SCIENTIFICITY AND ACCESSIBILITY OF MATHEMATICAL CONCEPTS' DEFINITIONS IN THE SCHOOL COURSE OF MATHEMATICS

IRYNA A. DREMOVA, VASIL O. SHVETS

ABSTRACT: *the article reveals the general theoretical foundations for the definition of concepts and also rises the problem of combining the principle of scientific character and the principle of accessibility in determining mathematical concepts in the school course of mathematics and mastering them by students.*

KEYWORDS: *concept, definition, content and scope of the concept, the definition of a mathematical concept, school course of mathematics, scientific nature and accessibility of mathematical concept.*

НАУЧНОСТЬ И ДОСТУПНОСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПОНЯТИЙ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ*

ИРИНА А. ДРЕМОВА, ВАСИЛИЙ А. ШВЕЦ

АННОТАЦИЯ: *в статье раскрываются общие теоретические основы определения понятий, ставиться проблема сочетания принципа научности и принципа доступности при определении математических понятий в школьном курсе математики и овладении ими учащимися.*

1 Введение

На современном этапе развития общества образование характеризуется усилением внимания к личности ученика, к его самопознанию, саморазвитию и самореализации. И поэтому целью образования является – подготовить человека к жизни так, чтобы он максимально раскрыл свои врожденные способности и реализовал потенциальные возможности. В связи с этим меняется взгляд на назначение образования, целью учебного процесса является не усвоение учеником содержания учебных дисциплин – математики, физики, химии и т.д., а *развитие его личности средствами математики, физики, химии и тому подобное*. Итак, на первый план выдвигаются актуализирующая и развивающая функции обучения математике.

Развитие личности средствами математики осуществляется в процессе овладения ею определенной системой научных знаний. Одной из главных составляющих системы научных знаний любой учебной дисциплины, в том числе и математики, есть понятия. Ни одна теория не может быть создана, развита и раскрыта без введения понятий. Овладение учеником законами и теориями начинается с осмысления, осознания и усвоения понятий, и дальше происходит путем оперирования этими понятиями. В этом заключается ведущая роль понятий при формировании в сознании учащихся системы научных знаний в соответствующей области. Таким образом, формирование системы знаний выступает как

*Настоящата статия е частично финансирана по проект № РД-08-164/09.02.2018г. от фонд Научни изследвания на ШУ "Епископ Константин Преславски"

процесс овладения понятиями. Овладение понятиями требует от учащихся активной умственной деятельности, поскольку так можно обеспечить глубокое понимание сущности изучаемых объектов и явлений теории. Само мышление невозможно без понятий. Умение мыслить включает умение оперировать понятиями. "Все, что существует в качестве наших мыслей, упорядочивается, организуется как единое целое с помощью той системы понятий, которую мы освоили" [1, 27].

Таким образом, в процессе овладении учеником понятиями реализуется развивающая функция обучения математики. Умственное развитие ученика при обучении математике следует рассматривать как развитие его способности к осознанию, осмыслению понятий, оперированию ими, конструированию новых понятий. Это и есть показателями математического развития ученика.

Математическая наука исследует объекты, которые являются абстракциями от реально существующих предметов и явлений, и которые обозначены научными терминами: числа, фигуры, множества, величины, отношение и тому подобное. Все это математические понятия. Для формирования адекватного математического понятия в сознании ученика, учителю прежде всего самому необходимо четко знать содержание понятия в современной науке и понимать его содержание в школьном курсе математики. При этом следует помнить о том, что последнее должно согласовываться с первым и не должно ему противоречить. Следовательно, формирование математических понятий в сознании учащихся должно подчиняться общим дидактическим принципам научности и доступности.

Принцип научности в обучении математике состоит в соответствии содержания и методов обучения уровню и требованиям современной математической науки, в формировании в сознании учащихся адекватных представлений о закономерностях и общих методах научного познания. С целью реализации принципа научности учитель должен не допускать "свободной" интерпретации содержания, следить за корректностью формулировок при определении математических понятий и построении математических суждений, приучать учеников критически относиться к каждому суждению, требовать от них четко различать определения, теоремы, следствия.

Принцип доступности в обучении математике требует учета возрастных особенностей учащихся. Содержание учебного материала и методы обучения должны быть адаптированы к уровню умственного развития учащихся, к их физическим возможностям, должны отвечать достигнутому ими уровню знаний и умений. При этом следует учитывать, что содержание учебного материала не может сокращаться или упрощаться. Слишком упрощенное содержание обучения снижает его развивающие возможности. Поэтому рекомендуется, чтобы содержание заданий для учащихся пребывало в "зоне их ближайшего развития" (по Л. Выготскому).

Эффективность реализации сочетания принципа научности в процессе овладения учащимися математическими понятиями и принципа доступности зависит в большей степени от компетентности учителя математики, его профессионализма и мастерства. Сегодня преподавание школьного курса математики обеспечивается разнообразием учебников, и поэтому актуальной является проблема тщательного научно-методического изучения и критического анализа содержания определений математических понятий, приведенных в современных учебниках.

Учитывая предыдущие рассуждения, далее напомним общие теоретические основы определения понятий и проанализируем толкование некоторых математических понятий современной наукой и сравним с их интерпретаций в школьном курсе математики.

2 Понятия. Содержание и объем понятия

Понятие – это форма мышления, в которой отражаются общие существенные (специфические) признаки определенных объектов или явлений реального мира.

Существенные признаки отражают природу объекта или явления и отличают его от других. Существенными признаками являются такие признаки без которых объект или явление немыслимы. Несущественные признаки – это признаки, наличие или отсутствие которых не приводит к изменению природы объекта или явления. Разница между существенными и несущественными признаками относительная. Признак, являющийся существенным в одном случае, с развитием и изменением объекта или явления может превратиться в несущественный, и наоборот. Критерием существенности признаков, отображенных в понятии, является практика.

Понятие – это результат глубокого познания объекта или явления действительности, результат обобщения его существенных признаков. Выработка (и усвоение) математических понятий происходит в процессе аналитико-синтетической деятельности, направленной на выделение общих существенных признаков объекта или явления и осознание несущественных, а также применение нового образованного понятия к решению задач. При выработке понятия применяют такие логические операции как сравнение, анализ, синтез, абстрагирование, обобщение и тому подобное.

С целью определения существенных признаков объекта или явления приходится его сравнивать с другими. При сравнении происходит сопоставление объектов или явлений для выявления их сходства и различий. Сравнение позволяет определить общее в объектах или явлениях, то, чем они похожи, а также чем они отличаются друг от друга, дать оценку выявленным признакам, сгруппировать предметы в группы (классы) и др. Сравнение осуществляется на основе взаимодействия анализа и синтеза.

Анализ – это мысленное разложение объекта или явления на составные части. Прежде чем выделить существенные признаки объекта или явления, необходимо знать, из каких элементов (частей, компонентов) он состоит. Следует исследовать каждый элемент в отдельности и в связи с другими. Это достигается с помощью анализа. Далее, исследовав объект или явление по частям, следует рассмотреть его в целом, во всех его связях и свойствах. Эту задачу решает синтез. Во время синтеза осуществляют интеграцию частей объекта или явления, расчлененного анализом, в единое целое. Анализ и синтез находятся в неразрывном единстве, они взаимосвязаны и взаимообусловлены: анализ всегда допускает синтез, а синтез – анализ.

Исследуемый объект (явление) имеет множество различных свойств и признаков. Для того, чтобы образовать понятие следует из свойств, выделенных анализом, отобрать только общие существенные. Поэтому в процессе образования понятия используется следующая логическая операция – абстрагирование. Абстрагирования – это мысленное выделение существенных признаков предмета и отделение их от других свойств. Результатом абстрагирования – есть понятие. Итак, любое понятие является абстракцией.

Существенные признаки, выделенные в отдельных объектах (явлениях), путем обобщения распространяются на подобные объекты (явления) или на класс в целом. Таким образом, осуществляется мысленный переход от единичного к общему через объединение однородных объектов (явлений) в классы на основе их общих признаков.

Овладение понятиями учащимися осуществляется через такие мыслительные действия, как «действие подведения под понятие» («действие распознавания») и обратное действие – отыскание следствий. Последнее означает, что от факта принадлежности объекта к понятию приходят к свойствам, которыми обладает этот объект. Для установления факта принадлежности объекта к определенному понятию следует проверить наличие у объекта совокупности необходимых и достаточных признаков. Если при этом окажется, что объект не имеет хотя бы одного из существенных признаков, делают вывод, что к данному понятию он не принадлежит. При этом можно использовать не только определение, но и теоремы, выражающие свойства понятий. Последние должны быть эквивалентными определению в том смысле, что свойства понятий, раскрывающиеся в них, могут быть положены в основу определений. Например, для установления принадлежности четырехугольника к параллелограммам можно воспользоваться определением параллелограмма или признаком. Вместе они представляют собой эквивалентные системы необходимых и достаточных условий.

Как видим, выработка понятия – это сложный познавательный процесс, связанный с практической деятельностью человека. Практика есть источником возникновения и развития понятий, а также критерием их содержания. Каждое понятие фиксируется в термине. Термин – это слово, которое имеет четко определенное значение. Наука стремится, чтобы каждый термин имел единственное значение. Понятие, зафиксированное термином, используется в дальнейшем как средство познания окружающего мира.

Таким образом, термин «понятие» обозначает мысленный образ определенного объекта (явления) или классов объектов (явлений) объективной реальности или нашего сознания. Каждая наука и каждый учебный предмет оперирует определенными, присущими им понятиями. Особенность математических понятий заключается в том, что они отражают в сознании пространственные формы и количественные отношения (и не только), абстрагируясь от реального мира.

Каждое понятие имеет свое содержание и объем. Содержание понятия – это множество общих существенных (специфических) признаков, присущих всем объектам (явлениям), которые описывает понятие. Объем понятия – это множество объектов (явлений), охватываемых этим понятием. Например, содержанием понятия «параллельные прямые пространства» является совокупность таких общих существенных признаков прямых: лежать в одной плоскости и не пересекаться. Каждый из признаков является необходимым и вместе достаточными для того, чтобы две прямые пространства были параллельными. Объем понятия образуют все параллельные прямые пространства.

Содержание и объем понятий взаимосвязаны. Эта взаимосвязь выражается логическим законом обратного отношения между объемом и содержанием понятия: с увеличением содержания понятия уменьшается его объем, и наоборот, с увеличением объема понятия уменьшается его содержание. Так, понятие «натуральное число» имеет более узкий объем, чем понятие «действительное число», поскольку каждое натуральное число является действительным, но произвольное действительное число не всегда является натуральным.

Когда объем одного понятия является частью объема второго, то первое понятие называют видовым, а второе – родовым. Понятие «четырехугольник» является родовым, а понятие «параллелограмм» – видовым. Схематически такое соотношение между родовым и видовым понятиями можно изображать диаграммами Эйлера-Венна.

Определить понятие – это подвести данное видовое понятие под ближайшее родовое и указать его видовые отличия. Определить понятие – это указать все необходимые и одновременно достаточные существенные признаки объектов (явлений), охватываемых данным понятием. Определение понятия предполагает его включение в линию понятийных преобразований, указание его места в системе понятий.

Выделение объема понятия связано с классификацией, то есть разделением совокупности объектов (явлений), которые описывает понятие, на классы по общим существенным признакам. Признак, по которому производится деление, называют основой классификации. Объем одного и того же понятия можно по-разному разбить на классы (подмножества) в зависимости от выбранной основы. Например, если в основу классификации треугольников положить величину угла, то множество треугольников разбивается на такие подмножества – остроугольные, прямоугольные, тупоугольные треугольники. А если за основу классификации выбрать соотношение между сторонами, то множество треугольников можно разбить на два подмножества – разносторонние треугольники и равнобедренные треугольники.

3 Определение понятия

Содержание понятия раскрывают через определение. Определение – это утверждение, в котором в словесной или символической форме зафиксированы общие существенные (специфические) признаки. Определение понятия должно содержать минимальное количество признаков, только необходимые и достаточные, которые выделяют объекты обозначаемого понятия из другого, более широкого по объему определяющего понятия.

Определение понятий принимаются по договоренности. Поэтому не говорят об истинности или ложности определений. Определение может быть логически правильным или неправильным. Логически правильное определение предполагает (и это можно обосновать) существование объектов с указанными общими существенными свойствами, то есть содержание понятия определяет непустой объем. Например, некорректное определение: «прямоугольным треугольником называется треугольник, у которого все углы прямые». Такой треугольник не существует. Следовательно, такое определение не описывает ни одного объекта, а потому есть логически неправильным.

Иногда одному и тому же понятию даются различные определения. В таком случае они должны быть равносильны, то есть из общих существенных признаков, включенных в одно определение, должны следовать общие существенные признаки, которые положены в основу другого определения. И наоборот. Например: «Квадратом называется ромб, у которого все углы прямые» или «Квадрат – это прямоугольник, у которого все стороны равны». Нетрудно показать, что эти определения равносильны.

Вообще, определение – это логическая операция, раскрывающая содержание понятия. Перечислим способы определения математических понятий:

1. Определение понятия через ближайший род и видовое отличие (характеристическое свойство). Видовые отличия могут соединяться в предложении союзами "и" (конъюнктивная структура), «или» (дизъюнктивная структура), «если ..., то ...» (импликативная структура). Например, «ромб – параллелограмм, у которого все стороны равны", "неправильная дробь – обычная дробь, у которой числитель больше или равен знаменателю", определение монотонной функции и тому подобное. Особенность таких определений заключается в том, что выбор ближайшего рода и характеристического свойства не определяется однозначно.

В школьном курсе математики преобладают определения понятий, которые даются через род и видовое отличие. В таком случае следует обращать внимание на то, чтобы определяемое и определяющее понятия были "соизмеримые", то есть объекты или явления, описываемые этими понятиями, должны быть одной природы.

2. Конструктивные (генетические) определения раскрывают способ образования (конструирование) объектов, принадлежащих данному понятию. Например, так определяется круг, биссектриса, осевая и центральная симметрия.

3. Индуктивные (рекуррентные или рекурсивные) определения указывают на базисные (основные) понятие некоторого класса и правила получения новых объектов этого же класса. В частности примером рекуррентного определения является определение арифметической или геометрической прогрессии.

4. Определение через согласование (договоренность). Например, такие определения используются в школьном курсе математики во время расширения понятия числа, определение факториала нуля, степени с нулевым показателем, степени с отрицательным показателем и другие.

5. Определение через отрицание (отрицательное определение). Такое определение содержит сведения о том, какими свойствами не обладают объекты, зафиксированные в понятии; например, определение параллельных прямых.

6. Аксиоматические или косвенные определения. Определение через аксиомы редко используются в школьном курсе математики из-за высокой степени абстрактности. Однако, в математической науке такие определения принимаются без обоснований и не требуют сведения к более простых понятий, поскольку именно они означают первоначальные понятия теории. Ярким примером является определение натуральных чисел через аксиомы Пеано, аксиоматические определения длины, площади, объема.

Определение понятия должно удовлетворять следующим требованиям:

1) отсутствие избыточности существенных признаков: определение не должно содержать признаков, которые можно доказать на основе признаков, включенных в определение;

2) отсутствие "порочного" круга: определяемое понятие не должно явно или неявно содержаться в понятии, через которое оно определяется (например, некорректно определять взаимно перпендикулярные прямые как прямые, образующие прямой угол, и одновременно прямой угол – как таковой, у которого стороны взаимно перпендикулярны);

3) отсутствие омонима: каждый термин используется для обозначения только одного понятия. Нарушение этого требования (обозначение одним термином разных понятий) определяется как неоднозначность терминологии, которая приводит к неопределенности в рассуждениях, к логическим ошибками и ошибкам на практике;

4) определение не должно содержать понятий, которые не определялись ранее.

4 Анализ некоторых определений математических понятий в школьном курсе математики

В школьном курсе математики рассматривают такие виды понятий: первичные (неопределяемые), определяемые понятия и понятия, которые вводятся описательно, на примерах. Определение математического понятия - это сведение определяемого понятия к другому определяющему понятию, с более широким объемом. Поскольку такой процесс является конечным, то в конце концов приходим к понятиям, которые не определяются через другие понятия, это первичные понятия (неопределяемые).

В школьном курсе математики к таким понятиям относятся натуральное число, множество, точка, прямая, плоскость, отношения "принадлежать к ...», «лежать между ...", длина отрезка, градусная мера угла. Содержание первичных понятий в школьном курсе математики раскрывается путем объяснения с использованием приобретенного учеником эмпирического опыта (натуральное число, множество т.п.) или путем формулирования системы аксиом. Так, в системе аксиом планиметрии раскрываются основные свойства первичных понятий – точки, прямой и тому подобное. Поэтому систему аксиом планиметрии (и стереометрии тоже) следует рассматривать как неявное, косвенное определение первоначальных понятий.

Первое первоначальное понятие, с которым учащиеся знакомятся в начальной школе и изучают в основной, является понятие натурального числа. "Числа 1, 2, 3, ..., используемые при счете предметов, называют натуральными числами". В этом утверждении говорится о введении термина, который используется для названия чисел, получаемых при счете предметов. Поэтому оно не является определением. На самом деле, натуральные числа можно получить и другим способом, например, указав порядковый номер или измеряя различные величины в случае, когда единица измерения помещается целое количество раз в измеряемой величине.

Заметим, что при введении первичных понятий, следует избегать употребления слова "называется" из-за того, что ученики будут воспринимать соответствующие утверждения как определения. Вместо этого целесообразно использовать словосочетание «*получили название», «договорились называть»* и тому подобное.

Итак, введенное таким образом понятие натуральных чисел не противоречит научному определению, понятно для учеников на интуитивном уровне из-за наличия у них достаточного эмпирического опыта, и позволяет дальше адаптировать и раскрывать теорию натуральных чисел в школьном курсе математики. Сведения о натуральных числах, которые изучаются в 5 классе (сравнение натуральных чисел, существование наименьшего натурального числа 1, отсутствие наибольшего натурального числа, неограниченность натурального ряда чисел, запись натуральных чисел и др.), дают учащимся представление о содержании этого понятия и позволяют оперировать с ними, исследовать их свойства и тому подобное. Однако известно, что в математической науке в полном объеме содержание понятия "натуральное число" раскрывается, например, через систему аксиом Пеано или на основе теоретико-множественного подхода.

Представление о первичных понятиях геометрии - точке, прямой, плоскости – на интуитивном уровне учащиеся также получают в начальной школе и в курсе математики 5-6 классов. На первых уроках геометрии в 7 классе раскрываются существенные признаки понятий «точка» и «прямая» через систему аксиом планиметрии. Здесь же учеников знакомят с неопределяемыми отношениями для точек и прямых «принадлежать ...», для трех точек прямой «лежать между ...».

Следует показать ученикам, что понятие точки, прямой, плоскости являются абстракциями от реально существующих объектов. Представление о прямой дает натянута нить или струна, представление о точке – место прикосновения карандаша к бумаге, мела – к доске, представление о плоскости – поверхность озера. Однако в геометрии эти фигуры рассматривают, пренебрегая размерами точки, толщиной прямой и плоскости. Прямая и плоскость в геометрии представляются неограниченно продляемыми. При формировании первичных понятий геометрии важно, чтобы ученики овладели терминологией, касающейся этих понятий.

Ученики должны усвоить, что понятие «лежать между» касается точек прямой (а не произвольной линии). Им следует объяснить, что в геометрии точкой, лежащей между точками A и B, является любая точка отрезка AB, расположенная правее точки A и левее точки B, а не только та, что лежит посередине отрезка, как это нередко истолковывают в быту. Важно научить учащихся отличать научное геометрическое понятие «лежать между» от понятия, сформированного на жизненном бытовом опыте.

Подавляющее большинство математических понятий, изучаемых в начальной школе и в курсе математики 5-6 классов, вводится описательно, на примерах. Например, так вводятся понятия числового и буквенного выражений, отрезка, угла, треугольника, обычной и десятичной дроби, прямоугольного параллелепипеда, понятие простого и составного числа, круга, кругового сектора, угла, отрицательного и положительного числа, числовой прямой, прямоугольной системы координат, коэффициента, подобных слагаемых.

Ряд математических понятий вводится описательно, на примерах и в систематических курсах алгебры и геометрии. Так, например, в курсе алгебры 7 класса вводится понятие одночлена на нескольких примерах. Внимание акцентируется на операции умножения, которая выполняется над числами, переменными и их степенями. Отмечается, что приведенные примеры выражений являются произведением чисел, переменных и их степеней. И так раскрываются существенные признаки одночленов.

Нетрудно видеть, что такое объяснение согласуется с определением, которое дается в курсе элементарной математики[†]. Однако, заметим, что в объяснении отсутствует термин «степень с неотрицательным целым показателем». Такое упрощение (по сути, сужение) описательного определения не нарушает принцип научности при введении рассматриваемого понятия и реализует принцип доступности. Действительно, на момент ведения понятия одночлена ученики усвоили понятие степени с натуральным показателем и его свойствами. Научились оперировать с этим понятием, преобразовывать выражения со степенями, то есть ученики получили достаточный практический опыт, у них сформировался определенный «запас» примеров выражений и опыт выполнения действий с ними. Поэтому введение понятия одночлена в таком виде является естественным результатом обобщения.

Описательно, на примерах вводят и понятие "геометрическая фигура" (7 класс). При этом целесообразно пользоваться не только изображениями в учебнике, а также показать ученикам модели различных планиметрических фигур и геометрических тел. Среди них могут быть, например, многоугольники, окружность, круг, изготовленные из проволоки, вырезанные из бумаги, а также параллелепипед, пирамида, шар и тому подобное. Следует обратить внимание на то, что многоугольники, окружность, круг могут разместиться в плоскости всеми своими точками, а параллелепипед, пирамида и шар – нет. Такие представления об особенностях различных геометрических фигур способствуют сознательному усвоению других свойств в ходе дальнейшего изучения курса геометрии.

Первые определяемые понятия вводятся в курсе математики 5-6 классов. Это такие понятия, как развернутый угол, квадрат, правильная и неправильная дроби, среднее арифметическое чисел, процент, делители и кратные числа, наибольший общий делитель чисел, наименьшее общее кратное чисел, пропорция, параллельные и перпендикулярные прямые и тому подобное, так же определяются обратные арифметические действия. Предлагаемые в учебниках определения вполне согласуются с научными определениями и доступны для усвоения учениками.

В систематических курсах алгебры и геометрии (7-11 классы) новые понятия в основном вводятся путем определений. При этом их введение, как правило, опирается на приобретенный учащимися практический опыт знакомства с определяемым объектом и фактическую сформированность соответствующего понятия на интуитивном уровне. В частности это такие понятия как тождественно равные выражения, тождественные

[†]**Одночленом** называется произведение числового множителя и одной или нескольких переменных, каждая из которых возведена в степень с неотрицательным целым показателем. Общая запись одночлена $Ax^ky^l...z^m$.

преобразования выражений, уравнения, корень уравнения, уравнения с одним неизвестным, функция, многочлен, степень многочлена, отрезок, луч, круг, треугольник, параллельные прямые в пространстве, скрещивающиеся прямые, многогранник и т.д.

Далее, формируя у учащихся представление о некоторых математических понятиях, стоит обратить внимание на принципиальную возможность давать разные определения одному и тому же понятию в зависимости от выбора существенных признаков, содержащихся в определении. Это можно пояснить на примере определения параллелограмма. Вместе с тем не следует допускать, чтобы у учащихся складывалось мнение о произвольности ввода математических понятий вообще и их определений в частности. С этой целью следует показать ученикам примеры обоснования целесообразности введения именно такого, а не другого, определения понятия. Так, при введении понятия степени с нулевым и отрицательным показателями целесообразность определений обусловлена необходимостью распространить правила действий над степенями с натуральным показателем на степени с нулевым и целым отрицательным показателям. Поэтому следует принять такое определение степени с нулевым показателем: степень с показателем «ноль» любого числа, отличного от нуля, равна единице: $a^0 = 1$ при $a \neq 0$. Выражение 0^0 не имеет смысла. Аналогично вводиться определение степени с целым отрицательным показателем.

В процессе формирования математических понятий ученики допускают ошибки при самостоятельном выявлении общих существенных признаков, когда понятие формируется конкретно-индуктивным методом, либо при формулировке определений, когда понятия уже введены. При этом учащиеся часто забывают упоминать некоторые существенные признаки, неудачно выбирают или вообще не указывают родовое понятие. Самым эффективным способом предотвращения и коррекции ошибок является приведение контрпримеров, которые помогают ученику осмыслить и запомнить существенные признаки объектов, определяемых понятиями.

Вообще, формулируя определение математического понятия, следует убедиться, что ученикам известны и понятны те существенные признаки, которые раскрывают содержание нового понятия. Далее следует акцентировать внимание учащихся на логической структуре определения понятия. Прежде всего, выделить существенные свойства объекта и определить характер их связи (конъюнкция, дизъюнкция или обе одновременно, импликация). И пока ученик не поймет их на интуитивном уровне формализованные или строгие словесные определения математических понятий для него будут непонятными, а следовательно и недоступными. Потребность в предыдущем введении понятия сначала на интуитивном уровне, с отделением его существенных свойств на конкретных примерах с использованием наглядных образов и иллюстраций является тем более насущной, чем более абстрактным является это понятие, чем сложнее логическая структура его определения.

5 Выводы

Таким образом, формирование математических понятий у учащихся должно подчиняться дидактическим принципам научности и доступности. Формулируя определение математического понятия, необходимо заботиться о его согласованности с научным, учитывать уровень умственного развития учащихся и их готовность воспринимать и осмысливать определение понятия, совершать с ним умственные операции, включать его в учебную деятельность и систему знаний вообще.

Однако заметим, что определения математических понятий в современных учебниках не всегда достаточно адаптированы к школьному курсу математики, с учетом теоретических основ, и не всегда соответствуют сформулированным выше требованиям. Некоторые определения математических понятий, согласовываясь с научными определением (или почти повторяя его), теряют доступность для усвоения учениками. Или, наоборот, из-за чрезмерного упрощения выхолащивается научность определения.

Например, в одном из учебников скрещивающиеся прямые определяются как таковые, что не лежат в одной плоскости. Это определение указывает на существенный признак («не лежат в одной плоскости») и вообще согласуется с научным пониманием понятия «скрещивающиеся прямые». Однако, в такой формулировке ученику его трудно усвоить из-за того, что существенный признак может быть им истолкован неоднозначно. Поэтому здесь целесообразно отдать предпочтение определению через отрицание, то есть конкретизировать те свойства, которыми не обладают такие прямые, а именно прямые не пересекаются и не параллельны.

Украинская школа сегодня находится на этапе реформирования. В частности, обучение математике в старшей школе осуществляется по четырем разным программам – уровень стандарта, академический уровень, профильный уровень, уровень углубленного изучения математики. Реализация этих программ обеспечивается разнообразием учебников. Попытки авторов учебников адаптировать содержание математического образования к тому или иному уровню приводят к тому, что иногда нарушаются принципы научности и доступности в представлении учебного материала в учебнике, в том числе и во введении определений математических понятий.

Таким образом, на современном этапе перестройки школьного математического образования это становится актуальной проблемой украинского методической науки. Поэтому мы считаем необходимым актуализировать общие теоретические основы выработки математических понятий с целью предупредить некорректные формулировки их определений при создании учебников. Привлечь внимание ученых-математиков академического круга, методической и учительской общественности в Украине к ее решению. Одним з путей решения данной проблемы – есть проведение тщательного научно-методического изучения и критического анализа предлагаемого содержания учебного материала в современных учебниках по математике и разработка и создание на научных основах новых качественных учебников.

ЛИТЕРАТУРА:

[1] Великий тлумачний словник української мови /уклад, і гол. ред. В.Г.Бусел. - Київ (2003)

[2] Виленкин Н.Я. Определения в школьном курсе математики и методика работы над ними / Н.Я.Виленкин, С.К.Абайдулин, Р.К.Таварткиладзе // Математика в школе. – 1984. – № 4-5. – С. 43-47

[3] Выготский Л. С. Собрание сочинений : В 6 т. / Л. С. Выготский. – М. : Педагогика, 1982. – Т.1. – 487 с. – Т.2. – 504 с.

[4] Давыдов В.В. Виды обобщения в обучении (логико-психологические проблемы построения учебных предметов) /В.В. Давыдов. - М.: Педагогика, 1972,- 424 с.

[5] Давыдов В. В. Теория развивающего обучения / В.В. Давыдов. — М.: Интор, 1996. - 544 с.

[6] Дорофеев Г. В. Строгость определений математических понятий с методической точки зрения // Математика в шк. — 1984. — № 3. — С. 56 — 60.

[7] Матяш О., Прус А. Окремі аспекти формування математичних понять / О. Матяш, А. Прус // Вісник Житомирського державного університету. – 2010. – Випуск 53. – С. 87-93 [Електронний ресурс]. – Режим досупу: http://eprints.zu.edu.ua/4580/1/vip_53_17.pd

[8] Светлов В.А., Практическая логика. С.-Петербург (1997). - 576 с.

[9] Семенець С.П., Методика формування математичних понять (розвивальний підхід) «Дидактика математики: проблеми і дослідження» № 37, 2012, с. 68-73

[10] Слєпкань З.І. Методика навчання математики. Київ (2000).

[11] Слєпкань З.І. Психолого-педагогічні та методичні основи розвивального навчання математики /З.Слєпкань. - Тернопіль: Підручники і посібники, 2006. - 240 с.

[12] Талызина Н.Ф. Управление процессом усвоения знаний /Н.Ф.Талызина. - М: МГУ, '1975.-343 с.

Ирина Анатолиевна Дремова
Национальный педагогический университет имени М.П. Драгоманова, кафедра математики и теории и методики преподавания математики
E-mail: irena_dream@ukr.net

Василий Александрович Швец
Национальный педагогический университет имени М.П. Драгоманова, кафедра математики и теории и методики преподавания математики
E-mail: kmmvm@ukr.net