MATRIX GAME, EQUILIBRIUM AND COMPUTER REALIZATION OF WOLFRAM MATHEMATICA

YANITSA M. MANDZHUKOVA, RADOSLAVA S. TERZIEVA, SNEZHANA G. HRISTOVA

ABSTRACT: *The Game Theory is a relatively new branch in mathematics and can be used as an apparatus for modeling and solving real processes and phenomena.*

Models of real life situations that are adequately described by games are studied. The models are solved using the Wolfram Mathematica software package.

KEYWORDS: *Game theory, matrix games, equilibrium.*

МАТРИЧНИ ИГРИ, РАВНОВЕСИЕ И КОМПЮТЪРНА РЕАЛИЗАЦИЯ НА WOLFRAM MATHEMATICA[*]

ЯНИЦА М. МАНДЖУКОВА, РАДОСЛАВА С. ТЕРЗИЕВА, СНЕЖАНА Г. ХРИСТОВА

АБСТРАКТ: *Теория на игрите е сравнително нов клон в математиката и се използва като апарат за моделиране и решаване на редица реални процеси и явления в икономиката, бизнеса, политиката, биологията и пр.*

В тази статия са предложени и изследвани някои модели на реални ситуации, описани адекватно чрез игри. Моделите са решени с помощта на софтуерния пакет Wolfram Mathematica.

1 Въведение

Теория на игрите е дял от приложната математика. С помощта на методите от теорията на игрите стратегически се изучават математически модели, като се взимат решения в конфликтни ситуации. Конфликтни са ситуациите, при които има две взаимодействащи си страни с противоположни цели. При това, резултатът от всяко действие на едната страна зависи от начина на действие на противоположната страна.

Всяка една ситуация, при която всеки участник е зависим от действията на останалите участници, може да се моделира като игра ([1], [3], [4]). Това обуславя популярността и приложимостта на теорията на игрите. Реално тази теория може да помогне за вземането на оптималното решение във всяка една житейска ситуация. Тя постепенно излиза от математиката и икономиката и навлиза, както в психологията и социологията- за да се опита да обясни етичното поведение, обществения и социалния избор, така и в политологията, където е полезна при изследване на ескалиращо напрежение и международни военни конфликти.

В настоящата статия е показан начин за изследване на матрични игри, които са използване за модели на конкретни реални ситуации. Написани са кодове на Wolfram Mathematica и са намерени доминиращи стратегии, равновесие на съответните модели.

[*] Настоящата работа е частично финансирана по проект МУ17ФМИ007 и СП17ФМИ005 при НПД при Пловдивски Университет „П.Хилендарски“.

2 Основни теоретични сведения за матрични игри

Една безкоалиционна игра G(И,X,P) с k играча се нарича игра с нулева сума, ако за всеки изход на играта $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$, сумата от плащанията на всички играчи е нулева, т.е. е изпълнено $\sum_{j=1}^{k} P_j(x) = 0$.

Безкоалиционните игри с двама играчи с нулева сума се наричат антагонистични. При антагонистичните игри за всеки изход на играта е изпълнено, че плащанията на двамата играчи са равни по абсолютна стойност, но с противоположни знаци. Това означава, че интересите на двамата играчи са антагонистични, противоположни.

Антагонистичните игри могат да бъдат крайни или безкрайни. Крайните антагонистични игри се наричат матрични игри.

Доминиращи стратегии

Стратегията x_i е доминираща, ако елементите на i-тия ред в матрицата M са по-големи или равни от съответните елементи във всички останали редове.

Стратегията y_j е доминираща, ако елементите на j-тия стълб в матрицата M са по-малки или равни от съответните елементи във всички останали стълбове.

Седлова точка и цена на играта

Изходът на матрична игра, при който нейното плащане е по-малко или равно на всяко плащане в съответния й ред и е по-голямо или равно на всяко плащане в съответния й стълб се нарича седлова точка.

Ако съществува число V, такова, че

- за И1 има стратегия, която му гарантира печалба ПОНЕ V,
- за И2 има стратегия, която му гарантира печалба НЕ ПОВЕЧЕ от V, то V се нарича цена на играта.

Ако една матрична игра има седлова точка, то нейното плащане е цена на играта.

3 Моделиране на някои конкретни реални ситуации чрез игри.

Ще разгледаме примери, с които ще илюстрираме основните понятия и методи в теория на игрите.

Пример 1. Две големи компютърни фирми предлагат определен вид лаптоп. Маркетингово проучване показва печалбата на двете фирми, при различните цени, измежду които те могат да изберат (Таблица 1).

Таблица 1.

Печалбата (в млн. лв) на двете фирми.

	A	***B***	**C**
X	$5, -5$	$-1,1$	$1, -1$
Y	$10, -10$	$4, -4$	$3, -2$
Z	$6, -6$	$3, -3$	$2, -3$

От таблица 1 се вижда, че играчите имат краен брой стратегии, като играч 1 (И1) има стратегии $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}$, а И2 - $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$, както и че двамата играчи са с антагонистични интереси (всеки изход на играта има нулева сума). В този случай играта се нарича матрична и е напълно дефинирана само с матрицата от плащанията на първия играч. Следователно можем да представим матрицата на плащанията (М) за двамата играчи по следния начин:

Таблица 2.

Матрица на плащанията (М)

	A	$\boldsymbol{B}$	**C**
$\boldsymbol{X}$	5	-1	1
$\boldsymbol{Y}$	10	4	3
Z	6	3	2

Тъй като интересите на двамата играчи са антагонистични/противоположни, то платежната матрица на И2 е – М.

От Таблица 2 се вижда, че елементите във втория ред са по-големи от съответните елементи в останалите редове. Следователно, можем да твърдим, че стратегията $\boldsymbol{Y}$ е доминираща стратегия за И1. Докато елементите в нито един от стълбовете не са по-малки или равни от съответните елементи в останалите стълбове. Следователно, няма доминираща стратегия за И2.

$$И1: \begin{array}{c} \boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{Y} \\ \boldsymbol{Z} \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ \mathbf{10} & \mathbf{4} & \mathbf{3} \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \end{array} \end{array} \qquad И2: \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 10 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Фигура 1. Намиране на доминиращи стратегии.

За намиране на седловата точка с кръгче отбелязваме **min** по ред, с квадратче **max** по стълб (Таблица 3).

Таблица 3.

Намиране на седлова точка

	A	$\boldsymbol{B}$	**C**
$\boldsymbol{X}$	5	-1	1
$\boldsymbol{Y}$	$\boxed{10}$	$\boxed{4}$	$\boxed{3}$
Z	6	3	2

Разглежданата игра има седлова точка $(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{C})$ и цената на играта е 3.

Реализираме решението чрез Wolfram Mathematica:

- Изготвяне матрица на плащанията:

```
a1 = 5; a2 = -1; a3 = 1; a4 = 10; a5 = 4; a6 = 3; a7 = 6; a8 = 3; a9 = 2;
Grid[{{" ", "A", "B", "C"}, {"X", a1, a2, a3}, {"Y", a4, a5, a6}, {"Z", a7, a8, a9}}, Frame → All, Background → LightGray]
```

- Изготвяне на код, намиращ доминиращите стратегии за двамата играчи:

```
If[a1 > a4 && a2 > a5 && a3 > a6 && a1 > a7 && a2 > a8 && a3 > a9, "Стратегия X е доминираща стратегия за първия играч.",
 If[a4 > a1 && a5 > a2 && a6 > a3 && a4 > a7 && a6 > a3 && a6 > a9, "Стратегия Y е доминираща стратегия за първия играч.",
  If[a7 > a1 && a8 > a2 && a9 > a3 && a7 > a4 && a8 > a5 && a9 > a6, "Стратегия Z е доминираща стратегия за първия играч.", "Няма доминираща стратегия за първия играч."]]]
If[a1 < a2 && a1 < a3 && a4 < a5 && a4 < a6 && a7 < a8 && a7 < a9, "Стратегия A е доминираща стратегия за втория играч.",
 If[a2 < a1 && a2 < a3 && a6 < a4 && a6 < a7 && a8 < a7 && a8 < a9, "Стратегия B е доминираща стратегия за втория играч.",
  If[a3 < a1 && a3 < a2 && a6 < a4 && a6 < a5 && a9 < a7 && a9 < a8, "Стратегия C е доминираща стратегия за втория играч.", "Няма доминираща стратегия за втория играч."]]]
```

- Търсене на седлова точка:

```
max = Max[Min[a1, a2, a3], Min[a4, a5, a6], Min[a7, a8, a9]];
min = Min[Max[a1, a4, a7], Max[a2, a5, a7], Max[a3, a6, a9]];
If[min == max, "Има седлова точка.", "Няма седлова точка."]
Print["Цената на играта е равна на ", min, "."]
```

В изпълнение на този код, получаваме доминиращите стратегии за двата играчи (ако има такива), седлова точка и цена на играта.

Резултати:

```
Стратегия Y е доминираща стратегия за първия играч.
Няма доминираща стратегия за втория играч.
Има седлова точка.
Цената на играта е равна на 3.
```

Пример 2. Рибари, които работят на един риболовен кораб имат възможност да сложат мрежите за риба или в открито море или в залива, като таксата им за залива е 10 лв, а за открито море - 20 лв. В открито море има повече и по-хубава риба, но има възможност и от вълнения на водата, които биха унищожили мрежите им. Докато в залива, те ще спечелят от улова на риба 35 (x100) лв. Ако изберат да отидат в открито море и има вълнение, то те ще спечеля само 15 (x100) лв, а ако няма вълнение – 75 (x100) лв.

Кое място да изберат рибарите? Колко ще спечелят при този избор?

Първоначално определяме кои са стратегиите в дадената игра – **Открито, Закрито, Вълнение, Без вълнение.**

Как да попълним таблицата?

<u>**Открито**</u> <u>(- 20 лв.)</u>

С вълнение (+ 15 лв.) – 20 + 15= - 5

Без вълнение (+ 75 лв.) – 20 + 75= 5

<u>Закрито</u> <u>(- 10 лв.)</u>
С вълнение (+ 35 лв.) – 10 + 35= 25
Без вълнение (+ 35 лв.) – 10 + 35= 25

Сега изготвяме матрицата на плащанията и попълваме плащанията в нея.

Таблица 4

Матрица на плащанията за Пример 2

	Вълнение	***Без вълнение***
Открито	−5	55
Закрито	25	25

Използваме написания по-горе алгоритъм за решаване на такъв тип задачи чрез Wolfram Mathematica.

```
a1 = -5; a2 = 55; a3 = 25; a4 = 25;
Grid[{{" ", "Вълнение", "Без вълнение"}, {"Открито", a1, a2}, {"Закрито", a3, a4}}, Frame → All, Background → LightGray]
```

	Вълнение	Без вълнение
Открито	-5	55
Закрито	25	25

```
max = Max[Min[a1, a2], Min[a3, a4]];
min = Min[Max[a1, a3], Max[a2, a4]];
If[min == max, "Има седлова точка.", "Няма седлова точка."]
Print["Седловата точка е равна на ", min, "."]
```

Решение:

Има седлова точка.

Цената на играта е равна на 25.

Извод : Има седлова точка , която е (**Закрито, Вълнение**), а цената на играта е 25, което означава, че рибарите трябва да отидат в залива без значение дали има или няма вълнение. Те не са заинтересовани да се отклоняват от този избор. При този избор ще спечелят 25(x100) лв.

Заключение

В настоящата работа, благодарение на теория на игрите са моделирани и изследвани две коренно различни реални ситуации. Разгледани са матрични игри, които са решени с помощта на математическия софтуер Wolfram Mathematica.

Благодарности

Изследванията са частично извършени по проект МУ17ФМИ007 и СП17ФМИ 005 към НПД при ПУ „П. Хилендарски“.

ЛИТЕРАТУРА:

[1] Иванов, И., *Теория на игрите с икономически приложения*, Унив. изд-во „Кл. Охридски“, 2009.

[2] Гочева–Илиева, С., *Въведение в системата Mathematica*, Екс-Прес, 2009.

[3] Diaz, J., Jurado, I., Janiero, M., *An Introductory Course on Mathematical Game Theory*, AMS, 2010.

[4] Julmi, C., *Introduction to Game Theory*, BookBoon, 2012.

Яница Маринова Манджукова, докторант Радослава Сашкова Терзиева,
Снежана Христова
Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“, катедра: Приложна математика и моделиране
E-mail: radoslavaterzieva@abv.bg (автор за кореспонденция)