FOR MATRIX EQUATION $X - A^*XA - B^*X^{-1}B = I^*$

Aynur A. Ali

ABSTRACT: *In this paper we studi the matrix equation $X - A^*XA - B^*X^{-1}B = I$. Sufficient conditions for the existence of a positive definite solution have been obtained. An iterative method is proposed to find a positive definite solution of the equation under consideration. It is proved a convergence of the considered method. The theoretical results are illustrated by numerical examples.*

KEYWORDS: *nonlinear matrix equation, fixed point iteration, inversion free iteration, convergence rate*

ЗА МАТРИЧНОТО УРАВНЕНИЕ $X - A^*XA - B^*X^{-1}B = I$

Айнур А. Али

АБСТРАКТ: *В тази работа изучаваме матричното уравнение $X - A^*XA - B^*X^{-1}B = I$. Получени са достатъчни условия за съществуване на положително определено решение. Предложен е итерационен метод за намиране на положително определно решение на разглежданото уравнение. Доказана е сходимостта на този итерационен процес. Теоретичните резултати са илюстрирани с числени примери.*

1 Въведение

В тази статия разглеждаме матричното уравнение

$$X - A^*XA - B^*X^{-1}B = I, \tag{1}$$

където A и B са квадратни матрици, а I е единичната матрица.

В случай на $B = 0$, уравнението (1) се свежда до познатото уравнение на Стейн $X - A^*XA = I$, а при $A = 0$, се свежда до добре изученото уравнение $X - B^*X^{-1}B = I$ [2, 3, 4, 5, 6] и тяхната литература. За него е доказано, че винаги има положително определено решение.

D.Gao [1] изследват уравнението

$$X - A^*X^pA - B^*X^{-q}B = I \quad (0 < p, q < 1). \tag{2}$$

В [1] е доказано, че уравнението (2) винаги има единствено положително определено решение и са предложени два итерацинни метода за получаване на това решение. През последните години обект на изследване са и уравненията $X + A^*X^{-1}A - B^*X^{-1}B = I$ [13, 14, 18], $X + A^*X^{-1}A + B^*X^{-1}B = I$ [7, 8, 12], $X + \sum_{i=1}^{m} A_i^*X^{-1}A_i = I$ [10, 11, 15, 16].

Мотивирани от работите [1, 3, 14, 18], в тази работа изследваме уравнението (1). Получени са достатъчни условия за съществуването на положително определено решение на това уравнение. Предложен е итерационен метод за намиране на положително определено решение и е изследвана нейната сходимост. Накрая, с някои числени експерименти е илюстрирано теоретичното съдържание.

*Partially supported by Scientific Research Grant RD-08-145/2018 of Shumen University.

Използвани са следните означения: $A > 0 (A \geq 0)$, означава че A е ермитова положително определена (полуопределена) матрица; за $N \geq M > 0$, с $[M, N]$ означаваме множеството от матрици $\{X : M \leq X \leq N\}$; $\lambda(C)$ е собствена стойност на $n \times n$ ермитова матрица C; $\rho(A)$ е спектралния радиус; и $\|A\|$ е спектралната норма ($\|A\| = \sqrt{\rho(A^*A)}$).

2 Основни резултати

Преди да изкажем основните резултати ще въведем една помощна лема, която ще използваме.

Лема 2.1. ***[17, Lemma 2.2.]*** *Нека C и W са квадратни матрици.*

1. *ако $\rho(C) < 1$, тогава уравнението на Стейн $X - C^*XC = W$ има единствено решение P и $P \geq 0 (P > 0)$, когато $W \geq 0 (W > 0)$*
2. *ако има някаква матрица $P > 0$, такава, че $P - C^*PC$ е положително определена(полуопределена) матрица, то $\rho(C) < 1 (\rho(C) \leq 1)$*

Нека въведем и докажем първия основен резултат в следната теорема

Теорема 2.1. *Нека уравнението (1) има положително определено решение X. Тогава*

(i) $\rho(A) < 1$,

(ii) $\rho(X^{-1}B) < 1$,

(iii) $X \geq M$, *където M е решение на уравнението $X - A^*XA = I$.*

Доказателство:

Нека уравнение (1) има положително определено решение X. Уравнение (1) записваме по следния начин

$$X - A^*XA = I + B^*X^{-1}B. \tag{3}$$

За дясната страна на уравнение (3) при $X > 0$ имаме $I + B^*X^{-1}B > 0$. От условие 2. на Лема 2.1 за уравнението (3) следва, че $\rho(A) < 1$. При доказателството на (ii) използваме аналогични разсъждения на горното.

От (1) получаваме

$$X - (BX^{-1})^*X(X^{-1}B) = I + A^*XA. \tag{4}$$

За дясната страна на уравнението (4) имаме $I + A^*XA > 0$. Отново от Лема 2.1 следва, че

$$\rho(X^{-1}B) < 1.$$

При наличие на положително определено решение на уравнение (1) доказахме, че $\rho(A) < 1$. Съгласно Лема 2.1 точка 1 при $\rho(A) < 1$ уравнението $X - A^*XA = I$ има единствено решение $M > 0$, което се задава с формулата $M = \sum_{i=0}^{\infty}(A^*)^iA^i$ [17]. Разглеждаме

$$X - A^*XA = I + B^*X^{-1}B$$

и

$$M - A^*MA = I.$$

След почленно изваждане на горните уравнения получаваме

$$(X - M) - A^*(X - M)A = B^*XB. \tag{5}$$

За дясната страна на уравнението (5) при $X > 0$ имаме $B^*XB \geq 0$. Съгласно Лема 2.1 точка 1 имаме $X \geq M$. □

Сега разглеждаме следния итерационен процес

$$\begin{cases} X_0 = I, \;\; Y_0 = \beta I, \;\; \beta > 1 \\ X_{k+1} = I + A^*X_kA + B^*Y_k^{-1}B, \quad k = 0, 1, \ldots \\ Y_{k+1} = I + A^*Y_kA + B^*X_k^{-1}B, \end{cases} \tag{6}$$

Теорема 2.2. *Ако* $\|A\|^2 + \|B\|^2 < 1$*, то уравнението (1) има единствено положително определено решение* X*. Освен това итерационния процес (6) за*

$$\beta \geq \frac{1 + \|B\|^2}{1 - \|A\|^2}$$

е сходящ към единственото положително определено решение $X \in [I, \beta I]$.

Доказателство: За редиците $\{X_k\}$ и $\{Y_k\}$, генерирани от итерационния процес (6) имаме

$$X_1 = I + A^*X_0A + B^*Y_0^{-1} = I + A^*A + \frac{1}{\beta}B^*B \geq I = X_0$$

и

$$Y_1 = I + A^*Y_0A + B^*X_0^{-1}B = I + \beta A^*A + B^*B \leq \beta I = Y_0.$$

Разглеждаме разликата на Y_1 и X_1,

$$\begin{aligned} Y_1 - X_1 &= \beta A^*A + B^*B - A^*A - \frac{1}{\beta}B^*B \\ &= (\beta - 1)A^*A + (1 - \frac{1}{\beta})B^*B \geq 0 \end{aligned}$$

Следователно $X_0 \leq X_1 \leq Y_1 \leq Y_0$. Нека $X_{k-1} \leq X_k \leq Y_k \leq Y_{k-1}$. Ще докажем, че $X_k \leq X_{k+1} \leq Y_{k+1} \leq Y_k$. Разглеждаме

$$\begin{aligned} X_{k+1} - X_k &= A^*X_kA + B^*Y_k^{-1}B - A^*X_{k-1}A + B^*Y_{k-1}^{-1}B \\ &= A^*(X_k - X_{k-1})A + B^*(Y_k^{-1} - Y_{k-1}^{-1})B \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_k - Y_{k+1} &= A^*Y_{k-1}A + B^*X_{k-1}^{-1}B - A^*Y_kA - B^*X_k^{-1}B \\ &= A^*(Y_{k-1} - Y_k)A + B^*(X_{k-1}^{-1} - X_k^{-1})B \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_{k+1} - X_{k+1} &= A^*Y_kA + B^*X_k^{-1}B - A^*X_kA - B^*Y_k^{-1}B \\ &= A^*(Y_k - X_k)A + B^*(X_k^{-1} - Y_k^{-1})B \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Съгласно метода на математическата индукция редиците $\{X_k\}$ и $\{Y_k\}$ са сходящи. Нека $\lim_{n\to\infty} X_n = X$ и $\lim_{n\to\infty} Y_n = Y$. От (6) имаме

$$\begin{aligned} X &= I + A^*XA + B^*Y^{-1}B \\ Y &= I + A^*YA + B^*X^{-1}B. \end{aligned}$$

След почленно изваждане на двете уравнения, получаваме

$$Y - X = A^*(Y - X)A + B^*X^{-1}(Y - X)Y^{-1}B$$

и

$$\begin{aligned} \|X - Y\| &\leq \|A\|^2\|Y - X\| + \|X^{-1}B\|\|Y^{-1}B\|\|Y - X\| \\ &\leq \|A\|^2\|Y - X\| + \|X^{-1}\|\|B\|\|Y^{-1}\|\|B\|\|Y - X\| \\ &\leq (\|A\|^2 + \|B\|^2)\|Y - X\|. \end{aligned}$$

Тъй като $(\|A\|^2 + \|B\|^2) < 1$, $X \equiv Y$. Следователно уравнението има решение.

Нека X и $\widetilde{X}$ са две различни положително определени решения на уравнението (1). Тогава

$$\begin{aligned} X &= I + A^*XA + B^*X^{-1}B, \\ \widetilde{X} &= I + A^*\widetilde{X}A + B^*\widetilde{X}^{-1}B, \\ \widetilde{X} - X &= A^*(\widetilde{X} - X)A - B^*X^{-1}(\widetilde{X} - X)\widetilde{X}^{-1}B. \end{aligned}$$

От тук

$$\|\widetilde{X} - X\| \leq (\|A\|^2 + \|B\|^2)\|\widetilde{X} - X\|. \tag{7}$$

Тъй като $(\|A\|^2 + \|B\|^2) < 1$, $\widetilde{X} \equiv X$.

С това теоремата е доказана. □

3 Числени експерименти

В тази секция даваме някои примери, които илюстрират, че матричните редици $\{X_k\}$ и $\{Y_k\}$, дефинирани от (6), са сходящи към единственото положително определено решение $\widehat{X}$ на уравнението (1).

Разглеждаме

$$R(X_k) = \|X_k - A^*X_kA - B^*X_k^{-1}B - I\|.$$

За стоп критерий използваме

$$\|Y_k - X_k\| \leq 10^{-10}.$$

Пример 3.1. *Разглеждаме матричното уравнение (1) с*

$$A = \frac{1}{56}\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 2 \\ -1 & -6 & 3 & 4 \\ -4 & 3 & 7 & 5 \\ 1 & 8 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{70}\begin{pmatrix} 7 & 9 & 6 & 8 \\ 7 & 5 & 8 & 3 \\ 9 & 8 & 6 & 7 \\ 11 & 5 & 9 & 3 \end{pmatrix}.$$

Разглеждаме итерационния процес (6) с $X_0 = I$ и $Y_0 = \frac{1+\|B\|^2}{1-\|A\|^2} = 1.2256$. За матриците A и B имаме $(\|A\|^2 + \|B\|^2) = 0.2141 < 1$. След 11 итерации по итерационния метод (6) получаваме

$$X_{11} \approx Y_{11} \approx \begin{pmatrix} 1.0592 & 0.0411 & 0.0349 & 0.0227 \\ 0.0411 & 1.0788 & 0.0450 & 0.0320 \\ 0.0349 & 0.0450 & 1.0641 & 0.0466 \\ 0.0227 & 0.0320 & 0.0466 & 1.0403 \end{pmatrix}$$

$$R(X_{11}) = 4.7877e^{-11}, \quad R(Y_{11}) = 4.8721e^{-11}$$

$$R_{11} = 4.5543e^{-13}.$$

Пример 3.2. *Разглеждаме уравнение (1) с*

$$A = \frac{1}{820}\begin{pmatrix} 41 & 15 & 23 & 35 & 66 \\ 25 & 12 & 27 & 45 & 21 \\ 23 & 27 & 28 & 16 & 24 \\ 15 & 45 & 16 & 52 & 65 \\ 66 & 21 & 24 & 65 & 35 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{830}\begin{pmatrix} 23 & 21 & 23 & 25 & 32 \\ 21 & 45 & 60 & 42 & 33 \\ 23 & 24 & 34 & 18 & 17 \\ 13 & 42 & 18 & 44 & 30 \\ 32 & 33 & 26 & 30 & 26 \end{pmatrix}.$$

Разглеждаме итерационния процес (6) с $X_0 = I$ и $Y_0 = \frac{1+\|B\|^2}{1-\|A\|^2} = 1.1454$. За матриците A и B е изпълнено $(\|A\|^2 + \|B\|^2) = 0.1387 < 1$. След 9 итерации по итерационния процес (6) получаваме

$$X_9 \approx Y_9 \approx \begin{pmatrix} 1.0154 & 0.0107 & 0.0177 & 0.0174 & 0.0151 \\ 0.0107 & 1.0137 & 0.0173 & 0.0161 & 0.0148 \\ 0.0177 & 0.0173 & 1.0826 & 0.0216 & 0.0218 \\ 0.0174 & 0.0161 & 0.0216 & 1.0242 & 0.0209 \\ 0.0151 & 0.0148 & 0.0218 & 0.0209 & 1.0224 \end{pmatrix}$$

$$R(X_9) = 8.2086e^{-12}, \quad R(Y_9) = 8.2086e^{-12},$$

$$R_9 = 2.2219e^{-16}.$$

ЛИТЕРАТУРА:

[1] Gao, D., Iterative Methods for Solving the Nonlinear Matrix Equation $X - A^*X^pA - B^*X^{-1}B = I(0 < p, q < 1)$, Advances in Linear Algebra and Matrix Theory, 72-78, September 27, 2017

[2] Ferrante, A., Levy, B., Hermitian solution of the equation $X = Q + NX^{-1}N^*$, Linear Algebra Appl., 247:359–373, 1996.

[3] Guo, CH., Lancaster, P., Iterative solution of two matrix equations, Math Comput, 68:1589–1603, 1999.

[4] B. Meini, B., Efficient Computation of the Extreme Solutions of $X + A^*X^{-1}A = Q$ and $X - A^*X^{-1}A = Q$, Math. Comp., 71:1189–1204, 2002.

[5] Hasanov, V.I., Ivanov, I.G., On two Perturbation Estimates of the Extreme Solutions to the Matrix Equations $X \pm A^*X^{-1}A = Q$, Linear Algebra Appl., 413:81–92, 2006.

[6] Hasanov, V.I., Notes on two perturbation estimates of the extreme solutions to the equations $X \pm A^*X^{-1}A = Q$, Appl. Math. Comp., 216:1355–1362, 2010.

[7] Long, J., Hu, X., Zhang, L., On the Hermitian positive definite solution of the matrix equation $X + A^*X^{-1}A + B^*X^{-1}B = I$, Bull. Braz. Math. Soc., 39:371–386, 2008.

[8] Vaezzadeh, S., Vaezpour, S., Saadati, R., Park, C., The iterative methods for solving nonlinear matrix equation $X + A^*X^{-1}A + B^*X^{-1}B = Q$, Adcances in Difference Equations 2013, 2013:229.

[9] Ran, A.C.M., Reurings, M.C.B., On the nonlinear matrix equation $X + A^*\mathcal{F}(X)A = Q$: solution and perturbation theory, Linear Algebra Appl., 346:15–26, 2002.

[10] Konstantinov, M., Petkov, P., Popchev, I., Angelova, V., Sensitivity of the matrix equation $A_0 + \sum_{i=1}^{k} \sigma_i A_i^* X^{p_i} A_i = 0$, $\sigma_i = \pm 1$., Appl. Comput. Math., 10:409-427, 2011.

[11] Popchev, I., Konstantinov, M., Petkov, P., Angelova, V., Norm-wise, mixed and component-wise condition numbers of matrix equation $A_0 + \sum_{i=1}^{k} \sigma_i A_i^* X^{p_i} A_i = 0$, $\sigma_i = \pm 1$., Appl. Comput. Math., 14:18-30, 2014.

[12] Duan, X.F., Wang, Q.W., Li, Ch.M., Positive definite solution of a class of nonlinear matrix equation, Linear and Multilinear Algebra, 62(6):839-852, 2014.

[13] Berzig, M., Duan, X., Samet, B., Positive definite solution of the matrix equation $X = Q - A^*X^{-1}A + B^*X^{-1}B$ via Bhaskar-Lakshmikantham fixed point theorem, Mathematical Sciences, 2012, 6:27, 2012.

[14] Ali, A., Hasanov, V., On some sufficient conditions for the existence of a positive definite solution of the matrix equation $X + A^*X^{-1}A - B^*X^{-1}B = I$, AIP Conference Proceedings, V. 1690, 2015, Article number 060001

[15] Y. He, J. Long, On the Hermitian positive definite solution of the nonlinear matrix equation $X + \sum_{i=1}^{m} A_i^* X^{-1} A_i = I$, *Appl. Math. Comput.*, 216:3480–3485, 2010.

[16] X. Duan, C. Li, A. Liao, Solutions and perturbation analysis for the nonlinear matrix equation $X + \sum_{i=1}^{m} A_i^* X^{-1} A_i = I$, *Appl. Math. Comput.*, 218:4458–4466, 2011.

[17] Lancaster, P., Tismenetsky, M., The Theory of matrices. 2nd ed., San Diego(CA):Academic Press, 1985.

[18] Hasanov, V., On the matrix equation $X + A^*X^{-1}A - B^*X^{-1}B = I$, Linear and Multilinear Algebra, 66(9):1783-1798, 2018

Айнур Али,
Факултет по математика и информатика,
Шуменски университет "Еп. К. Преславски"
E-mail: `ainur_80@mail.bg`