ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В КУРСЕ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Валентина Н. Клиндухова, Ольга В. Ляшко, Анастасия В. Гейлик

GRAPHIC METHODS OF THE MATHEMATICAL PROGRAMMING IN THE HIGHER MATHEMATICS COURSE

Valentina N. Klindukhova, Olga V. Lyashko, Anastasiia V. Geilyk

ABSTRACT: *The aim of the study is to reveal the idea of using the mathematical tools of the fundamental course of higher mathematics in modern economic and mathematical methods for students training areas "Sea and river transport". Systematized optimization methods to solve navigation tasks professionally oriented. Substantiates the technique of using elements of mathematical programming during the study course "Higher Mathematics". Available examples of tasks, methods and models that show the relationship of individual elements of the mathematical tools. The results ensure the development of counting and graphic culture, the highest level of general mathematical and vocational training of students of technical specialties.*

KEYWORDS: *higher mathematics, linear programming, mathematical programming, graphic methods, inequality wish two variables, gradient, level line.*

Известно, что основной особенностью образовательных процессов XX – го века, международной конференцией ЮНЕСКО, признан переход от ОБУЧЕНИЯ (teaching) к образованию (education), а также повышение внимания к фундаментальным знаниям, к более интенсивному развитию творческого потенциала субъектов обучения, к использованию ИКТ [2, с.7]. Система современного математического образования не может стоять и не стоит в стороне от соответствующих исследований и попыток их практической реализации.

Методологическими вопросами изучения математических дисциплин на уровне высших учебных заведений занимались Е.Власенко, Н.Ванжа, А.Дутка, В.Клочко, Т.Крилова, Е.Скафа, Л.Ничуговськьа, Л.Межейникова и многие другие украинские и зарубежные ученые. Их работы посвящены различным отдельным аспектам данной проблемы. Однако в трудах почти всех исследователей прослеживается мысль о том, что недостатками современной математической подготовки студентов вузов является формализация математических знаний, рецептурный характер усвоения математического материала, отсутствие межпредметных связей математики с другими дисциплинами, слабые навыки использования математического аппарата при изучении специальных дисциплин и при применении ИКТ [5, с.27]. Таким образом, основным стратегическим направлением исследовательской методологической работы сегодня можно считать создание дидактических и психолого-педагогических предпосылок, способствующих обновлению мотивационной сферы студентов, а также вовлечению их в интенсивную математическую деятельность на интеллектуальном уровне и на уровне личной социальной активности.

Как все указанное учесть и реализовать на практике? Одним из многих возможных путей является дополнение традиционного содержания математических дисциплин, содержанием, способствующему оптимальному соотношению между фундаментальностью, профессиональной, прикладной и практической направленностью математической подготовки студентов, а также развитием их общенаучного мировоззрения.

Цель нашей статьи: привести несколько соответствующих примеров. Примеры задач, которые будут предложены ниже, демонстрируют попытки «вплетение» некоторых отдельных элементов математического аппарата, а также методов и моделей оптимизационного характера в традиционное содержание высшей математики. На наш взгляд, удачным практическим материалом, в данном контексте, есть некоторые задачи математического программирования, которые можно решить графическим способом.

Приведем конкретные примеры, связывая при этом фабулы стандартных задач линейного программирования со спецификой нашего вуза, в частности с подготовкой студентов направления «Транспортные технологии», «Морской и речной транспорт» [7, с.205].

Задача 1. В некоторые пункты необходимо доставить 200 000 тонн груза. Для доставки могут быть выделены 11 мелкосидящих грузовых теплоходов ГТ-1 и 8 крупногабаритных теплоходов ГТ-2. По некоторым кадровым и техническим показателям действуют определенные квоты: в целом необходимо использовать не менее 15 судов; количество использованных судов ГТ-1 не более чем на 5 единиц превышать количество использованных судов ГТ-2. Эксплуатационные расходы для судов ГТ-1 составляют 17 тыс. денежных единиц за период доставки, а для ГТ-2 – 20 тыс. денежных единиц. Провозная способность каждого судна за период доставки соответственно: 10 тыс. тонн и 18 тыс. тонн. Определить минимальные эксплуатационные расходы, а также соответствующее количество судов обоих классов x_1 (ГТ-1) и x_2 (ГТ-2), необходимых для обеспечения доставки в указанных условиях.

Комментарии к решению задачи. Считаем, что суда обоих классов в течение всего периода завоза могут использоваться на полную грузоподъемность, что позволяет без значительных погрешностей принять линейную зависимость провозной способности от числа использованных судов [7, с.205]. Таким образом, перевозочная способность по всем судам обоих типов равна: $(10x_1 + 18x_2)$.

Обозначим через z - эксплуатационные расходы по осуществлению доставки, тогда целевая функция задачи будет иметь вид:

$$z = 17x_1 + 20x_2 \to \min \ ,$$

а система ограничений:

$$\begin{cases} 10x_1 + 18x_2 \geq 200 \\ x_1 + x_2 \geq 15 \\ x_1 - x_2 \leq 5 \\ x_1 \leq 11, x_2 \leq 8 \\ x_1 > 0, x_2 > 0 \end{cases}$$

Первым этапом решения задачи линейного программирования графическим способом является построение на координатной плоскости $x_1 O x_2$ решения вышеприведенной системы неравенств (области определения целевой функции), которое в линейном программировании называют многоугольником (областью) допустимых решений.

Вопросам, которые отображают геометрический смысл линейных неравенств с двумя неизвестными совсем не уделяется внимание в школьном курсе математики (кроме классов с углубленным изучением математики) и почти не уделяется внимания в курсе высшей математики. Именно поэтому важно и целесообразно подобными задачами дополнить традиционный курс высшей математики. Во-первых, с пропедевтическими целями. В частности, для обеспечения базового уровня знаний при изучении различных предметов интегративного характера (исследование операций, эконометрия, оптимизационные методы и модели, экономико-математические методы и модели, методы принятия решений в анализе). Во-вторых, с целью формирования более качественных представлений студентов о ключевых идеях, понятиях и утверждениях аналитической геометрии.

Предлагаемую задачу можно решать со студентами в начале изучения курса высшей математики (при изучении элементов аналитической геометрии) и (или) позже (при изучении дифференциального исчисления функций нескольких переменных).

В ***первом случае*** основное внимание студентов обращается на построение многоугольника допустимых решений *ABCDE* (рис.1):

- построение соответствующих прямых: $10x_1 + 18x_2 = 200$ (1); $x_1 + x_2 = 15$ (2); $x_1 - x_2 = 5$ (3); $x_1 = 11$ (4); $x_2 = 8$ (5);

- нахождение точек их пересечения: $A(8{,}75;6{,}25)$, $B(7;8)$, $C(11;8)$, $D(11;6)$, $E\left(\frac{145}{14};\frac{75}{14}\right)$;

- определение полуплоскостей, являющимися решениями линейных неравенств с двумя переменными;

- определение области пересечения вышеуказанных полуплоскостей: многоугольник *ABCDE.*

Техника выполнения вышеуказанных действий подробно и доступно изложена в известных учебных пособиях [1, с.21], [3, с.23], [6, с.60].

Далее, используя такой прием умственной деятельности как установление и использование аналогий, студентам сообщается (обоснование соответствующих утверждений будут приведены позже), что поскольку целевая функция z, будучи линейной, не может иметь точек экстремума внутри области допустимых решений, то она достигает наибольшего и наименьшего значения на границе области. Система ограничений также является линейной, поэтому можно сделать вывод, что наибольшего и наименьшего значения целевая функция достигает в вершинах полученного многоугольника допустимых решений.

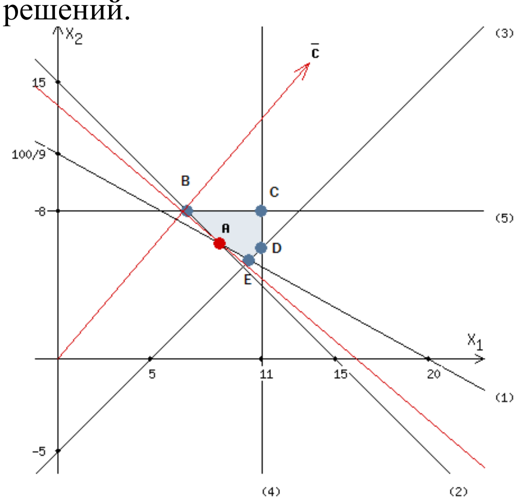

Рис 1. Многоугольник допустимых решений, линия уровня и градиент целевой функции.

Вершины упомянутого многоугольника в линейном программировании называют опорными решениями (или опорными планами). Таким образом, найти наименьшее (или наибольшее) значение целевой функции можно следующим образом:
- вычислить значение функции в вершинах полученного многоугольника:

$$z_A(8{,}75;6{,}25)=273{,}75;\, z_B(7;8)=279;\, z_C(11;8)=347;\, z_D(11;6)=307;\, z_E\left(\frac{145}{14};\frac{75}{14}\right)\approx 283$$

- выбрать из этих значений наименьшее (наибольшее) и указать опорное решение, при котором целевая функция приобретает соответствующего экстремального значения (его называют оптимальным):

$$z_{\min}(8{,}75;6{,}25)=273{,}75\,.$$

В задачах, где переменными целевой функции могут быть любые действительные числа, полученное выражение отражает решение (оптимальный план). Однако, согласно содержанию предлагаемой оптимизационной задачи, переменные x_1 и x_2 могут принимать только целые значения.

Если округлить значения переменных, то получим $x_1=9$ и $x_2=6$. Но точка с такими координатами не принадлежит многоугольнику допустимых решений *ABCDE*. Такой вывод можно сделать либо путем визуального анализа, или аналитически:

$$10x_1+18x_2=10\cdot 9+18\cdot 6\le 200\,.$$

Таким образом, округление полученного числового значения может привести к неправильному результату. Поэтому предлагаемую задачу следует рассматривать как задачу целочисленного программирования [3, с.24]. Приблизим многоугольник допустимых решений *ABCDE* вписанным многоугольником с вершинами в целых точках *LCDFKM* (рис.2), где *L*(8;8), *C*(11;8), *D*(11;6), *F*(10;6), *K*(10;7), *M*(8;7), тогда

$$z_L(8;8)=296;\, z_C(11;8)=347;\, z_D(11;6)=307;\, z_F(10;6)=290;\, z_K(10;7)=310;\, z_M(8;7)=276,$$

$$z_{\min}(8;7)=276.$$

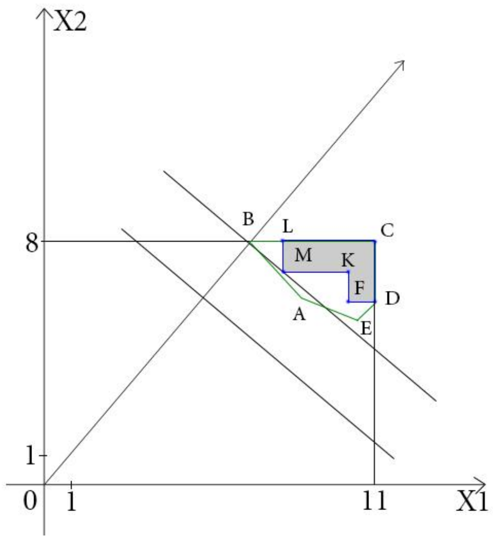

Рис 2. Приближение многоугольника допустимых решений *ABCDE* вписанным многоугольником с вершинами в целых точках *LCDFKM*

Во **втором случае** основное внимание студентов сосредотачивается на понимании смысла, содержания и использования следующих понятий: линия уровня функции двух переменных, градиент функции. Такой подход значительно сокращает процесс решения задачи и качественно переориентирует его.

После построения многоугольника допустимых решений, строят линии уровня и градиент целевой функции (рис.1):

$17x_1 + 20x_2 = 250$

...

$17x_1 + 20x_2 = 270$

$\vec{c} = \overrightarrow{grad\, z} = (17;20)$

При этом целесообразно обратить внимание студентов на роль, важность и многочисленное использование линий уровня, как одного из способов наглядного изображения и исследования поведения функций многих переменных. Известно, что в процессе построения графиков функций двух переменных в основном возникают значительные трудности. Присваивая функции различные значений k $(z = f(x,y) = k, k = const)$, и каждый раз строя линию с заданным уровнем k получаем ряд линий уровня (их часто называют топологической картой графика функции). Полученное семейство линий уровня дает наглядное представление о характере изменения функции, а также позволяет судить о графике функции $z = f(x,y)$. Примерами использования линий уровня есть: параллели и меридианы на глобусе (линий уровня функции широты и долготы); синоптики публикуют карты с изображением изотерм и изобар (линии уровня температуры); в экономике примером линий уровня являются изокванты (линии, вдоль которых производственная функция равна константе) [4 с.394]. В предлагаемых задачах целевая функция является линейной, поэтому линии уровня представляют собой семейство прямых.

Не менее важно обратить внимание студентов на значимость и использование понятия градиента целевой функции. Известно, что именно градиент целевой функции, показывает направление ее наибольшего роста. Также известно, что градиент функции $\overrightarrow{grad\, z}(M_0)$ является вектором нормали касательной, проведенной к линии уровня в точке $M_0(x_0; y_0)$. Именно поэтому для нахождения экстремумов целевой функции осуществляют параллельный перенос линии уровня в направлении $\overrightarrow{grad\, z}$ (для нахождения максимума целевой функции) или в обратном направлении $-\overrightarrow{grad\, z}$ (для нахождения минимума целевой функции). Параллельный перенос осуществляется до тех пор, пока линия уровня не пройдет через последнюю точку (точки) ее пересечения с областью решений. Координаты указанной точки и определяют оптимальный план задачи.

Понятно, что, как и в первом случае, переменные x_1 и x_2 могут приобретать только целые значения. В качестве многоугольника допустимых решений используют многоугольник *LCDFKM* (вместо *ABCDE*). А последней точкой, в которой линия уровня, двигаясь в направлении: $-\overrightarrow{grad\, z} = (-17;-20)$, пересечет область *LCDFKM*, будет точка *M*(8;7), поэтому (рис.2):

$$z_{\min}(8;7) = 276.$$

Если бы по содержанию задачи нас устраивали бы не только целые значения переменных, то последней точкой, в которой линия уровня, двигаясь в направлении $-\overrightarrow{grad\, z} = (-17;-20)$, пересекла бы область *ABCDE*, была точка *A*(8,75;6,25) (рис.1).

Ответ: Минимальные эксплуатационные расходы составят около 276 тыс. денежных единиц, при этом должно быть привлечено 8 судов типа ГТ-1 и 7 судов типа ГТ-2.

Замечание к задаче 1. Общеизвестно, что при решении задач линейного программирования и их геометрического толкования, возможны следующие четыре случая:

1) целевая функция достигает *min (max)* в одной точке;
2) целевая функция достигает *min (max)* в любой точке отрезка, который является одной из сторон многоугольника решений;
3) целевая функция не ограничена снизу (сверху) на множестве допустимых решений;
4) система ограничений задачи является несовместной.

Предлагая задачи студентам-первокурсникам при изучении курса высшей математики целесообразно ограничиться только первым случаем.

Во время постановки и решения *задачи 1* использовался термин «провозная способность». Остановимся на нем подробнее. В общем, провозная способность - это объем работы, которую судно может выполнить за определенный период времени и в определенных условиях. Она выражается в тоннах (или тонно-милях) перевозимого судном груза. Провозная способность зависит не только от грузоподъемности судна, но и от особенностей его использования, протяженности пути плавания, времени нахождения судна под грузовыми и вспомогательными операциями. Рассмотрим пример задачи, в которой эти факторы будут приведены в условии задачи и соответственно учтены при построении математической модели. Фабула задачи остается такой же, как и в *задаче 1*. Нижеследующая задача является задачей нелинейного программирования, однако в несложных случаях подобные задачи также могут решаться графическим методом.

Задача 2. В некоторые пункты, расположенные вдоль боковой реки, в непродолжительный период весеннего паводка необходимо доставить 200 тыс. тонн груза. Для доставки могут быть выделены 11 мелкосидящих грузовых теплоходов ГТ-1 и 8 крупногабаритных теплоходов ГТ-2. Эксплуатационные расходы для судов ГТ-1 составляют 17 тыс. денежных единиц за период доставки, а для ГТ-2 – 20 тыс. денежных единиц. Определить минимальные эксплуатационные расходы, а также соответствующее количество судов обоих классов x_1 (ГТ-1) и x_2 (ГТ-2), которые необходимы для обеспечения доставки при следующих условиях.

Известно, что суда первого типа в течение всего завоза могут быть использованы на полную грузоподъемность. Провозная способность одного судна за период завоза равна 10 тыс. тонн, а соответственно по всем судам первого типа она составит: $10x_1$.

Суда второго типа достаточно эффективно могут использоваться только в самый полноводный период, а с убыванием уровня воды они работают с недогрузкой и с понижением скорости движения. Эти и другие факторы определяют нелинейную зависимость провозной способности от количества использованных судов, поэтому по всем судам второго типа она составит [7, с.205]: $\left(10+5x_2-0{,}5x_2^2\right)\cdot x_2$.

Комментарии к решению задачи. Целевая функция и система ограничений задачи будут иметь вид: $z = 17x_1 + 20x_2 \to \min$

$$\begin{cases} 10x_1 + \left(10+5x_2-0{,}5x_2^2\right)\cdot x_2 \geq 200 \\ x_1 \leq 11, x_2 \leq 8 \\ x_1 > 0, x_2 > 0 \end{cases}$$

Как и в задаче 1, первым этапом решения задачи графическим методом будет построение на координатной плоскости $x_1 O x_2$ области определения целевой функции *KLM/*

Выясним: возможно ли для этой задачи предложить такие же два подхода, как и для решения *задачи 1*.

Первый случай. Целевая функция *z*, также является линейной и не может иметь точек экстремума внутри области *KLM*. Однако система ограничений не на всех участках будет линейной (в частности, дуга *KM*). Поэтому наибольшего и наименьшего значения целевая функция может принимать не только в вершинах *K, L, M*, а и на границе *KM*. Таким образом, дальнейшее решение возможно реализовать только при условии целочисленности переменных x_1 и x_2.

Приблизим область допустимых решений *KLM*. вписанным многоугольником с вершинами в целых точках *ABCDEFNL* (рис.3), где *A*(6;8), *B*(6;7), *C*(7;7), *D*(7;6), *E*(9;6), *F*(9;5), *N*(11;5), *L*(11;8), тогда

$$z_A(6;8) = 262; z_B(6;7) = 242; z_C(7;7) = 259; z_D(7;6) = 239;$$
$$z_E(9;6) = 273; z_F(9;5) = 253; z_N(11;5) = 287; z_L(11;8) = 347$$
$$z_{\min}(7;6) = 239$$

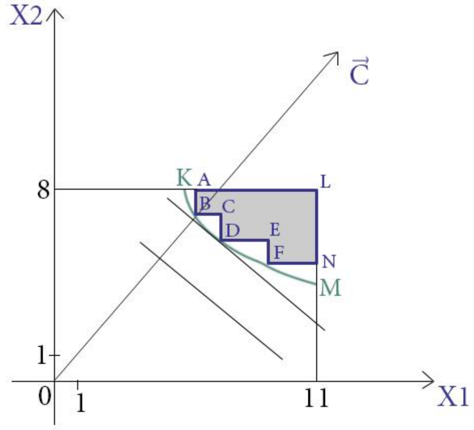

Рис.3 Приближение области допустимых решений *KLM*. вписанным многоугольником с вершинами в целых точках *ABCDEFNL*

Второй случай. Строим линии уровня и градиент целевой функции, которые, разумеется, будут иметь такой же вид, как и в *задаче 1*. При соблюдении условия целочисленности переменных x_1 и x_2, последней точкой, в которой линия уровня, двигаясь в направлении $-\overrightarrow{grad\, z} = (-17;-20)$, пересечет область *ABCDEFNL*, будет точка *D*(7;6), поэтому: $Z_{\min}(7;6) = 239$.

Если бы по условию задачи, нас устраивали не только целые значения переменных, то последнюю точку $P(x_1; x_2)$, в которой линия уровня, двигаясь в направлении, $-\overrightarrow{grad\, z} = (-17;-20)$ пересечет область *KLM*, можно найти лишь приблизительно $x_1 \approx 6{,}2$ и $x_2 \approx 6{,}4$ (рис.4). Для их нахождения целесообразно использовать известные программно-педагогические средства, в частности возможности динамических моделей GRAN 2D-new.

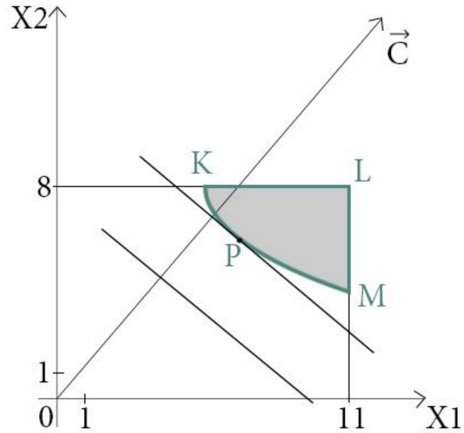

Рис 4. Пересечение области *KLM* линией уровня в направления градиента целевой функции.

Ответ: Минимальные эксплуатационные расходы составят около 239 тыс. денежных единиц, при этом должно быть привлечено 7 судов типа ГТ-1 и 6 судов типа ГТ-2.

Предложенные задачи являются лишь отдельными примерами, которые могут быть использованы исследователями при обновлении методических систем обучения высшей математике или преподавателями-практиками во время практических занятий, самостоятельной работы студентов, работы студенческих кружков, семинаров и конференций. При определенных условиях целесообразно также ознакомить студентов с современными возможностями ИКТ решения задач линейного программирования (в частности, http://www.reshmat.ru/ZLP). По нашему мнению, решение подобных задач способствует поддержанию и развитию вычислительной и графической культуры, что особенно актуально и важно для студентов направления подготовки «Морской и речной транспорт». Привлечение элементов вычислительного экспериментирования (особенно с использованием ИКТ) «оживляет» изучения математических дисциплин, а также способствует формированию более качественной общей математической и профессиональной подготовленности студентов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Акулич И.Л**. Математическое программирование в примерах и задачах. Учеб. Пособие для студентов эконом. спец. вузов. / И.Л.Акулич. – М.: Высш. шк., 1986. – 319 с.
2. **Власенко К.В.** Теоретичні й методичні аспекти навчання вищої математики з використанням інформаційних технологій в інженерній машинобудівній школі: Монографія. / К.В.Власенко. – Донецьк: «Ноулідж» (донецьке відділення), 2011. – 410 с.
3. **Гончаренко Я.В**. Математичне програмування. / Я.В.Гончаренко. – К.: НПУ імені М.П.Драгоманова, 2010. - 183с.
4. **Грисенко М.В.** Математика для економістів: методи й моделі, приклади й задачі: Навч. посібник. / М.В.Грисенко. – К.: Либідь, 2007. – 720 с.
5. **Крилова Т.В.** Дидактичні засади фундаменталізації математичної освіти студентів нематематичних спеціальностей університетів / Т.В. Крилова, О.М.Гулеша, О.Ю.Орлова // Дидактика математики: проблеми і дослідження. – 2011. – Випуск 35. – С.27-35.
6. **Кузнецов Ю.Н**. Математическое программирование. Учеб. Пособие для вузов / Ю.Н.Кузнецов, В.И.Кузубов, А.Б.Волощенко. – М.: Высшая школа, 1976. – 352 с.
7. **Пьяных С.М.** Экономико-математические методы оптимального планирования работы речного транспорта. Учеб-к для институтов водного транспорта / С.М.Пьяных. – М.: Транспорт, 1988. – 253 с.