MATTEX 2018,
CONFERENCE PROCEEDING, v. 1, pp. 143- 150

ON THE FOUR-POINTS BOUNDS FOR THE EFFECTIVE CONDUCTIVITY OF MULTI-PHASE DISPERSIONS*

Krasimir D. Tsvyatkov

ABSTRACT: *Bounds on the effective conductivity derived by using the Hashin-Shtrikman variational principle are considered for dispersions of homogeneous spheres, which can have different, random conductivity σ_p. Generally, the bounds contain two statistical parameters $I_\sigma^{(3)}$ and $I_\sigma^{(4)}$ involving three- and four-points moments of conductivity field $\sigma(\boldsymbol{x})$, respectively. The structure of this parameters is investigated for such dispersions. It is turned out that $I_\sigma^{(3)}$ is represented by the well-known geometrical tree-points parameter ζ_2 and another two-points geometrical parameter, but $I_\sigma^{(4)}$ is represented with two two-points and with one three- and one four-points geometrical parameters. For 2D dispersions the four-points geometrical parameter is expressed by the parameter ζ_2.*

KEYWORDS: *effective conductivity, random dispersions, variational bounds*

ВЪРХУ ЧЕТИРИТОЧКОВИТЕ ГРАНИЦИ ЗА ЕФЕКТИВНАТА ПРОВОДИМОСТ НА МНОГОФАЗНИ ДИСПЕРСИИ

Красимир Д. Цвятков

1 Увод

Разглеждаме дисперсия от хомогенни непресичащи се сфери със случайна проводимост σ_p, разпределени случайно в неограничена матрица с проводимост σ_m, заемаща цялото d-мерно евклидово пространство $\mathbb{R}^n$, $d = 2, 3$. Връзката между плътността на електрическия ток $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})$ и електрическото поле $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})$ в средата се дава от закона на Ом:

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}) = \sigma(\boldsymbol{x})\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}), \tag{1}$$

където $\sigma(\boldsymbol{x})$ е случайното поле на проводимостта на средата. Предполагаме, че тя е статистически хомогенна и изотропна. Тогава *ефективната проводимост* σ_e на средата обикновено се дефинира чрез равенството

$$\langle \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})\rangle = \sigma_e \langle \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})\rangle, \tag{2}$$

където скобите $\langle\ \rangle$ означават усреднение по ансамбъла от реализации на средата. Намирането на σ_e е основна задача в теорията на композитните материали и е поставена в трудове на класиците на съвременната наука, вж. например трактата на Максуел [1].

В общия случай ефективната проводимост σ_e зависи от пълното статистическо описание на средата. На практика, обаче, разполагаме само с информацията, давана от първите няколко корелационни функции за средата. Ето защо единственото, което може да се направи строго и последователно, е получаването на граници за σ_e. Разглеждайки класическия вариационен принцип

$$W\big[\widehat{\boldsymbol{E}}(\cdot)\big] = \frac{1}{2}\langle \sigma(\boldsymbol{x})\widehat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{x}) \cdot \widehat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{x})\rangle \longrightarrow \min \tag{3}$$

*Partially supported by Scientific Research Grant RD-08-119/2018 of Shumen University.

върху пробни полета от вида

$$\widehat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{x}) = \langle \boldsymbol{E} \rangle + \lambda \langle \boldsymbol{E} \rangle \cdot \int \nabla\nabla G(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\sigma'(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}, \tag{4}$$

където λ е скаларен параметър, Беран [2] получава горна граница за σ_e при $d = 3$, включваща статистическия параметър

$$I_\sigma^{(3)} = \frac{1}{\langle \sigma'^3 \rangle} \iint G_{,ij}(\boldsymbol{z}) G_{,ji}(\boldsymbol{w}) M_3^\sigma(\boldsymbol{z},\boldsymbol{w})\,\mathrm{d}\boldsymbol{z}\mathrm{d}\boldsymbol{w}, \tag{5}$$

зависещ от триточковия момент $M_3^\sigma(\boldsymbol{z},\boldsymbol{w}) = \langle \sigma'(\boldsymbol{0})\sigma'(\boldsymbol{z})\sigma'(\boldsymbol{w}) \rangle$ на флуктуацията $\sigma'(\boldsymbol{x}) = \sigma(\boldsymbol{x}) - \langle \sigma \rangle$ на полето $\sigma(\boldsymbol{x})$; в (4) и (5) $G(\boldsymbol{x})$ е фундаменталното решение на уравнението на Лаплас, т.е. $G(\boldsymbol{x}) = 1/4\pi|\boldsymbol{x}|$ при $d = 3$ и $G(\boldsymbol{x}) = -\ln|\boldsymbol{x}|/2\pi$ при $d = 2$. Ще отбележим също, че тук и по-нататък участващите градиенти на $G(\boldsymbol{x})$ се разглеждат като обобщени функции. Полетата (4) при $\lambda = 1/\langle \sigma \rangle$ представляват първите два члена от пертубационното разлагане на $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})$ за слабо хетерогенна среда. При $d = 2$ границите от този тип са получени от Силнуцер [3].

Заедно с хетерогенната среда да разгледаме хомогенна неограничена среда с проводимост σ_0 и да въведем индуцираната поляризация

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) = (\sigma(\boldsymbol{x}) - \sigma_0)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) \tag{6}$$

относно тази среда за сравнение. Полето $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$ се подчинява на вариационния принцип на Хашин и Щтрикман [4], съгласно който функционалът

$$U\big[\widehat{\boldsymbol{P}}(\cdot)\big] = \sigma_0 \langle \boldsymbol{E} \rangle^2 + \langle 2\widehat{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{x}) \cdot \langle \boldsymbol{E} \rangle + \widehat{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{x}) \cdot \widehat{\boldsymbol{E}}'(\boldsymbol{x}) - \widehat{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{x}) \cdot \widehat{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{x})/(\sigma(\boldsymbol{x}) - \sigma_0) \rangle \tag{7}$$

е стационарен за истинското поле $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$ в хетерогенната среда и неговата стационарна стойност U_{st} е $U_{\mathrm{st}} = \sigma_e \langle \boldsymbol{E} \rangle^2$. При това U_{st} е минимум при $\sigma(\boldsymbol{x}) \leq \sigma_0$ и максимум при $\sigma(\boldsymbol{x}) \geq \sigma_0$. В (7) $\langle \boldsymbol{E} \rangle^2 = \langle \boldsymbol{E} \rangle \cdot \langle \boldsymbol{E} \rangle$ и

$$\widehat{\boldsymbol{E}}'(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\sigma_0} \int \nabla\nabla G(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \cdot \widehat{\boldsymbol{P}}'(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}, \tag{8}$$

където $\widehat{\boldsymbol{P}}'(\boldsymbol{y})$ е флуктуацията на пробното поле $\widehat{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{y})$.

Според (6) аналогът на пробните полета (4) на Беран са полетата

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) = (\sigma(\boldsymbol{x}) - \sigma_0) \left\{ \lambda_1 \langle \boldsymbol{E} \rangle + \lambda_2 \langle \boldsymbol{E} \rangle \cdot \int \nabla\nabla G(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\sigma'(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} \right\}, \tag{9}$$

като сега вариационният принцип на Хашин-Щтрикман позволява да въведем скаларен параметър и пред $\langle \boldsymbol{E} \rangle$. При $\lambda_2 = 0$ получаваме пробните полета $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) = \lambda(\sigma(\boldsymbol{x}) - \sigma_0)\langle \boldsymbol{E} \rangle$, които при екстремизиране на U относно λ водят до получаване на граници за σ_e, които в случая на двуфазна среда съвпадат с границите на Хашин и Щтрикман [4]. За N-фазна среда при $N \geq 3$ тези автори получават по-добри граници за σ_e, разглеждайки λ като функция на проводимостите $\sigma_1, \ldots, \sigma_N$ на компонентите на средата. Разглеждането сега на функционала U върху класа от пробни полета (9) при едновременно вариране на параметрите λ_1 и

λ_2 ще доведе до намиране на граници за σ_e, включващи още статистически параметър $I_\sigma^{(4)}$, зависещ от четвъртия момент

$$M_4^\sigma(\boldsymbol{z},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) = \langle \sigma'(\boldsymbol{0})\sigma'(\boldsymbol{z})\sigma'(\boldsymbol{v})\sigma'(\boldsymbol{w})\rangle. \tag{10}$$

В случая $d = 3$ тези граници бяха изведени от автора в [5, 6] и разглеждани за дисперсия от сфери с една и съща, неслучайна проводимост σ_p до ред ϕ_p^2, където ϕ_p е обемната концентрация на сферите в дисперсията. За дисперсии от сфери със случайна проводимост σ_p параметрите $I_\sigma^{(3)}$ и $I_\sigma^{(4)}$ съдържат в сложна интегрална форма както статистиката на разпределение на центровете на сферите (геометрията на средата), така и статистиката на разпределение на проводимостта σ_p (материалните параметри на средата). Тук ще изследваме структурата на параметрите $I_\sigma^{(3)}$ и $I_\sigma^{(4)}$, отделяйки една от друга геометричната и материалната статистика. За параметъра $I_\sigma^{(3)}$ това вече по същество е направено от автора в [7, 8], където границите на Беран и кластерните граници на Торкуато [9] се разглеждат под общ чадър. Изследването на $I_\sigma^{(3)}$ се свежда до разглеждането на два геометрични параметъра, единият от които съдържа дву- и три-точковата, а другият само дву-точковата функции на разпределение на центровете на сферите. Както ще видим по-долу, положението с параметъра $I_\sigma^{(4)}$ е значително по-сложно.

2 Четириточкови граници за ефективната проводимост

Рестрикцията $U(\lambda_1, \lambda_2)$ на функционала (7) върху класа от пробни полета (9) е квадратична форма на λ_1 и λ_2 :

$$U(\lambda_1,\lambda_2) = \left(a_0 + 2a_1\lambda_1 + 2a_2\lambda_2 + a_{11}\lambda_1^2 + 2a_{12}\lambda_1\lambda_2 + a_{22}\lambda_2^2\right)\langle \boldsymbol{E}\rangle^2, \tag{11}$$

където

$$a_0 = \sigma_0, \quad a_1 = \langle\sigma\rangle - \sigma_0, \quad a_2 = -\frac{1}{d}\langle\sigma'^2\rangle,$$

$$a_{11} = -\frac{1}{d}\frac{\langle\sigma'^2\rangle}{\sigma_0} - (\langle\sigma\rangle - \sigma_0), \quad a_{12} = \frac{1}{d}\left\{\frac{1}{\sigma_0}\left[\langle\sigma'^3\rangle I_\sigma^{(3)} + (\langle\sigma\rangle-\sigma_0)\langle\sigma'^2\rangle\right] + \langle\sigma'^2\rangle\right\}, \tag{12}$$

$$a_{22} = \frac{1}{d}\left\{\frac{1}{\sigma_0}\left[\langle\sigma'^4\rangle I_\sigma^{(4)} - 2\,(\langle\sigma\rangle-\sigma_0)\langle\sigma'^3\rangle I_\sigma^{(3)} - (\langle\sigma\rangle-\sigma_0)^2\langle\sigma'^2\rangle + \frac{1}{d^2}\langle\sigma'^2\rangle^2\right]\right.$$
$$\left. - \left[\langle\sigma'^3\rangle I_\sigma^{(3)} + (\langle\sigma\rangle-\sigma_0)\langle\sigma'^2\rangle\right]\right\};$$

тук $I_\sigma^{(3)}$ е статистическият параметър (5), появяващ се в горната граница на Беран, а

$$I_\sigma^{(4)} = \frac{1}{\langle\sigma'^4\rangle}\iiint G_{,ij}(\boldsymbol{z})G_{,jk}(\boldsymbol{w})G_{,ki}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{v})M_4^\sigma(\boldsymbol{z},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})\mathrm{d}\boldsymbol{z}\mathrm{d}\boldsymbol{v}\mathrm{d}\boldsymbol{w} \tag{13}$$

е нов статистически параметър, който накратко коментирахме по-горе.

Екстримизирайки функцията $U(\lambda_1, \lambda_2)$, получаваме

$$\operatorname{extr} U(\lambda_1,\lambda_2) = \sigma_e(\sigma_0)\langle \boldsymbol{E}\rangle^2, \tag{14}$$

където

(15) $$\sigma_{\text{HS}}^{(4)}(\sigma_0) = \sigma_0 + \frac{a_1 a_2 a_{12} - a_1^2 a_{22} - a_2^2 a_{11}}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}.$$

Съгласно вариационния принцип на Хашин и Щрикман величината $\sigma_{\text{HS}}^{(4)}(\sigma_0)$ представлява граница за ефективната проводимост σ_e : долна при $\sigma(\boldsymbol{x}) > \sigma_0$ и горна при $\sigma(\boldsymbol{x}) < \sigma_0$.

За двуфазна среда границите (15) са същите, получени от Фан-Тиен и Милтон [9], които използват разлагането в ред на Фурие на пробните полета (9), разглеждайки среда с периодична вътрешна структура при $d = 3$. За N-фазна среда при $N \geq 3$ техните граници са по-добри, тъй като по същество те разглеждат λ_1 и λ_2 като функции на проводимостите $\sigma_1, \ldots, \sigma_N$ на компонентите на средата, въвеждайки общо $2N$ вариращи се параметъра. По този начин те получават граници за σ_e, съдържащи $N^2(N-1)^2/4$ четириточкови и $N(N-1)^2/2$ триточкови геометрични параметъра. Макар и по-слабо ограничителни, разглежданите тук граници (15) се отнасят за произволна, не непременно дискретна случайна среда. Както границите на Фан-Тиен и Милтон, така и тези граници (даже границите при $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 1/\langle\sigma\rangle$) са граници от четвърти ред в смисъл, че за N-фазна среда те съвпадат до ред $\delta\sigma_a \delta\sigma_b \delta\sigma_c \delta\sigma_d$, където $\delta\sigma_s = \sigma_s - \sigma_q$ при фиксирано q, $s = 1, \ldots, N$. В частност, за двуфазна среда от границите (15) получаваме

(16) $$\frac{\sigma_e}{\sigma_2} = 1 + \sum_{k=1}^{4} \frac{1}{k!} R_k \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_2}\right)^k + o\left(\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_2}\right)^4\right),$$

с коефициенти $R_1 = \phi_1$, $R_2 = -2\,\phi_1\phi 2/d$ и

(17) $$R_3 = \frac{6}{d}\,(\phi_1^2\phi_2 - A), \qquad R_4 = -\frac{24}{d^3}\left[\phi_1^2\phi_2(d^2\phi_1 - \phi_2) - d^2(Y_4 + 2\,\phi_1 A)\right],$$

където A и Y_4 са чисто геометрични параметри на средата, които са свързани с $I_\sigma^{(3)}$ и $I_\sigma^{(4)}$ чрез равенствата

(18) $$\langle\sigma'^3\rangle\, I_\sigma^{(3)} = (\sigma_2 - \sigma_1)^3 A, \qquad \langle\sigma'^4\rangle\, I_\sigma^{(4)} = (\sigma_2 - \sigma_1)^4\, Y_4$$

и се изразяват чрез моментите на индикаторната функция $\mathcal{I}_2(\boldsymbol{x})$ за фаза 2 (равна на 1, ако $\boldsymbol{x}$ лежи във фаза 2 и на 0, ако $\boldsymbol{x}$ лежи във фаза 1) чрез интегралите

(19) $$A = \iint G_{,ij}(\boldsymbol{z}) G_{,ji}(\boldsymbol{w}) \langle\mathcal{I}_2(\boldsymbol{0})\mathcal{I}_2(\boldsymbol{z})\mathcal{I}_2(\boldsymbol{w})\rangle\, \mathrm{d}\boldsymbol{z}\mathrm{d}\boldsymbol{w},$$

(20) $$Y_4 = \iiint G_{,ij}(\boldsymbol{z}) G_{,jk}(\boldsymbol{w}) G_{,ki}(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{v}) \langle\mathcal{I}_2(\boldsymbol{0})\mathcal{I}_2(\boldsymbol{z})\mathcal{I}_2(\boldsymbol{v})\mathcal{I}_2(\boldsymbol{w})\rangle\, \mathrm{d}\boldsymbol{z}\mathrm{d}\boldsymbol{v}\mathrm{d}\boldsymbol{w};$$

в (16) и (17) ϕ_1 и $\phi_2 = 1 - \phi_1$ са обемните концентрации на двете фази с проводимости съответно σ_1 и σ_2.

За двуфазна среда границите от четвърти ред са изведени от Милтон [10, 11] чрез използване на аналитичен метод при условие, че са известни R_3 и R_4. Коефициентът R_3 е известен от триточковите граници на Беран:

(21) $$R_3 = \frac{6}{d^2}\,\phi_1\phi_2\,[\phi_2 + (d-1)\zeta_1],$$

където ζ_1 и ζ_2 са добре изучени триточкови геометрични параметри, за които $\zeta_1 = 1 - \zeta_2$ и $0 < \zeta_2 < 1$, вж. например [12]. Разглеждайки σ_e като функция на σ_1 и σ_2 и позовавайки се на свойството $\sigma_e(\sigma_1, \sigma_2)\, \sigma_e(\sigma_2, \sigma_1) = \sigma_1\sigma_2$, което е в сила само при $d = 2$, Милтон [10, 11] показва, че

$$R_4 = 3\,\phi_1\phi_2^2\,(1 + \phi_2) - 2R_3(1 + 2\phi_2) \tag{22}$$

и по този начин получава в явна форма граници от четвърти ред за σ_e в двумерния случай, изразяващи се само чрез ζ_1 и ζ_2. Позовавайки се на апроксимацията на Паде за реда на Браун, Торкуато [13] извежда в друга форма същите тези граници за двуфазна среда.

Веднага се вижда, че от изразите за R_3 в (17) и (21) можем да изразим геометричния параметър A чрез ζ_2:

$$A = \frac{1}{d}\,\phi_1\phi_2\,[(d-1)(\zeta_2 - \phi_2) + \phi_1 - \phi_2]\,. \tag{23}$$

Имайки предвид изразите за R_3 и R_4 в (17), с помощта на равенството (22) можем да изразим също четириточковия параметър Y_4 чрез ζ_2 при $d = 2$:

$$Y_4 = \frac{1}{4}\phi_1\phi_2\,[(\phi_1 - \phi_2)(4\phi_2 - 3\zeta_2) - \phi 1]\,. \tag{24}$$

Очевидно практическото приложение на границите (15) за конкретна случайна структура зависи от възможността за пресмятане на статистическите параметри $I_\sigma^{(3)}$ и $I_\sigma^{(4)}$. Докато за параметъра $I_\sigma^{(3)}$ има съществен прогрес при пресмятането му за дисперсии от непресичащи се сфери с неслучайна проводимост (вж. например [12]), за параметъра $I_\sigma^{(4)}$ няма опити за неговото пресмятане за такива дисперсии при $d = 3$.

3 Статистическо описание на дисперсията

На всека сфера с център $\boldsymbol{x}_j$ да съпоставим неговата проводимост σ_j. Така получаваме системата $\{\boldsymbol{x}_j, \sigma_j\}$ от маркирани случайни точки $\boldsymbol{x}_j$, която може да се разглежда като система от точки, случайно разпределени в областта $\mathbb{R}^d \times Q$, където $Q = [0, +\infty)$ е интервалът на изменение на проводимостите σ_j. Да дефинираме случайното поле на плътността

$$\psi(\boldsymbol{x}, \sigma) = \sum_j \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_j)\delta(\sigma - \sigma_j), \tag{25}$$

породено от системата $\{\boldsymbol{x}_j, \sigma_j\}$. Тази функция се дефинира чрез δ-функцията на Дирак и е въведена от Стратонович [14] за немаркирана система от точки $\{x_j\}$, случайно разпределени върху права. Нейното обобщение за маркирани случайни точки $\{\boldsymbol{x}_j\}$ с маркер радиуса a_j на сферата с център $\boldsymbol{x}_j$ при дисперсии от сфери със случайни радиуси се въвежда от Христов [15]. За дисперсии от сфери със случайни проводимости тази функция е въведена от автора в [5, 16]. С помощта на функцията $\psi(\boldsymbol{x}, \sigma)$ случайното поле на проводимостта $\sigma(\boldsymbol{x})$ може да се представи във вида

$$\sigma(\boldsymbol{x}) = \sigma_m + \widetilde{\sigma}(\boldsymbol{x}), \tag{26}$$

$$\widetilde{\sigma}(\boldsymbol{x}) = \iint (\sigma - \sigma_m) h(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \psi(\boldsymbol{y}, \sigma)\, \mathrm{d}\boldsymbol{y}\mathrm{d}\sigma, \tag{27}$$

където $h(\boldsymbol{x})$ е характеристична функция на сфера с център в координатното начало.

Случайната функция на плътността $\psi(\boldsymbol{y},\sigma)$ напълно определя дисперсията. Нейните моменти могат да се изразят чрез съвместните многоточкови вероятностни плътности $F_n(\boldsymbol{y}_1,\ldots,\boldsymbol{y}_n;\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$ на разпределение на центровете $\boldsymbol{x}_j$ на сферите и техните проводимости σ_j, $n=1,2,\ldots$. По-долу ще ни бъдат необходими изразите за първите четири момента, които се дават от формулите

$$\langle\psi(\boldsymbol{y},\sigma)\rangle = F_1(\boldsymbol{y};\sigma),$$
$$\langle\psi(\boldsymbol{y}_1,\sigma_1),\psi(\boldsymbol{y}_2,\sigma_2)\rangle = F_1(\boldsymbol{y}_1;\sigma_1)\delta(\boldsymbol{y}_{1,2})\delta(\sigma_{1,2}) + F_2(\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2;\sigma_1,\sigma_2),$$

$$\begin{aligned}(28)\quad \langle\psi(\boldsymbol{y}_1,\sigma_1),\psi(\boldsymbol{y}_2,\sigma_2,\psi(\boldsymbol{y}_3,\sigma_3)\rangle &= F_1(\boldsymbol{y}_1;\sigma_1)\delta(\boldsymbol{y}_{1,2})\delta(\sigma_{1,2})\delta(\boldsymbol{y}_{1,3})\delta(\sigma_{1,3})\\ &+3\left\{\delta(\boldsymbol{y}_{1,2})\delta(\sigma_{1,2})F_2(\boldsymbol{y}_2,\boldsymbol{y}_3;\sigma_2,\sigma_3)\right\}_s + F_3(\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\boldsymbol{y}_3;\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\langle\psi(\boldsymbol{y}_1,\sigma_1),\psi(\boldsymbol{y}_2,\sigma_2,\psi(\boldsymbol{y}_3,\sigma_3),\psi(\boldsymbol{y}_4,\sigma_4)\rangle\\ &\quad= F_1(\boldsymbol{y}_1;\sigma_1)\delta(\boldsymbol{y}_{1,2})\delta(\sigma_{1,2})\delta(\boldsymbol{y}_{1,3})\delta(\sigma_{1,3})\delta(\boldsymbol{y}_{1,4})\delta(\sigma_{1,4})\\ &\quad+4\left\{\delta(\boldsymbol{y}_{1,2})\delta(\sigma_{1,2})\delta(\boldsymbol{y}_{1,3})\delta(\sigma_{1,3})F_2(\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_4;\sigma_1,\sigma_4)\right\}_s\\ &\quad+3\left\{\delta(\boldsymbol{y}_{1,2})\delta(\sigma_{1,2})\delta(\boldsymbol{y}_{3,4})\delta(\sigma_{3,4})F_2(\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_3;\sigma_1,\sigma_3)\right\}_s\\ &\quad+6\left\{\delta(\boldsymbol{y}_{1,2})\delta(\sigma_{1,2})F_3(\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_3,\boldsymbol{y}_4;\sigma_1,\sigma_3,\sigma_4)\right\}_s + F_4(\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\boldsymbol{y}_3,\boldsymbol{y}_4;\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4),\end{aligned}$$

където $m\{\ \}_s$ означава симетризация относно всичките m различни комбинации от индекси в скобите, $\boldsymbol{y}_{i,j}=\boldsymbol{y}_j-\boldsymbol{y}_i$ и $\sigma_{i,j}=\sigma_j-\sigma_i$, вж. [14, 15, 16].

Приемаме, че в дисперсията няма пространствени участъци, които да имат избирателност към сфери с различни проводимости. Това означава, че статистиката на разпределение на проводимостите σ_j на сферите е независима от тази на положенията им $\boldsymbol{x}_j$, т.е.

$$F_n(\boldsymbol{y}_1,\ldots,\boldsymbol{y}_n;\sigma_1,\ldots,\sigma_n) = f_n(\boldsymbol{y}_1,\ldots,\boldsymbol{y}_n)P_n(\sigma_1,\ldots,\sigma_n), \tag{29}$$

където $f_n(\boldsymbol{y}_1,\ldots,\boldsymbol{y}_n)$ са съвместните многоточкови вероятностни плътности на разпределение на центровете $\boldsymbol{x}_j$ на сферите, а $P_n(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$ са съвместните вероятностни плътности на разпределение на техните проводимости σ_j, $n=1,2,\ldots$. Ще приемем също, че тези проводимости са статистически независими, т.е.

$$P_n(\sigma_1,\ldots,\sigma_n) = P(\sigma_1)\ldots P(\sigma_n), \tag{30}$$

където $P(\sigma)$ е вероятностната плътност на проводимостта σ на сфера от дисперсията. Ще отбележим още, че от предположената статистическа хомогенност на дисперсията следва, че $f_1(\boldsymbol{y})=n$, $f_k(\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\ldots,\boldsymbol{y}_k)=n^k g_k(\boldsymbol{y}_2-\boldsymbol{y}_1,\ldots,\boldsymbol{y}_k-\boldsymbol{y}_1)$, където n е средният брой центрове на сфери в единица обем и $g_k(\boldsymbol{y}_{1,2},\ldots,\boldsymbol{y}_{1,k})$ са k-точковите функции на разпределение, $k=2,3,\ldots$.

4 Статистическите параметри за дисперсията

Имайки предвид (26), да изразим четвъртия момент $M_4^\sigma(\boldsymbol{z},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$ от (10) с моментите на полето $\widetilde{\sigma}(\boldsymbol{x})$. Така получаваме

$$\begin{aligned}(31)\quad M_4^\sigma(\boldsymbol{z},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) &= \langle\widetilde{\sigma}(\mathbf{0})\widetilde{\sigma}(\boldsymbol{z})\widetilde{\sigma}(\boldsymbol{v})\widetilde{\sigma}(\boldsymbol{w})\rangle\\ &-\langle\widetilde{\sigma}\rangle\left[\langle\widetilde{\sigma}(\mathbf{0})\widetilde{\sigma}(\boldsymbol{z})\widetilde{\sigma}(\boldsymbol{v})\rangle+\langle\widetilde{\sigma}(\mathbf{0})\widetilde{\sigma}(\boldsymbol{z})\widetilde{\sigma}(\boldsymbol{w})\rangle+\langle\widetilde{\sigma}(\mathbf{0})\widetilde{\sigma}(\boldsymbol{v})\widetilde{\sigma}(\boldsymbol{w})\rangle+\langle\widetilde{\sigma}(\boldsymbol{z})\widetilde{\sigma}(\boldsymbol{v})\widetilde{\sigma}(\boldsymbol{w})\rangle\right]\\ &+\langle\widetilde{\sigma}\rangle^2\left[\langle\widetilde{\sigma}(\mathbf{0})\widetilde{\sigma}(\boldsymbol{z})\rangle+\langle\widetilde{\sigma}(\mathbf{0})\widetilde{\sigma}(\boldsymbol{v})\rangle+\langle\widetilde{\sigma}(\mathbf{0})\widetilde{\sigma}(\boldsymbol{w})\rangle\right.\\ &\left.+\langle\widetilde{\sigma}(\boldsymbol{z})\widetilde{\sigma}(\boldsymbol{v})\rangle+\langle\widetilde{\sigma}(\boldsymbol{z})\widetilde{\sigma}(\boldsymbol{w})\rangle+\langle\widetilde{\sigma}(\boldsymbol{v})\widetilde{\sigma}(\boldsymbol{w})\rangle\right]-3\langle\widetilde{\sigma}\rangle^4,\end{aligned}$$

където $\langle\widetilde{\sigma}\rangle = (\langle\sigma_p\rangle - \sigma_m)\phi_p$. Позовавайки се сега на интегралната форма (27) на полето $\widetilde{\sigma}(\boldsymbol{x})$, изразяваме неговите моменти чрез моментите на полето $\psi(\boldsymbol{y},\sigma)$ и след това, използвайки формулите (28) за тези моменти при предположенията (29) и (30), за статистическия параметър $I_\sigma^{(4)}$ получаваме

$$
\begin{aligned}
\langle\sigma'^4\rangle I_\sigma^{(4)} &= (\langle\sigma_p\rangle - \sigma_m)^4 \left[X_4^{(4)} - X_3^{(3)} + X_2^{(2)} - 3X_1^{(1)}\right]\phi_p^4 \\
&\quad + (\langle\sigma_p\rangle - \sigma_m)^2\langle(\sigma_p - \sigma_m)^2\rangle \left[X_3^{(4)} - X_2^{(3)} + X_1^{(2)}\right]\phi_p^3 \\
&\quad + (\langle\sigma_p\rangle - \sigma_m)\langle(\sigma_p - \sigma_m)^3\rangle \left[X_2^{(4)} - X_1^{(3)}\right]\phi_p^2 \\
&\quad + \langle(\sigma_p - \sigma_m)^2\rangle^2\, \widetilde{X}_2^{(4)}\phi_p^2 + \langle(\sigma_p - \sigma_m)^4\rangle\, X_1^{(4)}\phi_p\,,
\end{aligned} \tag{32}
$$

където $X_n^{(m)}$ е изразът, съдържащ в интегрална форма n-тата корелационна функция $g_n(\boldsymbol{y}_1,\ldots,\boldsymbol{y}_n)$, който се получава при заместване на полето $\widetilde{\sigma}(\boldsymbol{x})$ в m-тите му моменти в (31), $m,n = 1,\ldots,4$. Същият смисъл има и означението на израза $\widetilde{X}_2^{(4)}$. Използвайки свойствата на функцията на Грийн $G(\boldsymbol{x})$ и нютоновия потенциал $\varphi(\boldsymbol{x}) = \int h(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})G(\boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{y}$, за изразите $X_1^{(m)}$ лесно намираме

$$
X_1^{(1)} = X_1^{(4)} = -\frac{1}{d^2}, \quad X_1^{(2)} = -\frac{d^2+2d+3}{d^2}, \quad X_1^{(3)} = -\frac{2(d+1)}{d^2}. \tag{33}
$$

За изследването на границите (15) е удобно да подредим $\langle\sigma'^4\rangle\, I_\sigma^{(4)}$ по степените на $(\langle\sigma_p\rangle - \sigma_m)$ и моментите на случайната проводимост σ_p на сферите. Така получаваме представянето

$$
\begin{aligned}
\langle\sigma'^4\rangle\, I_\sigma^{(4)} &= (\langle\sigma_p\rangle - \sigma_m)^4\, Y_4 + (\langle\sigma_p\rangle - \sigma_m)^2\langle\sigma_p'^2\rangle\, Y_3 + (\langle\sigma_p\rangle - \sigma_m)\langle\sigma_p'^3\rangle\, Y_2 \\
&\quad + \langle\sigma_p'^2\rangle^2\, \widetilde{Y}_2 - \frac{1}{d^2}\langle\sigma_p'^4\rangle\phi_p,
\end{aligned} \tag{34}
$$

където

$$
\begin{aligned}
Y_4 &= \left(X_4^{(4)} - X_3^{(3)} + X_2^{(2)} - 3X_1^{(1)}\right)\phi_p^4 + \left(X_3^{(4)} - X_2^{(3)} + X_1^{(2)}\right)\phi_p^3 \\
&\quad + \left(X_2^{(4)} + \widetilde{X}_2^{(4)} - X_1^{(3)}\right)\phi_p^2 + X_1^{(4)}\phi_p, \\
Y_3 &= \left(X_3^{(4)} - X_2^{(3)} + X_1^{(2)}\right)\phi_p^3 + \left[3\left(X_2^{(4)} - X_1^{(3)}\right) + 2\,\widetilde{X}_2^{(4)}\right]\phi_p^2 + 6\,X_1^{(4)}\phi_p, \\
Y_2 &= \left(X_2^{(4)} - X_1^{(3)}\right)\phi_p^2 + 4\,X_1^{(4)}\phi_p, \quad \widetilde{Y}_2 = \widetilde{X}_2^{(4)}\phi_p^2.
\end{aligned} \tag{35}
$$

От (34) веднага забелязваме, че за дисперсия с неслучайна проводимост σ_p на сферите е в сила равенството $\langle\sigma'^4\rangle I_\sigma^{(4)} = (\langle\sigma_p\rangle - \sigma_m)^4\, Y_4$, което сравнено с второто равенство в (18) при $\sigma_p = \sigma_2$ и $\sigma_m = \sigma_1$ показва, че тук Y_4 е същият четириточков геометричен параметър, представен в (20). Така установихме, че пресмятането на параметъра $I_\sigma^{(4)}$ се свежда до пресмятането на четири геометрични параметъра: четириточковия Y_4, триточковия Y_3 и двата двуточкови Y_2 и $\widetilde{Y}_2$. Според (24) в двумерният случай на дисперсия от цилиндрични влакна параметърът Y_4 се изразява чрез триточковия параметър ζ_2. Ще отбележим само, че даже и тогава оставащите параметри Y_2, $\widetilde{Y}_2$ и Y_3 се изразяват в по-сложна интегрална форма от съответните им геометрични параметри за параметъра $I_\sigma^{(3)}$. Ето защо се налага обмислянето на числена процедура за тяхното пресмятане.

ЛИТЕРАТУРА:

[1] Maxwell, J.C., A Treatise on Electricity and Magnetism. Vol.1, Ch. 9, article No 310-315, pp. 435-441, 1st edn. Oxford, United Kingdom: Clarendon Press (1873).

[2] Beran, M.J., Use of the variational approach to determine bounds for the effective permittivity in random media. Nuovo Cimento **38** (1965), 771–782.

[3] Silnutzer, N.R., Effective constants of statistically homogeneous materials, Ph.D. thesis, University of Pennsylvania (1972).

[4] Hashin, Z., Shtrikman, S., A variational approach to the theory of the effective magnetic permeability of multiphase materials. J. Appl. Phys., **33** (1962), 3125–3131.

[5] Tsvyatkov, Kr.D., On the method of functional series for evaluating the properties of random structured media, Ph.D. thesis, University of Sofia (1993) (In Bulgarian).

[6] Markov, K.Z., Zvyatkov, Kr.D., Functional series and Hashin-Shtrikman type bounds on the effective properties of random media, In: Recent Advances in Mathematical Modelling of Composite Materials, K. Z. Markov., Ed., World Sci. (1994), 59–106.

[7] Tsvyatkov, Kr.D., On the effective conductivity of multi-phase dispersions, Proc. of the Conference MATHTEX 2012, University of Shumen, Fac. Math. Inf., **1** (2013), 85–90 (in Bulgarian).

[8] Tsvyatkov, Kr.D., On the effective bulk modulus of multi-phase dispersions, Annuaire Univ. Shumen, Fac. Math. Inf., **XVIII** C (2017), 25–43 (in Bulgarian).

[9] Phan-Thien, N., Milton, G.W., New bounds on the effective thermal conductivity of N-phase materials. Proc. R. Soc. Lond. A **380** (1982), 333–348.

[10] Milton, G.W., Bounds on the transport and optical properties of a two-component composite material. J. Appl. Phys. **52** (1981), 5294–5304.

[11] Milton, G.W., Bounds on the elastic and transport properties of two-component composites. J. Mech. Phys. Solids **30** (1982), 177-191.

[12] Torquato, S., Random Heterogeneous Materials: Microstructure and Macroscopic Properties. Springer-Verlag (2002).

[13] Torquato, S., Effective electrical conductivity of two-phase disordered composite media. J. of Appl. Phys., **58** (1985), 3790–3797.

[14] Stratonovich, R.L., Topics in theory of random noises. Vol. 1, New York, Gordon and Breach (1967).

[15] Christov, C.I., A further development of the concept of random density function with application to Volterra-Wiener expansions. C. R. Acad. bulg. sci. **38** (1) (1985), 35–38.

[16] Zvyatkov, Kr.D., On the effective conductivity of a class of random dispersions, Annuaire Univ. Sofia, Fac. Math. Inf., Livre 2, **89** (1995), 217–235.

Красимир Димитров Цвятков
Шуменски университет “Еп. К. Преславски”, ФМИ, 9700 Шумен
E-mail: k.tsvyatkov@shu.bg