в точката $x_0$.

в) Ако функцията $f, x\in D$ не е непрекъсната в точка $x_0\in D$, то тя не е диференцируема в точката $x_0$.

г) Ако функцията $f, x\in D$ не е диференцируема в точка $x_0\in D$, то тя не е непрекъсната в точката $x_0$.

Трябва да се подчертае важното значение на дейността „*съставяне на математическа задача*“ за усъвършенстване на уменията на студентите да решават задачи. Успешното реализиране на тази дейност „донася удоволствие и радост“ [19, с.85]. Трябва да отбележим също, че тази дейност има потенциал, както в методически, така и в психологически план, макар че на този етап тя е силно подценена. Затова е необходимо да се работи за интегриране на тази дейност в процеса на обучение във висшето училище.

Групата задачи от съставяне на функции по зададени свойства можем да отнесем към задачи от доказателства, тъй като при тяхното решаване е необходимо да се докаже съответствието между съставената функция и изискваните свойства.

**Задача.** Посочете пример на:

а) функция, която е непрекъсната в точката $x_0 = 1$, но не е диференцируема в тази точка;

б) функция, която е непрекъсната в интервала $[0,2]$, но не е диференцируема в точките $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 1$;

в) функция, която е непрекъсната в $\mathbb{R}$, но не е диференцируема в точките $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$;

г) функция, която е непрекъсната в $\mathbb{R}$, но не е диференцируема в краен брой точки $a_1, a_2, ..., a_n$ от $\mathbb{R}$;

д) функция, която е непрекъсната в $\mathbb{R}$, но не е диференцируема в безброй много точки $x_k = k, k \in Z$.

В раздела „Диференциално смятане на функция на една променлива“ е уместно да се зададе следната примерна *система от задачи за самостоятелна работа*.

**Задача 1.**

а) Докажете, че ако $f(x)$ е четна (нечетна) диференцируема функция, то $f'$ е нечетна (четна) функция;

б) Посочете пример за диференцируема функция, която не е нечетна, но нейната производна е четна.

**Задача 2.** Докажете, че ако функцията $f$ е периодична с период Т и диференцируема, то $f'$ е периодична със същия период. Вярно ли е обратното?

**Задача 3.** Съществува ли функция, която е ограничена и диференцируема върху $\mathbb{R}$, чиято производна върху $\mathbb{R}$ е функция, която не е ограничена.

**Задача 4.** Покажете, че свойството функцията да бъде неограничена върху множеството $\mathbb{R}$ при диференциране, не се запазва.

**Задача 5.** Докажете, че всяка неограничена и диференцируема функция в крайния интервал $(a,b)$ има производна, която е също неограничена функция в интервала $(a,b)$.

Според нас задаването на подобни системи от задачи за самостоятелна работа имат следните дидактически достойнства:

- съществено влияят на неформалното и дълбоко осмисляне на понятията нарастване на функция, граница и производна на функция на една реална променлива;
- помагат за откриване на връзки между новите понятия и вече изучени (диференцируемост и непрекъснатост; диференцируемост и четност/ нечетност; диференцируемост и периодичност; диференцируемост и ограниченост на функция);
- откриват нови свойства и отношения, които обикновено не са обект на разглеждане в учебната литература;
- усъвършенстват техниката на приложение на апарата на диференциалното смятане при решаване на различни задачи;
- развиват логическото мислене;
- стимулират нестандартното мислене.

Полезно е решенията на задачите от заданията за самостоятелна работа да се представят на преподавателя за проверка. Проверените и оценени текущи самостоятелни работи трябва да се връщат на студентите своевременно. Ако са забелязани значителни пропуски в знанията е добре да се възлагат допълнителни диференцирани самостоятелни работи. Индивидуални задания за самостоятелна работа е добре да се предлагат и на студентите с ярко изразени математически способности [20].

Онези студенти, които са работили регулярно върху заданията за текуща самостоятелна работа, участват активно и съзнателно и в процеса на самите семинарни упражнения. Те усвояват учебното съдържание по-задълбочено и по-трайно [11]. Защото системната подготовка по учебната дисциплина гарантира движението на учебното познание през естествените етапи на възприемане, разбиране и приложение на учебното съдържание. А последователното преминаване през тези етапи осигурява формиране на съответните компетенции. Затова считаме, че системността в подготовката трябва да се отчита при формиране на окончателната оценка по съответната учебна дисциплина, т.е. има смисъл да се прилага процесуалното оценяване по отношение на тази характеристика на процеса на учене, която се състои в системността на ученето.

Подготовката за текущ контрол може също да се подпомогне чрез предлагане на специално разработени задания за самостоятелна работа. Два примерни варианта на студентска самостоятелна работа за подготовка за текущ контрол са предложени в статията [12]. Тези варианти са върху темата „Неопределен интеграл". Изборът на задачите е според типологията на П. Пидкасисти, която разглеждаме в тази публикация. При решаването на тези задачи познавателната дейност на студентите има както възпроизвеждащ, така и творчески характер.

Един модел за формиране на окончателната оценка на студента по съответната дисциплина, при който се отчитат резултатите от текущата самостоятелна работа, така и резултатите от текущия контрол, се разглежда в публикацията [9]. Считаме, че този модел за оценяване във висшето училище е по –подходящ от често срещаната резултативна стратегия за оценяване.

## Заключение

Разгледаните системи от задачи са от учебната дисциплина „Математически анализ I част", която е основна учебна дисциплина в обучението на студентите от много специалности.

Идеите за организацията, реализацията и управлението на самостоятелната работа на студентите по тази дисциплина са приложими от университетските преподаватели и по други математически дисциплини.

**ЛИТЕРАТУРА:**


[1] Берман, Г. Сборник задач по курсу математического анализа, Наука, М., 1975

[2] Ганчев, Ив. Основни учебни дейности в урока по математика (синтез на резултати от различни изследвания), ИФ Модул-96, С., 1999

[3] Ганчев, Ив., Върбанова, М. Методика на обучението по математика (специална част). Изд. Астрата, В. Търново, 2002

[4] Ганчев, Ив., Нинова, Ю., Никова, В. Методика на обучението по математика (обща част) , Университетско издателство „Неофит Рилски”, Благоевград, 2002

[5] Ганчев, Ив. Математиката в системата на учебните предмети и практиката, Университетско издателство “Неофит Рилски”, Благоевград, 2007

[6] Гнеденко, Б. В. Математическое образование в ВУЗАХ, Высшая школа, М., 1981

[7] Демидович ,Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу, Наука, М., 1977

[8] Каган, В.И., Сычеников, И. А. Основы оптимизации процесса обучения в высшей школе, Высшая школа, М., 1987

[9] Каракашева, Л. Контролът и оценката в семинарните упражнения, Сборник научни трудове от национална конференция с международно участие „40 години Шуменски университет 1971-2011“, Ш., 2011, стр.241-245

[10] Каракашева, Л. Самостоятелната работа на студентите в процеса на обучение във висшето училище, Сборник от доклади от международна научно-практическа конференция, В., 2015, стр.375-390

[11] Каракашева, Л. Съвременен модел на семинарни упражнения, осигуряващ повишаване ефективността на обучението по Математически анализ, Сборник Математика и математическо образование в България , С., 2012, стр.351-358

[12] Каракашева, Л. Един подход за класификация на самостоятелната работа на студентите, Годишник на ШУ „Епископ Константин Преславски“, Том XVII C, ФМИ, Ш., 2016, с.167-172

[13] Котов, В.Е. Психолого – педагогические основы управления процессом обучения в ВУЗЕ, Высшая школа, К.,1976

[14] Кудрявцев, Л. Д. Мисли за съвременната математика и нейното изучаване, Издателство „Техника“, С., 1982

[15] Низамов, Р. А. Дидактические основы активизации учебной деятельности студентов, Издателство Казанского университета, К., 1975

[16] Потоцкий, М. В. Преподавание высшей математики в педагогическом институте, Просвещение, М., 1975

[17] Проданов, Ив. и др. Сборник от задачи по диференциално и интегрално смятане, Наука и изкуство, С., 1976

[18] Ganchev, Iv., Grozdev, S. On Two Fundamental Approaches to the Development of Scientific Knowledge and their Implementation in Didactics of Mathematics, Proceedings of the 6-th Mediterranean Conference on Mathematics Education, Plovdiv, 2009, p.17-27

[19] Grozdev, S. For High Achievements in Mathematics, The Bulgarian Experience (Theory and Practice), Sofia, 2007

[20] Karakasheva, L. Individualisation and Differentiation through Individual Work in teaching Mathematical Disciplines in Higher Education, Science and Education a New Dimension, Pedagogy and Psychology, V(51), Issue: 112, 2017, p.22-23

**Лиляна Каракашева**
ФМИ, ШУ „Епископ Константин Преславски”
E-mail: l.karakasheva@shu.bg