Annual of Konstantin Preslavsky University of Shumen
Faculty of Mathematics and Informatics , vol. XIX C, 2018, pp. 129- 148

AN ESTIMATE FOR THE NUMBER OF ZEROS OF ONE MULTIVALUED FUNCTION, PART I*

Ana D. Mihajlova

ABSTRACT: *The article finds an estimate from above for the number of zeros of a helper function. This function arises in considering the infinitesimal version of the 16th Hilbert Problem for cubic Hamiltonians with two centers and two saddles.*

KEYWORDS: *16-th Hilbert's problem, zeros of Abelian integrals*

ОЦЕНКА ЗА БРОЯ НА НУЛИТЕ НА ЕДНА МНОГОЗНАЧНА ФУНКЦИЯ, ЧАСТ I-ВА

Ана Д. Михайлова

АБСТРАКТ: *В статията е намерена оценка отгоре за броя на нулите на една помощна функция, която възниква при разглеждането на инфинитезималната версия на 16-тия Хилбертов проблем за кубични Хамилтониани с два центъра и две седлови точки.*

КЛЮЧОВИ ДУМИ: *16-ти проблем на Хилберт, нули на Абелеви интеграли*

1 Глава I: Увод. Въвеждане на функцията $G_2(h)$.

Поставеният през 1900 година знаменит 16-ти Хилбертов проблем (неговата втора част) изисква намирането на горна граница за броя на граничните цикли на полиномиално векторно поле в равнината, зависеща само от степените на полиномите (виж [12]). В тази си форма проблемът е далеч от своето решение. Поради тази причина са формулирани няколко

*Partially supported by Scientific Research Grant RD-08-119/2018 of Konstantin Preslavski University of Shumen, Bulgaria.

негови отслабени версии. Една от тях е инфинитезималният 16-ти Хилбертов проблем, поставен от В.И.Арнолд през 1977 година [1, 2] повлиян от работата на Ю.Иляшенко [18]. Ще приведем неговата формулировка. Нека $H(x,y)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ е реален полином от степен m (ще го наричаме Хамилтониан) и $f(x,y)$, $g(x,y)$ са два реални полинома от степен ненадвишаваща n. Нека $\Sigma \subset \mathbb{R}$ е множеството от реални числа, за които съществува затворена ограничена компонента $\delta(h)$ на линията на ниво $\Gamma_h = \{H(x,y) = h\}$, неминаваща през критични точки. Да дефинираме пълния Абелев интеграл

$$I(h) = \int\limits_{\delta(h)} [g(x,y)dx - f(x,y)dy] \quad , \qquad h \in \Sigma\,.$$

Инфинитезималният Хилбертов проблем изисква да се намери оценка $Z(m,n)$ за броя на нулите на Абелевия интеграл $I(h)$ за $h \in \Sigma$ зависеща само от степените на полиномите $H(x,y)$, $f(x,y)$, $g(x,y)$.

Да припомним накратко връзката между 16-тия проблем на Хилберт и инфинитезималния Хилбертов проблем. Да разгледаме пертурбираната Хамилтонова система:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= H_y + \epsilon f(x,y)\ ; \\ \dot{y} &= -H_x + \epsilon g(x,y)\ , \end{aligned}$$

където ϵ е малък параметър, а $H(x,y)$, $f(x,y)$, $g(x,y)$ са както по-горе. Броят на изолираните нули на $I(h)$ за $h \in \Sigma$, с отчитане на тяхната кратност, е горна граница за броя на онези гранични цикли на пертурбираната Хамилтонова система, които са близки за $\epsilon \to 0$ до някой неминаващ през критични точки овал на съответната непертурбирана Хамилтонова система:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= H_y\ ; \\ \dot{y} &= -H_x\ . \end{aligned} \tag{1.1}$$

1984 година А.Варченко [28] и А. Хованский [22] независимо един от друг доказват, че съществува крайна оценка $Z(m,n)$. Обаче тяхната оценка не зависи експлицитно от m и n.

Напоследък в серия от работи: [4, 5], авторите намират конструктивно решение на инфинитезималния Хилбертов проблем. Тяхната оценка е двойно експоненциална и е базирана на предишни работи на Ю. Иляшенко, С.Яковенко и Д. Новиков [30, 19, 25, 11].

Многочислен списък от статии, които третират различни аспекти на 16-тия Хилбертов проблем или на инфинитезималния хилбертов проблем може да бъде намерен например в [20, 21, 23, 31] и в техните референси.

Точна оценка е намерена само за $Z(3,2)$, а именно $Z(3,2) = 2$ ([14, 7]). В работите [6, 7, 13, 14, 29, 24, 16, 17, 9, 10, 32, 33, 34] са получени оценки по-добри от споменатата по- горе двойна експоненциална оценка за Хамилтониани от ниска степен.

В настоящата работа е получена оценка отгоре за броя на нулите на една помощна функция възникваща при разглеждането на инфинитезималния 16-ти Хилбертов проблем за кубични Хамилтониани с два центъра и две седлови точки.

Текстът е структуриран както следва:В Глава I-ва указваме вида на Хамилтонианите, за които се отнася настоящата статия и въвеждаме функцията $G_2(h)$. В Глава II- ра с помощта на Принципа на аргумента оценяваме отгоре броя на нулите на $G_2(h)$ в подходяща комплексна област.

Привеждаме доказателството само на основния резултат - Теорема 2.4. Доказателството на останалите теореми и леми е аналогично на доказателството на съответните им твърдения от [24], [16].

Настоящата работа е свързана с инфинитезималния 16-ти Хилбертов проблем за кубични Хамилтониани с реални коефициенти от вида:

$$H(x,y) = \tfrac{x^2+y^2}{2} + Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 \quad , \quad (x,y) \in \mathbf{R}^2 \quad . \tag{1.2}$$

Ние предполагаме,че Хамилтонианите от (1.2) удовлетворяват следните две предположения:

- (**A1**) Съответната непертурбирана Хамилтонова система (1.1) притежава четири критични точки, като две от тях са седлови точки, а другите две са центрове.
- (**A2**) Съответните критични стойности на $H(x,y)$ са различни помежду си.

Забележка 1.1. От предположението (**A2**) следва, че $BC \neq 0$. Освен това, можем да приемем, че $B^2 - 4AC < 0$. Ако $B^2 - 4AC = 0$, $H(x,y)$ няма да притежава четири различни критични точки.

Известно е, че Хамилтоновите функции $H(x, y)$, които притежават свойствата (**A1**) и (**A2**), образуват отворено подмножество в пространството на всички реални кубични Хамилтониани.

От [15] знаем,че за критичните стойности h_1, h_2, h_3, h_4 на H, при направените предположения, са валидни следните неравенства:

$$0 = h_1 < h_2 < h_3 < h_4 \quad .$$

Критичните стойности h_1 и h_4 отговарят на двата центъра, а критичните стойности h_2 и h_3 - на двете седлови точки. За тези Хамилтониани, също така, е в сила: $\Sigma = (h_1, h_2) \cup (h_3, h_4)$ (Σ - максималният интервал на съществуване на непрекъсната фамилия от овали на $\{H(x, y) = h\}$, неминаващи през критични точки).

Нека означим изчезващия цикъл в точката h_j с $\gamma_j(h)$, $j = 1, 2, 3, 4$. Ясно е, че $\delta(h) \equiv \gamma_1(h)$ за $h \in (h_1, h_2)$ и $\delta(h) \equiv \gamma_4(h)$ за $h \in (h_3, h_4)$. Извършваме последователно следните смени на променливите:

$$z = y(1 + 2Cx) + Bx^2 \quad ; \tag{1.3}$$

$$\begin{cases} x \to mx + n \quad , \\ m = \frac{\sqrt{D}}{8AC-2B^2}, \quad n = -\frac{A+C}{8AC-2B^2} \quad , \\ D = (A - C)^2 + 2(A^2 + B^2 + C^2) \quad ; \end{cases} \tag{1.4}$$

$$z \to \frac{D}{\sqrt{8|B^2 - 4AC|^3}} z \quad . \tag{1.5}$$

Тези смени привеждат Γ_h в нормалната форма:

$$\Gamma_h = \left\{ \pm\frac{1}{2} z^2 = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \alpha x + \beta \right\} \quad , \tag{1.6}$$

където

$$\alpha = \frac{2\sqrt{D}\left[(A + C)((A - C)^2 + B^2) - 4Ch(B^2 - 4AC)^2\right]}{D^2} \quad ,$$

$$\beta = \frac{32(B^2+C^2-3AC)(B^2-4AC)^2 h - (3A^2-10AC+4B^2+3C^2)(A+C)^2}{4D^2} \quad .$$

Знакът в (1.6) съвпада със знака на $B^2 - 4AC$. Извършвайки линейна смяна на h:

$$h \to -\frac{D^{\frac{3}{2}}}{8C(B^2-4AC)^2}h \quad , \tag{1.7}$$

получаваме, че $\alpha = h + \alpha_1$ и $\beta = \beta_1 h + \beta_2$.
Смените (1.3), (1.4), (1.5), (1.7) и нормалната форма (1.6) са заимствувани от [8].

Ще отбележим, че всяка затворена орбита на системата (1.1), която се съдържа в линията на ниво $\left\{\frac{x^2+y^2}{2} + Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 = h\right\}$ е овал на алгебричната крива (1.6). Обратното не е вярно - овалите на алгебричната крива (1.6) не са задължени да произлизат непременно от затворени орбити на (1.1).

Нека означим образите на $I(h)$, $\gamma_j(h)$, ($j = 1,2,3,4$), след горните смени на променливите съответно с $\widetilde{I}(h)$, $\widetilde{\gamma}_j(h)$, $j = 1,2,3,4$. Въвеждаме числата μ, ν, ρ, които ще използуваме многократно като степени на полиноми:

$$\mu = \left[\frac{n-2}{3}\right] \ ; \quad \nu = \left[\frac{n-3}{3}\right] \ ; \quad \rho = \left[\frac{n-1}{3}\right] \ . \tag{1.8}$$

за всяко $n \in \mathbf{N}$.

Лема 1.2. *За $\widetilde{I}(h)$ са в сила следните декомпозиции:*

$$\begin{aligned}
&\widetilde{I}(h) = \widetilde{u}_\mu(h) \int\limits_{\widetilde{\gamma}_1(h)} zdx + \widetilde{v}_\mu(h) \int\limits_{\widetilde{\gamma}_1(h)} \tfrac{zdx}{(x+\beta_1)^2} + \\
&\widetilde{w}_\nu(h) \int\limits_{\widetilde{\gamma}_1(h)} (x+\beta_1)zdx + \widetilde{s}_\rho(h) \int\limits_{\widetilde{\gamma}_1(h)} \tfrac{zdx}{x+\beta_1} \quad , \text{за} \quad h \in (h_1, h_2) \ ; \\
&\widetilde{I}(h) = \widetilde{u}_\mu(h) \int\limits_{\widetilde{\gamma}_4(h)} zdx + \widetilde{v}_\mu(h) \int\limits_{\widetilde{\gamma}_4(h)} \tfrac{zdx}{(x+\beta_1)^2} + \\
&\widetilde{w}_\nu(h) \int\limits_{\widetilde{\gamma}_4(h)} (x+\beta_1)zdx + \widetilde{s}_\rho(h) \int\limits_{\widetilde{\gamma}_4(h)} \tfrac{zdx}{x+\beta_1} \quad , \text{за} \quad h \in (h_3, h_4) \ ;
\end{aligned} \tag{1.9}$$

където $\widetilde{u}_\mu(h)$, $\widetilde{v}_\mu(h)$, $\widetilde{w}_\nu(h)$, $\widetilde{s}_\rho(h)$ са полиноми на h от степени: $deg\,\widetilde{u}_\mu(h) = deg\,\widetilde{v}_\mu(h) = \mu$; $deg\,\widetilde{w}_\nu(h) = \nu$; $deg\,\widetilde{s}_\rho(h) = \rho$. Тези полиноми са едни и същи и както когато $h \in (h_1, h_2)$, така и когато $h \in (h_3, h_4)$. (Ако степента е отрицателна, съответният полином се взема да бъде тъждествено равен на нула).

Да припомним, че бележим изчезващия цикъл в точката h_j с $\gamma_j(h)$, $j = 1, 2, 3, 4$. С $< \gamma_i \circ \gamma_j >$ ще бележим индекса на пресичане на циклите γ_i и γ_j.

В статията [15] е получена матрицата от индексите на пресичане на циклите γ_j, $j = 1, 2, 3, 4$. Тя е следната:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & +1 & +1 & +1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & +1 & +1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.10}$$

където елементите $a_{i,j}$ на A се пресмятат по формулата $a_{i,j} =< \gamma_i \circ \gamma_j >$, $1 \le i, j \le 4$.

От същата статия знаем базисите на $H_1(\Gamma_h, \mathbf{Z})$ и на $H_1(\overline{\Gamma_h}, \mathbf{Z})$ - първите хомологични групи съответно на алгебричната крива Γ_h и на нейната компактификация $\overline{\Gamma_h}$. По - точно: циклите γ_1, $\gamma_1 + \gamma_2$, $\gamma_1 + \gamma_3$, γ_4 образуват базис на $H_1(\Gamma_h, \mathbf{Z})$, а циклите γ_1 и γ_2 са генератори на $H_1(\overline{\Gamma_h}, \mathbf{Z})$. Циклите γ_3, γ_4 също могат да бъдат избрани за генератори на $H_1(\overline{\Gamma_h}, \mathbf{Z})$.

Циклите γ_2 и γ_3 са хомологични върху $\overline{\Gamma_h}$.
Циклите γ_4 и $\gamma_1 + \gamma_2$ също са хомологични върху $\overline{\Gamma_h}$.
Обаче γ_2 и γ_3 са различни помежду си , разглеждани като елементи на $H_1(\Gamma_h, \mathbf{Z})$. Същото важи и за γ_4 и $\gamma_1 + \gamma_2$ - те не са хомологични върху Γ_h.

И двата цикъла $\gamma_4 - \gamma_1 - \gamma_2$ и $\gamma_2 - \gamma_3$ могат да се представят като обединения на малки окръжности около трите безкрайни точки на Римановата повърхнина Γ_h.

За взаимното разположение на трите безкрайни точки на $\overline{\Gamma_h}$ спрямо $\gamma_1 + \gamma_2$, $\gamma_1 + \gamma_3$, γ_4 има само една възможност: по една безкрайна точка между всеки два от тези цикли. Но за взаимното разположение на трите безкрайни точки една спрямо друга има 6 възможности, на които отговарят различни връзки между $\int\limits_{\gamma_j} x^i y^m dx$ за $j = 1, 2, 3, 4$. За описването на тези връзки ще използуваме дискретните функции $\varphi(k)$ и $\psi(k)$.Следват формулите, с които се задават $\varphi(k)$ и $\psi(k)$:

$$\begin{aligned} \varphi(k) &= \tfrac{1}{30}(k-3)(k-4)(2k-7)(k^2-7k+5) \quad ; \\ \psi(k) &= \tfrac{1}{24}(k-1)(k-6)(2k-7)(-k^2+7k-8) \quad . \end{aligned}$$

С k $(k = 1, 2 \ldots, 6)$ сме означили номера на поредната разглеждана възможност. $\varphi(k)$ и $\psi(k)$ приемат следните стойности:

$$(1.11) \qquad \begin{cases} \varphi(1) = 1\,, \\ \varphi(2) = 1\,, \\ \varphi(3) = 0\,, \\ \varphi(4) = 0\,, \\ \varphi(5) = -1\,, \\ \varphi(6) = -1\,. \end{cases} ; \qquad \begin{cases} \psi(1) = 0\,, \\ \psi(2) = 1\,, \\ \psi(3) = 1\,, \\ \psi(4) = -1\,, \\ \psi(5) = -1\,, \\ \psi(6) = 0\,. \end{cases} .$$

Интересуваме се от връзките между $\int\limits_{\gamma_j} x^i y^m dx$ за $j = 1, 2, 3, 4$, когато i приема стойности 0 и 1, а m приема стойности 1 и 2.След като пресметнем резидуумите на базисните диференциални форми в безкрайните точки , стигаме до следните релации:

(1.12)

$$\int\limits_{\gamma_3} [y]_h' \, dx = \int\limits_{\gamma_2} [y]_h' \, dx \quad ;$$

$$\int\limits_{\gamma_3} [xy]_h' \, dx = \int\limits_{\gamma_2} [xy]_h' \, dx + \tfrac{2\pi i}{\sqrt{\Delta}} \varphi(k) \quad ;$$

$$\int\limits_{\gamma_3} [y^2]_h' \, dx = \int\limits_{\gamma_2} [y^2]_h' \, dx + \tfrac{2\pi i}{C} \left\{ 1 + 3\left([\varphi(k)]^2 - 1 \right) - \tfrac{B}{\sqrt{\Delta}} \varphi(k) \right\} \quad ;$$

$$\int\limits_{\gamma_3} [xy^2]_h' \, dx = \int\limits_{\gamma_2} [xy^2]_h' \, dx +$$
$$\tfrac{\pi i}{C^2} \left\{ 3\left(1 - [\varphi(k)]^2 \right) - 1 + \varphi(k) \tfrac{B}{\Delta\sqrt{\Delta}} [\Delta - 2C(A + C)] \right\} \quad .$$

(1.13)

$$\int\limits_{\gamma_4} [y]_h' \, dx = \int\limits_{\gamma_2 + \gamma_1} [y]_h' \, dx \quad ;$$

$$\int\limits_{\gamma_4} [xy]_h' \, dx = \int\limits_{\gamma_2 + \gamma_1} [xy]_h' \, dx + \tfrac{2\pi i}{\sqrt{\Delta}} \psi(k) \quad ;$$

$$\int\limits_{\gamma_4} [y^2]_h' \, dx = \int\limits_{\gamma_2 + \gamma_1} [y^2]_h' \, dx + \tfrac{2\pi i}{C} \left\{ -1 + 3\left(1 - [\psi(k)]^2 \right) - \tfrac{B}{\sqrt{\Delta}} \psi(k) \right\} \quad ;$$

$$\int\limits_{\gamma_4} [xy^2]_h' \, dx = \int\limits_{\gamma_2 + \gamma_1} [xy^2]_h' \, dx +$$
$$\tfrac{\pi i}{C^2} \left\{ 1 + 3\left([\psi(k)]^2 - 1 \right) + \psi(k) \tfrac{B}{\Delta\sqrt{\Delta}} [\Delta - 2C(A + C)] \right\} \quad .$$

В (1.12) и (1.13) k приема стойности от 1 до 6.

Налице са следните връзки между производните на базисните Абелеви интеграли преди смените на променливите (1.3), (1.4), (1.5), (1.7) и базисните Абелеви интеграли след тези смени:

$$\left[\int\limits_{\widetilde{\delta}(h)} (x+\beta_1)z\,dx\right]' = \frac{\sqrt{D}}{\sqrt{2}m^2\sqrt{|\Delta|}}\left\{-\frac{1}{4C^2}\left[\int\limits_{\delta(h)} y\,dx\right]' - \frac{1}{C}\left[\int\limits_{\delta(h)} xy\,dx\right]' + \frac{1}{2B}\left[\int\limits_{\delta(h)} y^2\,dx\right]' + \frac{C}{B}\left[\int\limits_{\delta(h)} xy^2\,dx\right]'\right\} \quad ;$$

(1.14)

$$\left[\int\limits_{\widetilde{\delta}(h)} z\,dx\right]' = -\frac{\sqrt{D}}{\sqrt{2}m\sqrt{|\Delta|}}\left\{\frac{1}{2C}\left[\int\limits_{\delta(h)} y\,dx\right]' + \left[\int\limits_{\delta(h)} xy\,dx\right]'\right\} \quad ;$$

$$\left[\int\limits_{\widetilde{\delta}(h)} \frac{z}{x+\beta_1}\,dx\right]' = -\frac{\sqrt{D}}{\sqrt{2}\sqrt{|\Delta|}}\left[\int\limits_{\delta(h)} y\,dx\right]' \quad ;$$

$$\left[\int\limits_{\widetilde{\delta}(h)} \frac{z}{(x+\beta_1)^2}\,dx\right]' = \frac{\sqrt{2}C\sqrt{D}m}{\sqrt{|\Delta|}}\left\{-\left[\int\limits_{\delta(h)} y\,dx\right]' + 2C\left[\int\limits_{\delta(h)} xy\,dx\right]' + \frac{2C^2}{B}\left[\int\limits_{\delta(h)} y^2\,dx\right]'\right\} \quad ,$$

където $m = -\frac{\sqrt{D}}{2\Delta}$.

До края на настоящата работа ще използваме диференциалните едно - форми ω_j, $j = 0, 1, 2, 3$, дефинирани с равенствата:

$$\left\{\begin{array}{ll} \omega_0 = \frac{dx}{z} \quad ; & \omega_1 = \frac{x+\beta_1}{z}dx \quad ; \\ \omega_2 = \frac{dx}{z(x+\beta_1)} \quad ; & \omega_3 = \frac{(x+\beta_1)^2}{z}dx \quad . \end{array}\right. \tag{1.15}$$

Тези 1- форми възникват по следния начин:

$$(1.16)\qquad \begin{array}{ll} \left[\int\limits_{\widetilde{\gamma}_j} \frac{z}{(x+\beta_1)}dx\right]' = \int\limits_{\widetilde{\gamma}_j} \omega_0 \ ; & \left[\int\limits_{\widetilde{\gamma}_j} zdx\right]' = \int\limits_{\widetilde{\gamma}_j} \omega_1 \ ; \\ \left[\int\limits_{\widetilde{\gamma}_j} \frac{z}{(x+\beta_1)^2}dx\right]' = \int\limits_{\widetilde{\gamma}_j} \omega_2 \ ; & \left[\int\limits_{\widetilde{\gamma}_j} (x+\beta_1)zdx\right]' = \int\limits_{\widetilde{\gamma}_j} \omega_3 \ . \end{array}$$

От (1.12), (1.13), (1.14), (1.16) извличаме следните релации:

$$(1.17)\qquad \begin{array}{l} \int\limits_{\widetilde{\gamma}_3} \omega_0 = \int\limits_{\widetilde{\gamma}_2} \omega_0 \\ \int\limits_{\widetilde{\gamma}_3} \omega_1 = \int\limits_{\widetilde{\gamma}_2} \omega_1 + 2\pi i\sqrt{2}\sqrt{sgn\Delta}\varphi(k) \\ \int\limits_{\widetilde{\gamma}_3} \omega_2 = \int\limits_{\widetilde{\gamma}_2} \omega_2 - \frac{2\pi i\sqrt{2}C^2D}{B\Delta\sqrt{|\Delta|}}\left[3[\varphi(k)]^2 - 2\right] \\ \int\limits_{\widetilde{\gamma}_3} \omega_3 = \int\limits_{\widetilde{\gamma}_2} \omega_3 + 2\pi i 2\sqrt{2}\beta_1\sqrt{sgn\Delta}\varphi(k) \end{array}$$

$$(1.18)\qquad \begin{array}{l} \int\limits_{\widetilde{\gamma}_4} \omega_0 = \int\limits_{\widetilde{\gamma}_2+\widetilde{\gamma}_1} \omega_0 \\ \int\limits_{\widetilde{\gamma}_4} \omega_1 = \int\limits_{\widetilde{\gamma}_2+\widetilde{\gamma}_1} \omega_1 + 2\pi i\sqrt{2}\sqrt{sgn\Delta}\psi(k) \\ \int\limits_{\widetilde{\gamma}_4} \omega_2 = \int\limits_{\widetilde{\gamma}_2+\widetilde{\gamma}_1} \omega_2 - \frac{2\pi i\sqrt{2}C^2D}{B\Delta\sqrt{|\Delta|}}\left[2 - 3[\psi(k)]^2\right] \\ \int\limits_{\widetilde{\gamma}_4} \omega_3 = \int\limits_{\widetilde{\gamma}_2+\widetilde{\gamma}_1} \omega_3 + 2\pi i 2\sqrt{2}\beta_1\sqrt{sgn\Delta}\psi(k) \end{array}$$

В (1.17) и (1.18) k приема стойности от 1 до 6.

Нека с $J(h)$ означим израза

$$J(h) = \frac{d}{dh}\left\{\widetilde{u}_\mu(h)\int\limits_{\widetilde{\gamma}_1(h)} zdx + \widetilde{v}_\mu(h)\int\limits_{\widetilde{\gamma}_1(h)} \frac{zdx}{(x+\beta_1)^2} + \right.$$

$$\left. \widetilde{w}_\nu(h)\int\limits_{\widetilde{\gamma}_1(h)} (x+\beta_1)zdx + \widetilde{s}_\rho(h)\int\limits_{\widetilde{\gamma}_1(h)} \frac{zdx}{x+\beta_1} \right\},$$

Понеже $\widetilde{I}(h_1) = 0$, следва, че броят на нулите на $J(h)$ в интервала (h_1, h_2) е горна граница за броя на нулите на $\widetilde{I}(h)$ в този интервал.

Като следствие от (1.17) и (1.18) получаваме следните връзки:

$$\int\limits_{\widetilde{\gamma}_3} \omega = \int\limits_{\widetilde{\gamma}_2} \omega + 2\pi i \sqrt{2}\sqrt{sgn\,\Delta}\, A_\mu(h) \tag{1.19}$$

$$\int\limits_{\widetilde{\gamma}_4} \omega = \int\limits_{\widetilde{\gamma}_2+\widetilde{\gamma}_1} \omega + 2\pi i \sqrt{2}\sqrt{sgn\,\Delta}\, B_\mu(h)\ , \tag{1.20}$$

където с $A_\mu(h)$ и $B_\mu(h)$ сме означили полиномите:

$$A_\mu(h) = [U_\mu(h) + 2\beta_1 W_\nu(h)]\,\varphi(k) + V_\mu(h)\frac{C^2 D}{B(\sqrt{\Delta})^3}\left(3[\varphi(k)]^2 - 2\right)\ ;$$

$$B_\mu(h) = [U_\mu(h) + 2\beta_1 W_\nu(h)]\,\psi(k) + V_\mu(h)\frac{C^2 D}{B(\sqrt{\Delta})^3}\left(2 - 3[\psi(k)]^2\right)\ ,$$

С ω сме означили следната диференциална 1 - форма:

$$\omega = U_\mu(h)\,\omega_1 + V_\mu(h)\,\omega_2 + W_\nu(h)\,\omega_3 + S_\rho(h)\,\omega_0\ .$$

$U_\mu(h), V_\mu(h), W_\nu(h), S_\rho(h)$ са полиномите от написаното по - горе развитие на $J(h)$.

Дефинираме помощната функция $F(h)$ със следната формула:

$$F(h) = \frac{J(h)}{\int\limits_{\widetilde{\gamma}_1} \omega_0}\ .$$

Лема 1.3. *В сила е следното неравенство:*

$$\left.\left(\int\limits_{\widetilde{\gamma}_1} \omega_0\right)\right|_{h=h_1} \neq 0 \quad . \tag{1.21}$$

Особените точки на многозначната функция $F(h)$ отново са h_1, h_2, h_3, h_4. Понеже $J_0(h) \neq 0$ за $h \in \mathbf{C} \setminus \{h_2, h_3, h_4\}$ следва, че h_1 е отстранима особеност за $F(h)$. $F(h)$ е еднозначна и холоморфна функция в $h \in \mathbf{C} \setminus [h_2, +\infty)$. Означаваме продълженията на $J_0(h)$ и $F(h)$ по път, лежащ в горната полуравнина съответно с $J_0^+(h)$, $F^+(h)$, а продълженията им по път, лежащ в долната полуравнина с $J_0^-(h)$, $F^-(h)$. В сила е, че $\overline{F^+(h)} = F^-(h)$ и $\overline{J_0^+(h)} = J_0^-(h)$ за $h \in (h_2, h_3) \cup (h_3, h_4) \cup (h_4, +\infty)$.

С цел олекотяване на записа, означаваме с $W_{\gamma_k, \gamma_p}(\omega_l, \omega_m)$ следните Вронскиани:

$$W_{\gamma_k,\gamma_p}(\omega_l,\omega_m) = \begin{vmatrix} \int\limits_{\gamma_k} \omega_l & \int\limits_{\gamma_p} \omega_l \\ \int\limits_{\gamma_k} \omega_m & \int\limits_{\gamma_p} \omega_m \end{vmatrix} \quad .$$

В сила е следната теорема:

Теорема 1.4. *В сила са равенствата:*

$$Im\left(F^{\pm}(h)\right) = \pm \frac{i}{2.\left|J_0(h)\right|^2} . \begin{cases} W_{\gamma_1,\gamma_2}(\omega,\omega_0) \quad , \quad \text{ако} \quad h \in (h_2,h_3) \quad ; \\ W_{\gamma_1,\gamma_2+\gamma_3}(\omega,\omega_0) \quad , \quad \text{ако} \quad h \in (h_3,h_4) \quad ; \\ W_{\gamma_1,\gamma_4}(\omega,\omega_0) \quad , \quad \text{ако} \quad h \in (h_4,+\infty) \quad . \end{cases}$$

Въвеждаме функциите: $G_1(h) = i.W_{\gamma_1,\gamma_2}(\omega,\omega_0)$, $G_2(h) = i.W_{\gamma_1,\gamma_2+\gamma_3}(\omega,\omega_0)$, $G_3(h) = i.W_{\gamma_1,\gamma_4}(\omega,\omega_0)$, които съответстват на $Im(F(h))$ в различните подинтервали на разреза върху реалната ос.

Предложение 1.5. *Функцията $G_2(h)$ е еднозначна и холоморфна в $\mathbf{C} \setminus \{[h_2,h_3] \cup [h_4,+\infty)\}$. Освен това, са в сила равенствата:*

$$Im(G_2^{\pm}(h)) = \begin{cases} \pm\frac{1}{2}.W_{\gamma_2,\gamma_3}(\omega,\omega_0) \quad \text{ако} \quad h \in (h_2,h_3) \quad ; \\ \pm\frac{1}{2}.W_{\gamma_4,2\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3}(\omega,\omega_0) \quad \text{ако} \quad h \in (h_4,+\infty) \ . \end{cases}$$

2 Глава II: Оценка броя на нулите на помощната функция $G_2(h)$ в подходяща комплексна област

Лема 2.1. *В сила са равенствата:*

$$Im\left(G_2^{\pm}(h)\right) = \begin{cases} \mp\pi.i.\sqrt{2}\sqrt{sgn\Delta}.A_\mu(h).\left(\int\limits_{\widetilde{\gamma}_2}\omega_0\right), \quad \text{ако } h \in (h_2, h_3)\,; \\ \pm\pi.i.\sqrt{2}\sqrt{sgn\Delta}.\left[2.B_\mu(h) - A_\mu(h)\right].\left(\int\limits_{\widetilde{\gamma}_4}\omega_0\right), \\ \text{ако } h \in (h_4, +\infty)\,. \end{cases}$$

Лема 2.2. • *В околност на h_2 е в сила следната формула:*

(2.1)

$$G_2(h) = 2\pi.\sqrt{2}.\sqrt{sgn\Delta}.A_\mu(h).\left(\int\limits_{\widetilde{\gamma}_1}\omega_0\right) + 2.i.W_{\widetilde{\gamma}_1,\widetilde{\gamma}_2}(\omega,\omega_0)\,.$$

- *В околност на h_3 е в сила формулата:*

(2.2)

$$G_2(h) = -2\pi.\sqrt{2}.\sqrt{sgn\Delta}.A_\mu(h).\left(\int\limits_{\widetilde{\gamma}_1}\omega_0\right) + 2.i.W_{\widetilde{\gamma}_1,\widetilde{\gamma}_3}(\omega,\omega_0)\,.$$

- *В околност на h_4 е в сила формулата:*

$$G_2(h) = -2\pi.\sqrt{2}.\sqrt{sgn\Delta}.\left[2.B_\mu(h) - A_\mu(h)\right].\left(\int\limits_{\widetilde{\gamma}_1}\omega_0\right) - \tag{2.3}$$
$$- 2.i.W_{\widetilde{\gamma}_4,\widetilde{\gamma}_1}(\omega,\omega_0)\,.$$

Лема 2.3. *За всяко комплексно число h, чиито модул е достатъчно голям, функциите $J_j(h)$ $j = 0, 1, 2, 3$ удовлетворяват неравенствата:*

$$\begin{aligned} & K_0^{'} \le |J_0(h)|\,|h|^{\frac{1}{3}} \le K_0^{''} \ ; \\ & |J_1(h)| \le K_1 \ ; \\ & |J_2(h)|\,|h|^{\frac{2}{3}} \le K_2 \ ; \\ & |J_3(h)|\,|h|^{-\frac{1}{3}} \le K_3 \ , \end{aligned} \tag{2.4}$$

където $K_0^{'}$, $K_0^{''}$, K_j са реални константи, $j = 1, 2, 3$. Освен това, $K_0^{'} \neq 0$.

В разсъжденията и доказателствата до края на тази глава ще имаме нужда от следните означения:

- Означаваме с D_2 областта, която се получава като от кръга $\{|h| < R\}$ ($R > 0$ - достатъчно голямо) се премахнат кръговете $\{|h - h_2| \le r_2\}$, $\{|h - h_3| \le r_3\}$ и $\{|h - h_4| \le r_4\}$ ($r_2 > 0$, $r_3 > 0$, $r_4 > 0$ - достатъчно малки) и се направят разрези по два интервала от реалната ос, а именно по интервалите: $[h_2 + r_2, h_3 - r_3]$ и $[h_4 + r_4, R]$.
- Означаваме с m_1 броя на нулите на $A_\mu(h)$ в интервала $(-\infty, h_1]$.
- Означаваме с m_2 броя на нулите на $A_\mu(h)$ в интервала $[h_1, h_2]$.
- Означаваме с m_3 броя на нулите на $A_\mu(h)$ в интервала $[h_2, h_3]$.
- Означаваме с m_4 броя на нулите на $A_\mu(h)$ в интервала $[h_3, h_4]$.
- Означаваме с p_1 броя на нулите на $2B_\mu(h) - A_\mu(h)$ в интервала $(-\infty, h_1]$.
- Означаваме с p_2 броя на нулите на $2B_\mu(h) - A_\mu(h)$ в интервала $[h_1, h_2]$.
- Означаваме с p_3 броя на нулите на $2B_\mu(h) - A_\mu(h)$ в интервала $[h_3, h_4]$.
- Означаваме с p_4 броя на нулите на $2B_\mu(h) - A_\mu(h)$ в интервала $[h_4, +\infty)$.
- Със Z_2 означаваме броя на нулите на функцията $G_2(h)$ в областта D_2.

Ще докажем следната теорема:

Теорема 2.4. *Ако* $n = 1$*, тогава* $G_2(h) \equiv 0$*. За* $n \geq 2$*, са валидни следните оценки:*

Случай I. *Ако* $\begin{cases} A_\mu(h) \not\equiv 0\,; \\ 2B_\mu(h) - A_\mu(h) \not\equiv 0 \end{cases}$ *, тогава* $Z_2 \leq \left[\frac{n}{3}\right] + m_3 + p_4 + 1$.

Случай II. *Ако* $\begin{cases} A_\mu(h) \equiv 0\,; \\ 2B_\mu(h) - A_\mu(h) \not\equiv 0 \end{cases}$ *, тогава* $Z_2 \leq \left[\frac{n}{3}\right] + p_4$.

Случай III. *Ако* $\begin{cases} A_\mu(h) \not\equiv 0\,; \\ 2B_\mu(h) - A_\mu(h) \equiv 0 \end{cases}$ *, тогава* $Z_2 \leq \left[\frac{n}{3}\right] + m_3$.

Случай IV. *Ако* $\begin{cases} A_\mu(h) \equiv 0\,; \\ 2B_\mu(h) - A_\mu(h) \equiv 0 \end{cases}$ *, тогава*
$\begin{cases} Z_2 \leq \left[\frac{n}{3}\right] - 1\,, & \textit{за} \quad n \geq 3\,; \\ G_2(h) \equiv 0\,, & \textit{за} \quad n = 2. \end{cases}$

Доказателство.
Ако $n = 1$, тогава $U_\mu(h) = V_\mu(h) = W_\nu(h) \equiv 0$, следователно $G_2(h) \equiv 0$.
За $n \geq 2$, ще извършим доказателството с помощта на Принципа на аргумента.

Нека радиусът $R > 0$ е толкова голям, че всички нули на полиномите $A_\mu(h), 2B_\mu(h) - A_\mu(h)$ да са във вътрешността на $\{|h| < R\}$. Частите от контура на D_2, разположени съответно в горната и в долната полуравнина, имат симетрични образи относно реалната ос под действието съответно на $G_2^+(h)$ и $G_2^-(h)$.
Ще разгледаме четирите възможни случаи от формулировката на теоремата.

Случай I. Ако $\begin{cases} A_\mu(h) \not\equiv 0\,; \\ 2B_\mu(h) - A_\mu(h) \not\equiv 0 \end{cases}$.

Ще оценим изменението на $arg\, G_2(h)$ върху голямата и върху малките окръжности с помощта на Лема 2.3 и Лема 2.2. За да оценим нарастването на $arg\, G_2(h)$ върху бреговете на разрезите, ще оценим броя на нулите на $Im\, G_2^{\pm}(h)$ върху тези отсечки.

Лема 2.3 ни дава оценките:

- Ако $n = 3k + 1$, с $k \geq 1$; или $n = 3k$, с $k \geq 1$, тогава аргументът на $G_2(h)$ нараства върху окръжността $\{|h| = R\}$ с не повече от $(k-1)2\pi \pm \varepsilon_1$.
- Ако $n = 3k + 2$, с $k \geq 0$, тогава $arg\, G_2(h)$ нараства върху окръжността $\{|h| = R\}$, с не повече от $(k - \frac{1}{3})2\pi \pm \varepsilon_2$.

Положителните числа ε_1, ε_2 са достатъчно малки за $R > 0$ - достатъчно голямо.

Обобщавайки формулите от Лема 2.2, извличаме следния вид на $G_2(h)$ в околност на h_j с $j = 2, 3, 4$:

$$G_2(h) = p_j(h - h_j)log(h - h_j) + q_j(h - h_j)\,,$$

където $p_j(h - h_j)$ и $q_j(h - h_j)$ са холоморфни и еднозначни функции в околност на точката $h = h_j$. Ако $[p_j(0)]^2 + [q_j(0)^2] > 0$, тогава изменението на аргумента на $G_2(h)$ върху $\{|h - h_j| = r_j\}$ може да се направи по абсолютна стойност по - малко от произволно положително число за $r_j > 0$ е достатъчно малко. Ако и двете функции $p_j(h - h_j)$ и $q_j(h - h_j)$ имат l кратна нула за $h = h_j$, тогава, нарастването на аргумента на $G_2(h)$ върху $\{|h - h_j| = r_j\}$ е не по - голямо от $-2l\pi \pm \varepsilon$, където ε е положително число, което става произволно малко за $r_j > 0$ достатъчно малко.

Лема 2.2 описва $Im\, G_2^{\pm}(h)$ в $(h_2, h_3) \cup (h_4, +\infty)$. При движението на h от точката $h = R$, разположена върху долния бряг на разреза $[h_4 + r_4, R]$, до първата (отчитана отдясно наляво) нула на $Im\, G_2^{\pm}(h)$ върху този разрез, аргументът на $G_2(h)$ би могъл да нарастне с почти половин оборот. Освен това, имаме, че $Im\, G_2^{\pm}(-R) = 0$, и $Im\, G_2^{\pm}(h_4 - r_4) = 0$. Поради това, недовършеният оборот (в положителна посока) на $arg\, G_2(h)$ върху голямата окръжност, би могъл да се дозатвори. Всяка от нулите на $Im\, G_2^{+}(h)$ върху $[h_2 + r_2, h_3 - r_3]$ и $[h_4 + r_4, R]$ (на брой общо $m_3 + p_4$) би могла да има принос цял оборот в положителна посока в изменението на $arg\, G_2(h)$. Понеже $Im\, G_2^{\pm}(h_2 - r_2) = 0$ и $Im\, G_2^{\pm}(h_3 + r_3) = 0$ тогава е възможен още един оборот нарастване за $arg\, G_2(h)$.

Така стигаме до извода, че когато h пробяга еднократно контура на D_2 в положителна посока, аргументът на $G_2(h)$ нараства с не повече от

$2\pi\left\{\left[\frac{n}{3}\right]+m_3+p_4+1\right\}$. Тоест е в сила оценката:

$$Z_2\leq\left[\frac{n}{3}\right]+m_3+p_4+1\quad \text{ako}\quad n\geq 2\,.$$

Случай II. Ако са изпълнени условията:

$$\begin{cases} A_\mu(h)\equiv 0\,; \\ 2B_\mu(h)-A_\mu(h)\not\equiv 0\,. \end{cases}$$

$G_2(h)$ може да се продължи до еднозначна и холоморфна функция в $\mathbf{C}\setminus\{[h_4,+\infty)\bigcup\{h_2,h_3\}\}$. Проследяваме изменението на аргумента ѝ върху контура на областта $D_2^{'}$, която се получава като от $\{|h|<R\}$ се изрежат малките кръгове $\{|h-h_2|\leq r_2\}$, $\{|h-h_3|\leq r_3\}$, $\{|h-h_4|\leq r_4\}$ и се направи разрез върху отсечката от реалната ос $[h_4+r_4,R]$. Когато h пробяга еднократно контура на $D_2^{'}$ в положителна посока, аргументът на $G_2(h)$ нараства с не повече от $2\pi\left\{\left[\frac{n}{3}\right]+p_4\right\}$.

Случай III. Ако са изпълнени условията:

$$\begin{cases} A_\mu(h)\not\equiv 0\,; \\ 2B_\mu(h)-A_\mu(h)\equiv 0\,. \end{cases}$$

Тогава $G_2(h)$ може да се продължи до еднозначна и холоморфна функция в $\mathbf{C}\setminus\{[h_2,h_3]\bigcup\{h_4\}\}$. Проследяваме изменението на $arg\,G_2(h)$ върху контура на областта $D_2^{''}$, която се получава като от $\{|h|<R\ \}$ се изрежат малките кръгове $\{|h-h_2|\leq r_2\}$, $\{|h-h_3|\leq r_3\}$, $\{|h-h_4|\leq r_4\}$ и се направи разрез върху отсечката от реалната ос $[h_2+r_2,h_3-r_3]$. Върху голямата окръжност $arg\,G_2(h)$ се изменя с цяло кратно на 2π, следователно нараства с не повече от $2\pi\left\{\left[\frac{n}{3}\right]-1\right\}$. Върху всяка една от малките окръжности нарастването на $arg\,G_2(h)$ е по - малко или равно на ε, където ε е положително число, което става произволно малко за $r_j>0$ достатъчно малки. ($j=2,3,4$). Всяка от нулите на $A_\mu(h)$ върху $[h_2,h_3]$ би могла да дава принос един оборот в положителна посока в изменението на $arg\,G_2(h)$. Поради нулите на $Im\,G_2^{\pm}(h)$ в точките h_2-r_2 и h_3+r_3 би могъл да се "затвори"още един оборот в положителна посока в изменението на $argG_2(h)$. Следователно, когато h пробяга еднократно контура на $D_2^{''}$ в положителна посока, аргументът на $G_2(h)$ нараства с не повече от $2\pi\left\{\left[\frac{n}{3}\right]+m_3\right\}$.

Случай IV. Ако са изпълнени условията:

$$\begin{cases} A_\mu(h)\equiv 0\,; \\ 2B_\mu(h)-A_\mu(h)\equiv 0\,. \end{cases}$$

$G_2(h) \equiv 0$ за $n = 2$. Нека $n \geq 3$. Тогава $G_2(h)$ може да се продължи до еднозначна и холоморфна функция в $\mathbf{C} \setminus \{h_2, h_3, h_4\}$. Проследяваме изменението на аргумента на $G_2(h)$ върху контура на областта $D_2^{'''}$, която се получава като от $\{|h| < R\}$ се изрежат малките кръгове $\{|h - h_2| \leq r_2\}$, $\{|h - h_3| \leq r_3\}$, $\{|h - h_4| \leq r_4\}$. Върху голямата окръжност $arg\, G_2(h)$ се изменя с цяло кратно на 2π, следователно нараства с не повече от $2\pi \left\{ \left[\frac{n}{3}\right] - 1 \right\}$. Върху всяка една от малките окръжности нарастването на $arg\, G_2(h)$ е по - малко или равно на ε, където ε е положително число, което става произволно малко за $r_j > 0$ достатъчно малки. $(j = 2, 3, 4)$. Щом h пробяга еднократно контура на $D_2^{'''}$ в положителна посока, аргументът на $G_2(h)$ нараства с не повече от $2\pi \left\{ \left[\frac{n}{3}\right] - 1 \right\}$. С други думи:

$$Z_2 \leq \left[\frac{n}{3}\right] - 1 \quad \text{ako} \quad n \geq 3\,.$$

Сега Z_2 е броят на нулите на $G_2(h)$ в областта $D_2^{'''}$.

ЛИТЕРАТУРА:

[1] V. I. Arnold. Loss of stability of sel-oscillations close to resonance and versal deformations of equivariant vector fields. *Funct. Anal. Appl.* **11** (1977), 85-92.

[2] V. I. Arnold. ”Arnold’s Problems”. *Springer - Verlag, Berlin*, 2004.

[3] V. I. Arnold, S. M. Gusein-Zade, A. N. Varchenko, Singularities of Differentiable Maps. Vol II. Monodromy and Asymptotics of Integrals, Monographs in Mathematics, vol. 83, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1988.

[4] G. Binyamini, S. Yakovenko. Polynomial bounds for oscillation of solutions of Fuchsian systems, *Preprint arXiv: 0808.2950v1 [math. DS]* (2008), 1-31.

[5] G. Binyamini, D. Novikov, S. Yakovenko. On the number of zeros of Abelian integrals. A constructive solution of the Infinitesimal Hilbert Sixteenth Problem. *Preprint arXiv: 0808.2952v2 [math. DS]* (2008), 1-57.

[6] L.Gavrilov. Nonoscillation of elliptic integrals related to cubic polynomials with symmetry of order three., *Bull. Lond. Math. Soc.* **30** (1998), 267-273.

[7] L.Gavrilov. The infinitesimal 16th Hilbert problem in the quadratic case, *Invent. Math.* **143** (2001), 449-497.

[8] L. Gavrilov and E. Horozov, Limit cycles of perturbations of quadratic Hamiltonian vector fields, *J. Math. Pures Appl.* (9) **72** (1993), No 2, 213 - 238.

[9] L. Gavrilov and I. D. Iliev, The displacement map associated to polynomial unfoldings of planar Hamiltonian vector fields, *Amer. J. Math.*, Vol. **127(6)**, (2005), 1153-1190.

[10] L. Gavrilov and I. D. Iliev, Second-order analysis in polynomially perturbed reversible quadratic Hamiltonian Systems, *Ergodic Theory and Dynamical systems* **20** (2000), 1671-1686.

[11] A. Glutsyuk, Yu. Ilyashenko. Restricted version of the infinitesimal Hilbert 16th problem, *Mosc. Math. J.* **7** (2007), No 2, 281-325, 351.

[12] D. Hilbert, Mathematische Probleme (lecture), Second Internat. Congress Math., Paris 1900, *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen Math. - Phys.* **K1** (1900), 253-297.

[13] E. Horozov and I. D. Iliev, Linear estimate for the number of zeros of Abelian integrals with cubic Hamiltonians, *Nonlinearity* **11** (1998), 1521 - 1537 .

[14] E. Horozov and I. D. Iliev, On the number of limit cycles in perturbations of quadratic Hamiltonian systems, *Proc. Lond. Math. Soc.* **69** (1994) No 1, 198 - 224 .

[15] E. Horozov and I. D. Iliev, Perturbations of quadratic Hamiltonian systems with symmetry, *Annales de l'I. H. P., Section C*, **tome 13**, No 1 (**1996**), 198 - 224 .

[16] E. Horozov and A. Mihajlova, An improved estimate for the number of zeros of Abelian integrals for cubic Hamiltonians, *Nonlinearity* **23** (2010) , 3053 - 3069 .

[17] I. D. Iliev, On the limit cycles available from polynomial perturbations of the Bogdanov - Takens Hamiltonian, *Israel J. Math.* **115** (2000), 269-284 .

[18] Yu. Ilyashenko. Appearance of limit cycles in perturbation of the equation $\frac{d\omega}{dz} = -\frac{R_z}{R_\omega}$ where $R(z, \omega)$ is a polynomial. *Mat. Sbornik* **78** (1969), 360-373.

[19] Yu. S. Ilyashenko, S. Yakovenko. Double exponential estimate for the number of zeros of complete Abelian integrals and rational envelopes of linear ordinary differential equations with an irreducible monodromy group. *Inventiones Math.***121** (1995) No 3, 613-650.

[20] Yu. S. Ilyashenko. Centennial history of Hilbert's 16th problem. *Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.)* **39** (2002) No 3, 301-354 (electronic).

[21] Yu. S. Ilyashenko, S. Yakovenko. Lectures on analytic differential equations. Graduate Studies in Mathematics, vol. 86 *American Math. Soc., Providence*, RI, 2008.

[22] A. G. Khovanskiĭ. Real Analytic Manifolds with Finiteness Properties and Complex Abelian Integrals. *Funct. Anal.Appl.,* **18** (1984), 119-128.

[23] J. Li. Hilbert's 16th problem and bifurcations of planar polynomial vector fields. *Int. J. Bifurcat. Chaos,* **13 (1)** (2003), 47-106.

[24] A. Mihajlova. Estimate for the number of zeros of Abelian integral on elliptic curves. *Serdica, Math. J.* **30** (2004), 1-16.

[25] D. Novikov, S. Yakovenko. Simple exponential estimate for the number of real zeros of complete Abelian integrals. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **45** (1995) No 4, 897-927 .

[26] G. S. Petrov. Elliptic integrals and their non - oscillatorness. *Funct. Annal. Appl.* **20** (1986) No 1, 46-49 .

[27] G. S. Petrov. On the nonoscillation of elliptic integrals. *Funktsional. Anal. i Prilozhen. Appl.* **31** (1997) No 4, 47-51 , 95.

[28] A. N. Varchenko. Estimate of the Number of Zeros of Abelian Integrals Depending on Parameters and Limit Cycles. *Funct. Anal. Appl.* **18** (1984), 98-108 .

[29] C. Wu, Y. Xia. The number of limit cycles of cubic Hamiltonian System with perturbation. *Nonlinear Anal.: Real World Appl.* **7** (2006), 943-949.

[30] S. Yakovenko. Complete Abelian integrals as rational envelopes. *Nonlinearity* **7** (1994), 1237-1250 .

[31] S. Yakovenko. Quantitative theory of ordinary differential equations and the tangential Hilbert 16th problem. On finiteness in differential equations and Diophantine geometry. CMR Monogr. Ser., vol. 24, *Amer. Math. Soc., Providence*, RI, 2005, 41-109.

[32] J. Yang, L. Zhao. Zeros of Abelian integrals for a quartic Hamiltonian with figure-of-eight loop through a nilpotent saddle. *Nonlinear analysis - real world applications* (Volume: 27), (2016), 350-365.

[33] J. Yang, L. Zhao. The cyclicity of period annuli for a class of cubic Hamiltonian systems with nilpotent singular points. *Journal of differential equations* (Volume: 263), Issue: 9,(2017), 5554-5581.

[34] Yu. Zhao, W. Li, C. Li, Zh. Zhang. Linear estimate of the number of zeros of Abelian integrals for quadratic centers having almost all their orbits formed by cubics. *Sci. China (Ser. A)* **45** (2002), 964-974 .

Ана Михайлова
Шуменски университет ”Епископ Константин Преславски”
Е-мейл: a.mihaylova@shu.bg