CONTENT COMPONENT OF THE METHOD OF TRAINING THE FUNCTIONAL ANALYSIS OF FUTURE TEACHERS OF MATHEMATICS

DMYTRO BOBYLIEV

ABSTRACT: *The article proposes the substantiation of the substantive component of the methodology of professionally directed instruction in the functional analysis of future mathematics teachers. The goals and the structured content of the discipline "Functional Analysis" are specified. To implement the described methodology, an educational and methodical complex of discipline has been created.*

KEYWORDS: *functional analysis, professionally directed skills, future mathematics teachers, course content.*

СОДЕРЖАТЕЛЬНЫЙ КОМПОНЕНТ МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ БУДУЩИХ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

ДМИТРИЙ Е. БОБЫЛЕВ

АБСТРАКТ: *В статье предложено обоснование содержательного компонента методики профессионально направленного обучения функциональному анализу будущих учителей математики. Уточнены цели и структурировано содержание дисциплины «Функциональный анализ». Для реализации описанной методики создан учебно-методический комплекс дисциплины.*

1 Введение

Для профессионально направленного обучения математике характерно выдвижение целей через учебную деятельность студентов и частично через внутренние процессы интеллектуального развития студента. Поскольку профессионально-педагогической деятельности, как и учебной деятельности, присуще выполнения определенных действий, поэтому трансформация цели в действие позволяет осуществить диагностику и управление процессом освоения студентами знаний, умений и их развития. Знание невозможны без действий, поэтому необходимо, чтобы цели фиксировали не только сумму знаний, необходимых для овладения содержанием, но и описывали умения, которыми должен овладеть студент в процессе изучения конкретной темы. Поэтому наряду с умениями, соответствующим каждой теме по функциональному анализу, необходимо формировать также и профессионально направленные умения. То есть методические требования к постановке целей в профессионально направленном обучении заключаются в формировании вместе с учебными умениями профессионально направленных умений, адекватных учебным умениям, которые должны быть приобретены в процессе обучения функциональному анализу. Целями дисциплины «Функциональный анализ» (для будущих учителей математики) в профессионально направленной системе обучения являются [1]:

- формирования математической культуры студентов, развитие системного математического мышления;
- знакомство с основными фундаментальными понятиями, которые лежат в основе современной теоретической и прикладной математики (пространство, оператор, функционал);
- приобретение навыков работы с основными понятиями функционального анализа и использование основных фактов и результатов в различных задачах прикладной математики;
- подготовка студентов к глубокому восприятию фундаментальных дисциплин.

Дисциплина является обобщением на бесконечномерный случай идей алгебры, математического анализа и геометрии. Идеи, методы, терминология, обозначения и стиль функционального анализа пронизывают почти все области математики, объединяя ее в единое целое. Знания, практические навыки, полученные при освоении дисциплины «Функциональный анализ», используются студентами при изучении специальных дисциплин, а также при выполнении курсовых и дипломных работ.

Задачи при изучении функционального анализа, решение которых обеспечивает достижение цели:

1) формирование понимания значимости математической составляющей в естественно-научном образовании бакалавра и магистра;

2) ознакомление с системой понятий, используемых для описания важнейших математических моделей и математических методов в их взаимосвязи;

3) формирование навыков и умений использования современных математических моделей и методов.

Итак, функциональный анализ является составной математического образования и в то же время является эффективным инструментом решения прикладных задач и базой для изучения специальных дисциплин.

Например, при изучении темы «Метрические пространства» среди учебных умений, которые должны овладеть студенты, есть умение находить границу последовательности в любом метрическом пространстве. При этом профессионально-педагогические умениями будут следующие: уметь распознавать, сравнивать и анализировать метрику данного метрического пространства и переносить ее на определенную последовательность, доказывать, что совокупность множества и функции двух переменных является метрическим пространством и тому подобное. Этими умениями студенты должны овладеть в процессе решения определенных задач.

Дополнение описания умений системой конкретных задач, которые отражают эти умения, позволит определить уровень сформированности профессионально направленных умений – низкий, средний, высокий – каждого студента и осуществить развитие профессионально ориентированной деятельности для каждого студента к более высокому уровню, что будет способствовать реализации дифференцированного подхода к обучению. Поскольку в содержание математического образования, кроме предметных знаний, как отмечает Г. Саранцев [2], должны быть включены действия, адекватные математическим понятием, теоремам, общенаучные методы познания, а также специальные эвристические приемы и различные эвристики, то важным является выделение перечня основных профессионально направленных умений, использование которых способствует формированию профессионально ориентированной деятельности студентов.

2 Анализ содержания курса функционального анализа для будущих учителей математики

Проанализировав большое количество учебников и учебных пособий по функциональному анализу для классических и педагогических университетов [3-9], выделили теоретический и практический материал, который позволяет наиболее эффективно формировать профессионально направленные умения будущих учителей математики.

При изучении *содержательного модуля № 1 «Метрический пространство»* студенты овладевают понятиями: метрическое пространство, точка прикосновения, замыкание множества, замкнутое множество, внутренняя точка, открытое множество, сепарабельное множество и изучают свойства этих понятий в теоремах о пересечении и сумме замкнутых и открытых множеств. Указанное содержание данного модуля позволяет исследовать метрические пространства и фрактальные множества в них. Это дает возможность эффективно формировать профессионально направленные умение, которые соответствует типовой задаче деятельности: анализ современных математических теорий.

При изучении *содержательного модуля № 2 «Сходимость в метрических пространствах»* студенты овладевают понятиями: последовательность в метрическом пространстве, граница последовательности в метрическом пространстве, покоординатная сходимость и изучают свойства этих понятий в теоремах о граничной точке множества, эквивалентность покоординатной и просто сходимости последовательности, о замкнутости сходящейся последовательности. Это позволяет формировать профессионально направленные умения из групп, которое соответствует типовой задаче деятельности: анализ современных математических теорий, анализ математической проблемы (задачи).

Осваивая *содержательный модуль № 3 «Полные метрические пространства»*, студенты изучают понятия фундаментальной последовательности, полного метрического пространства, дополнения метрического пространства и рассматривают свойства этих понятий в теореме Бэра и в критерии полноты метрического пространства; совершенствуют эти знания при решении задач на установление полноты метрического пространства и исследовании фундаментальных последовательностей. Это позволяет формировать профессионально направленные умения из группы, соответствующей типовым задачам деятельности: формулировка гипотетического утверждения, доказательство гипотетического утверждения, опровержение гипотетического утверждения и выбор, использование алгоритмов, методов, приемов и способов решения математических задач.

При изучении *содержательного модуля № 4 «Принцип сжимающих отображений и его применение»* студенты изучают понятия метрического пространства, неподвижной точки и изучают принцип сжимающих отображений, сформулированный в теореме Банаха, который реализуют в форме итерационного метода решения различных задач. Это позволяет формировать профессионально направленные умения из группы, соответствующей типовым задачам деятельности: исследование математической модели и особенно – выбор, использование алгоритмов, методов, приемов и способов решения математических задач и оформления полученных результатов.

В *содержательном модуле № 5 «Компактные множества в метрическом пространстве»* рассматривается понятие топологического пространства, компактного топологического пространства, передкомпактного пространства, покрытия и подпокрытие множества, равномерно ограниченного и равностепенно непрерывного семейства функций, свойства которых представлены в лемме Гейне-Бореля, теореме Хаусдорфа и теореме Арцела. Это позволяет формировать профессионально направленные умения из группы, соответствующей типовым задачам деятельности: анализ современных математических теорий, постановка математической задачи, анализ математической проблемы (задачи) и особенно – формулирование гипотетического утверждения.

При изучении *содержательного модуля № 6 «Линейное пространство»* рассматриваются понятия линейного и векторного пространства, аддитивного и линейного функционала. Опорными задачами этого модуля являются задачи на исследование множеств на компактность и исследования функционалов на линейность. Это позволяет формировать профессионально направленные умения из группы, соответствующепй типовым задачам деятельности: анализ современных математических теорий, постановка математической задачи, формулировка гипотетического утверждения.

Осваивая *содержательный модуль № 7 «Линейное нормированное пространство»*, изучают понятия нормированного банахового пространства, которые детализируются в теореме Хана-Банаха, первой теореме отделимости и во второй теореме отделимости и в опорной задаче исследования линейных нормированных пространств. Это позволяет формировать профессионально направленные умения из группы, соответствующей типовым задачам деятельности: доказательство гипотетического утверждения, опровержение гипотетического утверждения, исследование математической модели и выбор, использование алгоритмов, методов, приемов и способов решения математических задач и оформления полученных результатов.

В *содержательном модули № 8 «Линейное пространство со скалярным произведением»* изучаются понятия евклидового пространства, скалярного произведения в евклидовом пространстве, унитарного пространства, ортогональной и ортонормированной системы и формулируются основные свойства этих систем. Опорными задачами в этом модуле есть задачи на исследование системы элементов в линейных нормированных пространствах на ортогональность и ортонормованисть и задачи на проведение процесса ортогонализации Грамма-Шмидта. Это позволяет формировать профессионально направленные умения из группы, соответствующей типовым задачам деятельности: исследование математической модели и выбор, использование алгоритмов, методов, приемов и способов решения математических задач и оформления полученных результатов.

При изучении *содержательного модуля № 9 «Гильбертовы пространства»* изучаются понятия гильбертовом пространства, линейного многообразия, ортогонального дополнения, обобщенного ряда Фурье. Свойства этих понятий формулируются в теоремах о замкнутую выпуклую множество, о подпространство и многообразие в гильбертовом пространстве и расписание элемента гильбертовом пространства в обобщенный ряд Фурье. Это позволяет формировать профессионально направленные умения из группы, соответствующей типовым задачам деятельности: постановка математической задачи, исследования математической модели и выбор, использование алгоритмов, методов, приемов и способов решения математических задач и оформления полученных результатов.

Осваивая *содержательный модуль № 10 «Линейные операторы. Непрерывность и ограниченность»*, студенты – будущие учителя математики, изучают понятие оператора, области значений оператора, границы оператора, непрерывности и ограниченности оператора, линейного оператора. Свойства которых концентрируются в теоремах про область значений линейного оператора, о непрерывности линейного оператора в банаховом пространстве, о критерии ограниченности линейного оператора. Рассматриваются опорные задачи на исследование операторов на линейность и нахождение нормы операторов. Это позволяет формировать профессионально направленные умения из группы, соответствующей типовым задачам деятельности: анализ современных математических теорий, постановка математической задачи и анализ математической проблемы (задачи).

В *содержательном модуле № 11 «Обратные операторы»* изучаются понятия линейно непрерывно обратного оператора, левого и правого обратного оператора, свойства которых концентрируются в теоремах о взаимно однозначных, непрерывно обратимых линейных и ограниченных операторах, теореме Банаха про ограниченный оператор. Опорными задачами в этом модуле есть задачи на нахождение обратного оператора. Это позволяет формировать профессионально направленные умения из группы, соответствующей типовым задачам деятельности: анализ математической проблемы (задачи), формулирование гипотетического утверждения, доказательство гипотетического утверждения, опровержение гипотетического утверждения, исследования математической модели, выбор, использование алгоритмов, методов, приемов и способов решения связыванных математических задач и оформления полученных результатов.

При изучении *содержательного модуля № 12 «Обобщенно-обратные операторы»* изучаются понятия проектора, области значений проектора, нуль-пространства (ядра проектора) и сводно-обратной матрицы. Свойства этих понятий формулируются в теоремах о критерии проекционной матрицы. Это позволяет формировать профессионально направленные умения из группы, соответствующей типовым задачам деятельности: формулирование гипотетического утверждения, доказательства гипотетического утверждения, опровержение гипотетического утверждения.

Осваивая *содержательный модуль № 13 «Сопряженные и самосопряженные операторы»*, студенты – будущие учителя математики, изучают понятие самосопряженного оператора. Рассматриваются опорные задачи на исследование операторов на самосопряженность. Это позволяет формировать профессионально направленные умения из группы, соответствующей типовым задачам деятельности: анализ современных математических теорий, постановка математической задачи и анализ математической проблемы (задачи).

В *содержательном модуле № 14 «Компактные операторы»* изучаются понятия компактного (вполне непрерывного) оператора. Свойства этих понятий формулируются в теоремах о критериях вполне-непрерывного оператора, последовательности компактных операторов, сопряженный оператор к компактному, Шаудера. Опорными задачами в этом модуле есть задачи на исследование операторов на компактность. Это позволяет формировать профессионально направленные умения из группы, соответствующей типовым задачам деятельности: анализ современных математических теорий, постановка математической задачи, анализ математической проблемы (задачи).

В *содержательном модуле № 15 «Собственные значения и собственные векторы линейных операторов»* изучаются понятия собственных значений и собственных векторов оператора, характеристического уравнения, свойства которых концентрируются в теоремах о линейной независимости собственных векторов линейного оператора, Жордана, про неравенство нулю собственных значений оператора, о собственных значениях линейного самосопряженного вполне непрерывного оператора, Гильберта-Шмидта. Опорными задачами в этом модуле есть задачи на нахождение собственных значений и собственных векторов оператора. Это позволяет формировать профессионально направленные умения из группы, соответствующей типовым задачам деятельности: анализ математической проблемы (задачи), формулирование гипотетического утверждения, доказательство гипотетического утверждения, опровержение гипотетического утверждения, исследование математической модели, выбор, использование алгоритмов, методов, приемов и способов решения связанных математических задач и оформления полученных результатов.

Осваивая *содержательный модуль № 16 «Резольвентное множество и спектр линейного оператора»*, изучают понятие спектра оператора, регулярных чисел оператора, резольвенты оператора, аналитического оператора, которые детализируются в теоремах о регулярной точке оператора, о сходимости непрерывной обратимости оператора и в опорных задачах на нахождение резольвенты и спектра оператора. Это позволяет формировать профессионально направленные умения из группы, соответствующей типовым задачам деятельности: доказательство гипотетического утверждения, опровержение гипотетического утверждения, исследование математической модели и выбор, использование алгоритмов, методов, приемов и способов решения математических задач и оформления полученных результатов.

3 Опорные задачи курса функционального анализа для будущих учителей математики

Рассмотрим более подробно опорные задачи с каждого содержательного модуля, соотнося их с организационными формами и методами обучения.

Содержательный модуль 1. Метрическое пространство.

Задача № 1. Дано x $\in R$, $\rho(x,y)$= arctg|x – y|. Будет ли $\rho(x,y)$ метрикой? (при решении целесообразно использовать эвристический диалог).

Задача № 2. $\rho(x,y)-$метрика. Доказать, что $\ln(1+\rho(x,y))$ также метрика (нестандартная задача).

Задача № 3. Дано, что $\rho(x,y)$ – метрика. Доказать, что $\rho_1(x,y)=\dfrac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}$ также метрика (нестандартная задача).

Содержательный модуль 2. Сходимость в метрических пространствах.

Задача № 4. Доказать, что из существования предела последовательности в произвольном пространстве следует ее ограниченность в этом пространстве (при решении целесообразно использовать эвристический диалог).

Задача № 5. Дано множество. Найти граничные точки, точки соприкосновения и замыкания данного множества (нестандартная задача).

Содержательный модуль 3. Полные метрические пространства.

Задача № 6. Дано множество натуральных чисел ***N***, $\rho(m,n)=\dfrac{|m-n|}{mn}$. Доказать, что данное пространство неполное (метод математического моделирования: проиллюстрировать нахождения метрики на определенных примерах).

Задача № 7. Дано множество иррациональных чисел I, $\rho(x,y)=|x-y|$. Исследовать это пространство на полноту (нестандартная задача).

Содержательный модуль 4. Принцип сжимающих отображений и его применение.

Задача № 8. Оператор *А* задан соотношениями

$$\begin{cases} y_1 = 0{,}1x_1 + 0{,}3x_2 - 0{,}2x_3 + 0{,}8; \\ y_2 = 0{,}2x_1 - 0{,}1x_2 \qquad\quad -1{,}2; \\ y_3 = \qquad\quad -0{,}3x_2 + 0{,}2x_3 + 2{,}7. \end{cases}$$

Проверить выполнение условий теоремы Банаха в пространстве R_1^n (метод математического моделирования: проиллюстрировать нахождение решения системы методом сжимающих отображений в Microsoft Excell).

Задача № 9. Как оценить погрешность между *n*-ым приближением x_n решения уравнения $Ax = x$ и точным значением *x* (при решении целесообразно использовать эвристический диалог).

Задача № 10. Найти несколько приближений решении задачи Коши $y' = y$, $y(0) = 1$ и оценить величину отрезка, на котором решение существует и есть единственным (метод математического моделирования: проиллюстрировать нахождения решения методом сжимающих отображений в Microsoft Excell).

Содержательный модуль № 5. Компактные множества в метрическом пространстве.

Задача № 11. Доказать, что любой компакт является закрытым и ограниченным множеством (при решении целесообразно использовать эвристический диалог).

Задача № 12. Доказать, что пересечение двух компактов есть компакт (нестандартная задача).

Содержательный модуль 6. Линейное пространство.

Задача № 13. Рассмотрим множество M_{mn} всех прямоугольных матриц порядка $m \times n$ со скалярными элементами

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12\ldots}a_{1n} \\ a_{21}a_{22\ldots}a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}a_{m2\ldots}a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad (b_{ij}) = \begin{pmatrix} b_{11}b_{12\ldots}b_{1n} \\ b_{21}b_{22\ldots}b_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{m1}b_{m2\ldots}b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Обозначим в M_{mn} операции $(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}),\ \lambda(a_{ij}) = (\lambda a_{ij})$. Доказать, что M_{mn} линейное простанство (нестандартная задача).

Содержательный модуль 7. Линейные нормированные пространства.

Задача № 14. Положим в нормированном пространстве $\| x - y \| = \rho(x, y)$. Проверить выполнение аксиом указанной метрики (при решении целесообразно использовать эвристический диалог).

Содержательный модуль 8. Линейное пространство со скалярным произведением.

Задача № 15. В пространстве C_l обозначим скалярное произведение формулой $(x, y) = \int\limits_a^b x(t)y(t)dt.$ Проверить выполнение аксиом скалярного произведения (при решении целесообразно использовать эвристический диалог).

Содержательный модуль 9. Гильбертовы пространства.

Задача № 16. В пространстве C_l обозначим скалярное произведение формулой $(x,y)=\int\limits_a^b x(t)y(t)dt.$ Проверить, является ли данное пространство гильбертовым (при решении целесообразно использовать эвристический диалог).

Содержательный модуль 10. Линейные операторы. Непрерывность и ограниченность.

Задача № 17. Рассмотрим в пространстве непрерывных функций на отрезке $[a,b]$. оператор, который определяется формулой $\varphi(s)=\int\limits_a^b k(s,t)\gamma(t)dt,$ где $k(s,t)$ – некоторая фиксированная непрерывная функция двух переменных. Доказать линейность данного оператора (нестандартная задача).

Содержательный модуль 11. Обратные операторы.

Задача № 18. Показать, что оператор дифференцирования $F(t)=f'(t)$, действующий в подпространстве непрерывных функций, является линейным, но не непрерывным (нестандартная задача).

Содержательный модуль 13. Сопряженные и самосопряженные операторы.

Задача № 19. Установить общий вид линейного функционала в пространстве l_2 (нестандартная задача).

Содержательный модуль 14. Компактные операторы.

Задача № 20. Исследовать оператор $Ax=u+x(u),\ 0\le u\le 1$ на компактность (при решении целесообразно использовать эвристический диалог).

Содержательный модуль 15. Собственные значения и собственные векторы.

Задача № 21. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $Ax=u+x(u),\ 0\le u\le 1$ (нестандартная задача).

Содержательный модуль 16. Резольвентное множество и спектр.

Задача № 22. Рассмотрим в пространстве непрерывных функций на отрезке $[a,b]$. Оператор, который определяется формулой $\varphi(s)=\int\limits_a^b k(s,t)\gamma(t)dt,$ где $k(s,t)$ – некоторая фиксированная непрерывная функция двух переменных. Найти резольвентное множество указанного оператора (метод математического моделирования: проиллюстрировать резольвентное множество на определенных примерах).

4 Выводы

Исходя из цели курса пропедевтики функционального анализа (в рамках курса математического анализа на бакалаврате), которая заключается в предоставлении будущим учителям математики знаний в области современного функционального анализа, и с задания этого курса, – обучение студентов теоретическим основам и методам функционального анализа и применению этих методов, построим содержание курса пропедевтики, который состоит из двух модулей.

Модуль 1. Метрические и линейные пространства (М1):

Содержательный модуль 1. Метрическое пространство (СМ1).

Содержательный модуль 2. Сходимость в метрических пространствах (СМ2).

Содержательный модуль 3. Полные метрические пространства (СМ3).

Содержательный модуль 4. Принцип сжимающих отображений и его применения (СМ4).

Содержательный модуль 5. Компактные множества в метрическом пространстве (СМ5).

Модуль 2. Гилбертовые пространства (М2):

Содержательный модуль 6. Линейное пространство (СМ6).

Содержательный модуль 7. Линейное нормированное пространство (СМ7).

Содержательный модуль 8. Линейное пространство со скалярным произведением (СМ8).

Содержательный модуль 9. Гильбертовые пространства (СМ9).

Цель и задачи нормативного курса функционального анализа (магистратура): научить студента работать с линейными операторами в бесконечномерных пространствах. Данный курс функционального анализа также целесообразно составлять из двух модулей.

Модуль 3. Операторы (М3):

Содержательный модуль 10. Линейные операторы. Непрерывность и ограниченность (СМ10).

Содержательный модуль 11. Обратные операторы (СМ11).

Содержательный модуль 12. Обобщенно-обратные операторы (СМ12).

Содержательный модуль 13. Сопряженные и самосопряженные операторы (СМ13).

Содержательный модуль 14. Компактные операторы (СМ14).

Модуль 4. Исследование операторов (М4):

Содержательный модуль 15. Собственные значения и собственные векторы (СМ15).

Содержательный модуль 16. Резольвентное множество и спектр (ЗМ16).

Модульная организация модели содержания позволяет оперативно адаптировать ее в случае изменения учебных планов подготовки будущих учителей математики.

На основе проведенного выше анализа возможностей содержания курса «Функциональный анализ» в формировании профессионально направленных умений студентов прослеживается связь содержательных модулей функционального анализа и профессионально направленных умений, которые могут быть сформированы у студента при изучении функционального анализа.

ЛИТЕРАТУРА:

[1] Лов'янова, І. В., Бобилєв, Д. Є. Система професійно спрямованих умінь студентів при навчанні функціонального аналізу. Педагогіка вищої та середньої школи. 46 (2015), 45–52.

[2] Саранцев, Г. И. Гармонизация методической подготовки бакалавров педагогического образования. Педагогика. 3 (2013), 59-66.

[3] Березанський, Ю. М., Ус, Г. Ф., Шефтель, З. Г. Функціональний аналіз: підручник. Львів. (2014).

[4] Кадець, В. М. Курс функціонального аналізу та теорії міри: підручник. Львів (2012).

[5] Колмогоров, А. М., Фомін, С. В. Елементи теорії функцій і функціонального аналізу: підручник. Київ (1974).

[6] Маслюченко, В. К. Лекції з функціонального аналізу. Ч. 1: Метричні і нормовані простори. Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича (2010).

[7] Маслюченко, В. К. Лекції з функціонального аналізу. Ч. 2: Лінійні оператори і функціонали. Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича (2010).

[8] Старун, І. І. Елементи теорії функцій і функціонального аналізу (теореми та задачі). Ніжинський державний університет ім. М. В. Гоголя (2005).

[9] Федоров, Е. Е., Пайков, В. И. Курс лекций „Функциональный анализ“. Донецкий национальный университет (2013).

Дмитрий Евгеньевич Бобылев
Криворожский государственный педагогический университет
E-mail: dmytrobobyliev@gmail.com