ВЪРХУ ОБУЧАВАЩИТЕ РЕШЕНИЯ НА ГЕОМЕТРИЧНИ ЗАДАЧИ

ЙОРДАН Н. ИВАНОВ, МИРОСЛАВ К. ХРИСТОВ

ON DECISIONS OF GEOMETRIC TRAIN TASKS

YORDAN N. IVANOV, MIROSLAV K. HRISTOV

ABSTRACT: *In the article examined several aspects of thinking, including the phenomenon of "heuristic thinking" and their manifestation in teaching geometry. Examples are given.*

KEYWORDS: *thinking; heuristic thinking; instructional decision*

Изучаването, обучението и правенето на математика е свързано с решаване на задачи. Всеки подход към решаване на неалгоритмични задачи съдържа елементи на досещане. Всъщност, създаването на самите алгоритми изисква определена творческа дейност, свързана с елементи на досещане и съобразителност. Дори и случаите, когато се следва определен алгоритъм, използването на творчески елементи според видния американски психолог Джером Брунер може да доведе до по-бързо решение [11] .

Ученето по математика е конструктивен процес, а конструирането на математическите знания е създаване на връзки и взаимодействие между всички компоненти на тези знания.

Изборът на подход към дадена задача и нейното решение има творчески характер и съдържа елемент на досещане. Въпросът за досещането е занимавал психолозите доста отдавна. Има оформени две основни мнения. Съгласно едното от тях досещането е чисто случайно, а според другото то може да се обясни с класическата теория на логическите разсъждения и е техен резултат.

Без да отиваме в крайност, отричайки възможността досещането в някои случаи да е резултат на външна случайност, защитаваме тезата, че могат да се създадат условия, за да бъде то провокирано, а случайните му прояви се дължат преди всичко на случайности в процеса на мислене.

Досещането на математика е свързано с математическата интуиция. За това обръщат внимание философите-рационалисти от XVII век Спиноза, Лайбниц и Декарт. Според тях „в състава на интелектуалната дейност на човека, има истини които умът открива не въз основа на логически доказателства и разсъждения, а чрез своеобразно непосредствено „интелектуално видение” [11] .

Хрумването при решаване на задачи се появява изведнъж и толкова неочаквано, че създава впечатление за тайнственост. Причината за тайнствеността е в това, че прозрението е резултат на неосъзната дейност на мозъка. При това трудностите идват не само от недостатъчното познаване на процесите на мислене, но както отбелязва В. Н. Пушкин и от нерешените „редица принципни въпроси на цялата психология” [11]. Оттук и склонността за обяснения на безсъзнателност, в които човек несъмнено изпада.

По думите на руския психолог В. Н. Пушкин : „Психическия процес, с помощта на който се решава проблемът, избира се нова стратегия, открива се нещо ново, се нарича продуктивно мислене или, използвайки идващия още от Архимед термин, евристична дейност… Науката, която изследва закономерностите в евристичната, творческата дейност на човека, може да бъде наречена евристика”[11]. Целта на евристиката е да изследва правилата и методите, които водят до откритията и изобретенията.

Една от първите книги по евристика е на древногръцкия математик Пап Александрийски (втората половина на III век). Заглавието на книгата е ‘’Съкровищница на анализа’’ (или ‘’Изкуството да се решават задачи’’). Известният математик и педагог от унгарски произход Дьорд Пойа (1887 - 1985) не случайно го превежда като ‘Евристика’, имайки предвид, че решаването на една задача е творчество, в което съществена роля се пада на досещането.

Целта на статията е търсене на възможности за възпитаване в евристично мислене при обучението по математика.

Мисленето като всеки друг процес има свой собствен механизъм. Изходно начало на мислене има когато проблемна ситуация прерасне в задача, тогава човек си дава отчет, какво е това, което не му е известно и кои са условията, в рамките на които той ще търси това неизвестно. Заедно с това се пораждат и въпроси. Въпросът е отражение на тези предметни отношения, за изясняването на които ще бъде насочен целият следващ мисловен процес с неговите. етапи: задача, осъзнаване на въпроса, появяване на асоциации, проверка на предположението, решение или опровергаване на мислено действие или ново решение. Съществуват няколко общи мислителни действия. Първите от тях са анализът и синтезът. Те са неотделими един от друг в цялостния мисловен процес.

Според съвременните психолози съществуват различни форми на мислене:

Дивергентно мислене;Конвергентно мислене; Критично мислене; Дедуктивно мислене; Индуктивно мислене; Аналитично мислене; Интегративно мислене; Творческо мислене; Интерогативно мислене; Системно мислене; Продуктивно мислене; Репродуктивно мислене; Интуитивно мислене; Реалистично мислене; Аутистично мислене; Магическо мислене; Религиозно мислене.

Историческата роля на геометрията за развитието на математиката ѝ определя водещо място в математическото образование. Не е тайна обаче, че учениците, които определят геометрията като свой любим предмет, са твърде малко. Едва ли обяснението е само в консервативността на методиката на преподаването по геометрия. Евклидовата геометрия започва да губи популярност в училищното учебно съдържание още в средата на миналия век като следствие от специфичните ѝ особености. Основната причина е свързана с трудностите в усвояването на съответни геометрични твърдения и теореми, като в същото време, използването им, за разлика от далечното минало, не носят пряка практическа полза.

Друга причина е невъзможността в съдържателните случаи да се реализират необходимите точни построения и чертежи, а също така и продължителното време за извършването им. Към днешна дата нещата са значително променени. Използването на компютърни технологии спомага в значителна степен да се преодоляват споменатите проблеми и дава шанс не само за ефективно изучаване на Евклидовата геометрия, но и за изработване на чувство за собственост към предмета. Възможностите са в две посоки – преоткриване и оригинално творчество, т.е достигане до важни и елегантни, но вече известни теореми, но също и до установяване на нови. Понастоящем Евклидовата геометрия се намира в изключително благоприятна ситуация да бъде съживена и заедно с алгебрата да заеме своето подобаващо място в истинската математика. Хардуерната техника се развива с такива темпове, че е трудно да се предвиди със задоволителна точност бъдещото ниво на обучение по геометрия в средата на ученически индивидуални ноутбуци например.

Развиващите цели при обучението по геометрия биха могли да се дефинират по следния начин:
1. Независимо и логическо мислене чрез решаване на задачи и работа върху отворени проблеми;
2. Пространствено разбиране;
3. Способност да се представят геометрични обекти и да се реализират точни измервания с помощта на най разнообразни инструменти, в т.ч. геометрични инструменти и компютърни програми;
4. Познаване и разбиране на геометрични фигури – равнинни и пространствени;
5. Познаване и разбиране на геометрични трансформации, както и способност за прилагането им;
6. Усвояване на подходящ математически речник и език;
7. Познаване на връзките между геометрията и другите области на математиката, както и връзките с останалите дисциплини и реалният свят;
8. Способност за абстрактно мислене;
9. Способност за формулиране, тестване, обобщаване, разширяване и изследване на хипотези;
10. Мотивация за намиране и използване на собствени подходи при решаването на задачи
11. Изпитване на удоволствие от изображенията и формите, както и асоциирането им със съответни математически идеи.

Основен и ефективен подход за изучаване на математиката, както и за извършването на математически изследвания може да се осъществи с помощта на една схема на Пойа [12]. Схемата се базира преди всичко на опита. От своя страна, натрупването на опит става с методично извършване на наблюдения над обектите на изследване. Методът, с помощта на който се извършва целенасочено наблюдения и се натрупват свързани помежду си резултати, обикновено се нарича индукция.

Фундаменталната предпоставка за намиране на творческо решение на възникналите в практиката проблеми е **човешкият ум,** в който са култивирани следните **качества: наблюдателност, аналитичност, комбинативност, съобразителност, стремеж към новото, въображение.** Тук следва още веднъж да подчертаем, че всички тези качества не са в състояние да допринесат за постигането на значим творчески резултат, ако липсва **основополагащата предпоставка: систематично и задълбочено знание за предмета на творчеството или за важните му характеристики.**

Ние подкрепяме мисълта на И.Б.Ольбински затова, че под „развитие на задача“ трябва да се разбира „самостоятелно получаване на резултати като формулиране и решаване на нови за ученика задачи, формулиране на нови теореми, формули, хипотези, методи“ [10]. Тези резултати могат да бъдат получени през различни етапи на решаването на задача – анализа на условието, търсенето на решение, издигането на хипотеза, съставянето на плана за решаване, неговата реализация (проверка на хипотезата), оформянето на отговора, изследването на задачата.

Посредством анализиране последователността от умствени действия и наблюдаване дейността решаване на задачи, се установява, че сред сформираните у учениците умения самостоятелно да търсят доказателство на теореми, важно значение има процесът „развитие на задача“ (този процес оказва положително влияние за откриване от тях на формулировката на нова теорема). У добре подготвените ученици осмислянето на тези компоненти оказва непосредствено съдействие върху разбирането на новото, преработено знание изпълнението на което им дава възможност да изпълнят основната задача.

Например доказателството, че дължината на една хорда от окръжност е по-дълга от дължината на друга хорда. Разбирането на тази задача, предизвиква у учениците осмисляне начина на преобразуване на задачата: да сравнят разстоянието от центъра на окръжността до дадените хорди и способства за изпълнението на необходимите допълнителни построения.

Използването на процеса „развитие“ на математички задачи може да доведе до разкриване на много разнообразни връзки и отношения между обектите в изходната задача, с което субектът не само обогатява учебното съдържание, но и самостоятелно систематизира и непрекъснато разширява своя арсенал от евристични приоми за решаване на математически задачи. Формирането на умения за извършване на развитие на задача помага на учениците да придобият умения и за самостоятелно съставяне на нови задачи, а решавайки ги, да усвоят и нови за тях знания, т.е. реализира се познавателна самостоятелност, и се стимулира евристичната им дейност.

На практика най-често използваните дейности за осъществяване „развитие на задача“ са:

- преобразуване на задача;
- съставяна на задача, аналогична на дадената, но по-сложна;
- обобщаване на задача;
- конкретизация на задача;
- съставяна на задача, обратна на дадената.

Всяка от тези дейности има определено влияние върху управлението и самоорганизацията на евристичната дейност на учениците. Ще дадем няколко примера как тези дейности за развитие на задачи подпомагат организацията и управлението на евристичната дейност на учениците.

Преобразуване на задача: решението на задачата за намиране лицето на околната повърхнина на правилна пирамида ни насочва към формулиране и въвеждане на нова за учениците теорема. Така например след съвместна дейност с учениците по решение на задачата:

Апотемата на правилна триъгълна пирамида има дължина 5 см. а страната на основата – 4 см. Да се намери лицето на околната повърхнина на тази пирамида.

Обобщаваме и заменяме числовите стойности на апотемата и страната на триъгълника, служещ за основа на пирамидата съответно с буквени стойности a и k и получаваме :

$S=\frac{1}{2}(a+a+a).k$, т.е. или $S=p.k$, където p е полу-периметъра на основата на пирамидата.

Това решение подсказва формулировката на теоремата:

Лицето на околната повърхнина на правилна пирамида е равно на произведението от полу-периметъра на основата и апотемата на пирамидата.

Конструиране на задача аналогична на дадена, но по-сложна: Опитите да намерят в пространството теорема аналогична на теоремата на Питагор от планиметрията водят учениците до идеята да се разгледа тетраедър, на който трите ръба излизащ от един връх са взаимно перпендикулярни, и до идеята да се установи съотношение между лицата на трите му страни, които съдържат правите ъгли (S_1, S_2, S_3) и лицето (S_4) на четвъртата стена (остроъгълен триъгълник).

След извършване на съответните изчисления, учениците достигат до съответното съотношение $S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = S_4^2$.

Конкретизация на задача да разгледаме задачи които се решават с метода „събиране на уравнения“ . Това са задачи, за които учениците казват, че „в тях има малко данни“. Конкретизирането на някои от условията помага за решаване на такива задачи. Например: *В правилна триъгълна пирамида околния ръб е* l *, а околната стена е наклонена към равнината на основата под ъгъл* β *. Да се намери обема на пирамидата.*

Евристичната схема към един от подходите има вида:

1) Отговори си на въпроса – коя от неизвестните величини е най-подходяща да се приеме за основно неизвестно (параметър)
2) Означи този параметър, например, с x и изрази всички други неизвестни величини, които са необходими по време на решаване на задачата чрез избрания параметър;
3) Използвай зависимостите между неизвестните и известните величини, състави уравнение.

Анализирайки условието на задачата, т.е. развивайки я, ученикът забелязва, че решаването на задачата би било по-лесно, ако биха били дадени или страната на триъгълника в основата или височината на триъгълника. Така учениците получават нови задачи.

В правилна триъгълна пирамида със страна a на основата и околен ръб равен на l (или околна стена наклонена към равнината на основата под ъгъл β) . Да се намери обемът на пирамидата.

В правилна триъгълна пирамида околния ръб е равен на l и околната стена е наклонена към равнината на основата под ъгъл β . Да се намери обемът на пирамидата.

Конструиране на задача, обратна на дадена

Решавайки задача с недостатъчна определеност на съдържанието: „В правилен тетраедър е известна височината. Как да се намери дължината на негов ръб?“, ученик е съставил и решил, обратна на нея задача,обосновавайки се с независимостта на решението от чертежа: „Известна е дължината на ръба на правилен тетраедър. Да се намери неговата височина.“

Заслужава внимание също идеята за прилагане на евристични методи за създаване на нови задачи от учениците. Към тях можем да отнесем както традиционният частично-търсещ метод (евристична беседа), така и, произлизащите от инженерното конструиране – специални евристични методи.

Сега ще се опитаме да илюстрираме дейността на учителя по математика за възпитаване на някои качества на мислене у учениците, чрез съставяне на обучаващи решения, както и указания за последващата работа по тях, като използване някои от избраните похвати и методи.

Под обучаващо решение на задача разбираме беседата по решаването на задачата, описваща дейността на учителя на базата на нужен /и възможен/ по-подробен анализ, опиращ се на евристичната схема и включващ елементите генезис и развитие на задачата.

Геометричното мислене по своята природа преобладаващо е евристично мислене. Поради тази причина при разработването на обучаващи решения на геометрични задачи сме се стремили да постигнем като неявен резултат и възпитаването на елементи от евристично мислене.

Задача 1. Окръжност пресича графиката на функцията $y = x^3 - 2016x$ в шест различни точки. Намерете сумата на абцисите на тези точки.

<u>Обучаващо решение</u>:

Учител: Тъй като не е удачно да се начертае графика на функцията $y = x^3 - 2016x$ и нямаме конкретна информация за окръжността се налага задачата да се реши аналитично. Какво е общото уравнение на окръжност?
Ученик: Всяка окръжност се задава с координатите на нейният център $O(a,b)$ и радиус R по следният начин $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$.
Учител: По какъв начин може на намерим координатите на пресечните точки на двете криви?
Ученик: Необходимо е да се реши системата $\left| \begin{array}{l} y = x^3 - 2016x \\ (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \end{array} \right.$.

Учител: Това очевидно е невъзможно на практика. Освен това в задача се търси сумата от абцисите на тези точки. По какъв начин можем да намерим връзка между абцисите на тези точки?
Ученик: След като заместим $y = x^3 - 2016x$ в уравнението на $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ се получава $(x-a)^2 + (x^3 - 2016x - b)^2 - R^2 = 0$.
Учител: От коя степен е полученото уравнение?
Ученик: Уравнението е от степен 6.
Учител: Колко корена има това уравнение?
Ученик: Тъй като в условието на задачата е казано, че графиката на функцията и окръжността се пресичат в шест точки, следователно това уравнение има точно шест различни реални корена.
Учител: Нека означим с x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 и x_6 корените на това уравнение. Това всъщност са абцисите на търсените точки и в задачата се търси тяхната сума $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$. Ако разгледаме многочлена $M(x) = (x-a)^2 + (x^3 - 2016x - b)^2 - R^2$, на колко е равен коефициентът пред най-висока му степен?
Ученик: Коефициентът пред степен шеста е равен на 1.
Учител: Какъв е коефициентът пред пета степен на многочлена?
Ученик: След като се повдигне на степен втора се получава следното: $M(x) = x^6 + (-2b - 2016)x^3 + 2016^2 x^2 + (-2a + 4032b)x + a^2 + b^2 - R^2$, от където се вижда, че пета степен липсва и следователно коефициента пред нея е равен на 0.

Учител: По какъв начин може да го разложим на множители, знаейки че неговите корени са x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 и x_6?

Ученик: Знаейки корените на уравнението $\left(x-a\right)^2+\left(x^3-2016x-b\right)^2-R^2=0$ многочлена може да се разложи на множители по следния начин:

$$M(x)=1.(x-x_1).(x-x_2).(x-x_3).(x-x_4).(x-x_5).(x-x_6).$$

Учител: При разлагането което посочихте на колко ще е равен коефициента пред степен пета?
Ученик: Пред пета степен на многочлена ще е изразът $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6$.
Учител: Тоест това е търсената от нас сума. От друга страна какво получихме за нея, а именно за коефициента пред пета степен на полинома?
Ученик: В явният вид на многочлена се вижда, че коефициента пред пета степен е 0.
Учител: Това какво заключение може да направим?
Ученик: Сумата на абцисите на пресечните точки на двете криви е равна на 0.

Задача 2. Да се докаже, че ако дължините на страните на триъгълник ABC удовлетворяват зависимостта $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}=\frac{3}{a+b+c}$, то $\sphericalangle A=60^0$.

<u>Обучаващо решение</u>:

Учител: Понеже от $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}=\frac{3}{a+b+c}$ не виждаме как следва, че $\sphericalangle A=60^0$, стремим се да преработим дадената зависимост, докато стигнем до израз, от който може да се обосновем, че $\sphericalangle A=60^0$. Какво можем да се направи?
Ученик: Може да се приведе под общ знаменател и да стигнем до израза:

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}=\frac{3}{a+b+c}\Leftrightarrow(a+c)(a+b+c)+(a+b)(a+b+c)=3(a+b)(a+c)\Leftrightarrow$$

$$(a+c)^2+b(a+c)+(a+b)^2+c(a+b)=3(a+b)(a+c)\Leftrightarrow$$

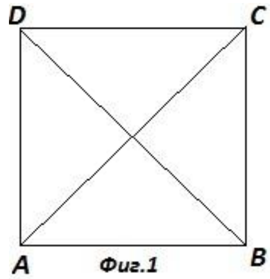
$$a^2+2ac+c^2+ab+bc+a^2+2ab+b^2+ac+bc=3a^2+3ac+3ab+3bc\Leftrightarrow$$

$$a^2=b^2+c^2-bc\ (1).$$

Учител: В този вид полученото равенство напомня ли някоя от познатите теореми?
Ученик: Косинусова теорема.
Учител: Как бихме приложили косинусова теорема за $\triangle ABC$, със страни a,b и c и $\sphericalangle BAC=\alpha$?
Ученик: Прилагайки познатата теорема получаваме следното**:** $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$ (2).
Учител: Какво трябва да направим с получените равенства (1) и (2) за да елиминираме колко е възможно повече променливи?
Ученик: Може почленно от (1) да се извади (2) и в този случай се получава следното:
$0=-bc+2bc\cos\alpha$.
Учител: От полученото равенство може ли да се направи някакъв извод за търсеният ъгъл?
Ученик: След като се преработи стигаме до $bc(1-2\cos\alpha)=0$ и тъй като b и c са страни на триъгълник т.е. положителни числа следва, че $1-2\cos\alpha=0\Leftrightarrow\cos\alpha=\frac{1}{2}$, но $\alpha\in\left(0,180^0\right)$ и следователно той е равен на 60^0.

Ще предложим един вариант (той не е единствен) за организиране на евристична дейност в учебен час по математика в обикновено училище, в нормален клас (над 70% от учениците имат оценка по математика поне „добър“) с цел възпитаване на елементи от евристично мислене. Предполагаме,че урокът по математика е за упражнение след изучаване на косинусова и синусова теореми, или е от часовете за годишен преговор. Важно е да отбележим, че при изучаването на косинусова теорема са актуализирани знанията от 7 клас за неравенства в триъгълника и са обобщени, а именно: ако числата *a, b* и *c* са дължини на страните на триъгълник и *c* е най-голямата от тях ($a \le b \le c$), то $|a-b| < c < a+b$ и обратно, ако това неравенство е изпълнено за числата *a, b* и *c*, то съществува триъгълник с дължини на страните *a, b* и *c*. Учениците са открили също, че за квадратите на страните на триъгълник може да е в сила точно една от релациите: или $c^2 < a^2 + b^2$; или $c^2 = a^2 + b^2$; или $c^2 > a^2 + b^2$ в зависимост от ъгъл γ. Установено е също, че за решаването на триъгълник (намирането на основните му елементи: $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ и S) косинусовата теорема е най-удобно да се използва при дадени две страни и ъгълът заключен между тях или при дадени три страни.

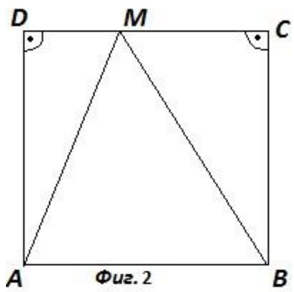
Дейността в клас може да започне така:



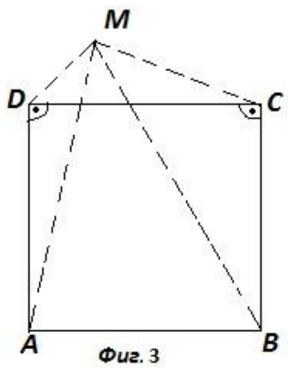
Фиг.1

Учител: Ученици, начертайте квадрат $ABCD$.*(фиг. 1)*
Учител: Вярно ли е, че $AD + DC = BD$?
Отговор: Не е вярно, от ΔABD следва,че $AD + AB > BD$ т.е. $AD + DC > BD$

Въпрос: Какво ще кажете за квадратите на тези отсечки?
Отговор: $AD^2 + DC^2 = BD$ - следва от теоремата на Питагор за ΔABD .
Въпрос: Как можем да изкажем това твърдение, ако вместо страни и диагонали на квадрата използваме
разстояния от върха (точката) *D?*
Отговор: Сумата от квадратите на разстоянията от т.*D* до върховете *A* и *C* е равна на квадрата на разстоянието от т. *D* до върха *B*.
Въпрос:Можем ли да запишем равенството така: $DA^2 + DC^2 = DB^2 + DD^2$.Как ще го изкажем?
Въпрос: Ако вместо т.*D* вземем т.*M* от контура, например $M \in DC$ *(фиг. 2),* как ще запишем равенството?



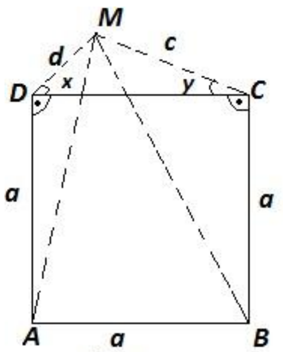
Фиг. 2



Фиг. 3

Отговор: $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$
Въпрос: Вярно ли е това равенство?
Отговор: От $\Delta AMD \Rightarrow AM^2 = AD^2 + DM^2$. От $\Delta BMC \Rightarrow MC^2 = MB^2 - BC^2$
Въпрос: Ако *M* е произволна точка, как може да се обобщи равенството? *(фиг. 3)*

Отговор: За произволна т.M от равнината на квадрата $ABCD$ $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$
Въпрос: А дали е вярно? Ние установихме верността му в някои частни случаи?
Отговор: За да бъде вярно, трябва да бъде доказано!
Учител: За улеснение на пресмятанията да означим страната на квадрата с *a*. Как можем да определим положението на т.M ?
Отговор: Трябва да параметризираме фигурата.
Въпрос: Как?
Отговор: Например с две от отсечките *MA, MB, MC, MD* или с два от ъглите в триъгълниците на чертежа!
Въпрос: Можем ли да параметризираме с DM и $\angle CDM$ или с CM и $\angle CDM$?
Отговор: С DM и $\angle CDM$ може, а с CM и $\angle CDM$ не може защото не е ясно, че CM е най-дългата страна в ΔCDM и четвърти признак за еднаквост на триъгълници не е налице.
Въпрос: Да означим $MC = c$ и $MD = d$. ΔCDM е определен по 3 страни.Коя теорема можем да използваме за да решим триъгълника?
Отговор: Косинусовата теорема.
Въпрос: Ако означим $\angle CDM = x$ и $\angle DCM = y$, можем ли да намерим тези ъгли? (*фиг. 4)*
Отговор: Да , $\cos x = \dfrac{a^2 + d^2 - c^2}{2ad}$, $\cos y = \dfrac{a^2 + c^2 - d^2}{2ac}$



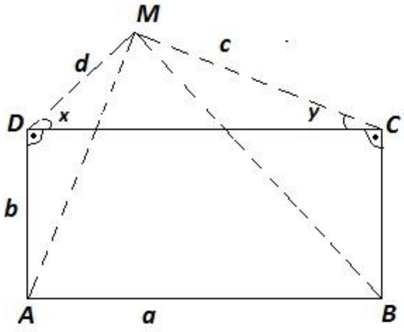
Фиг. 4

Въпрос: За да докажем, че
$MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$ какво е достатъчно да направим?
Отговор: Достатъчно е да го заменим с еквивалентно на него вярно равенство.
Учител: Изразете *MA* и *MB* чрез въведените параметри и заместете в равенството.
Въпрос: Кои триъгълници ще използваме?

Отговор: ΔADM и ΔBCM защото са определени по първи признак за еднаквост.
Въпрос: Кой желае да излезе на дъската и да запише преобразуванията?
Учителят вдига ученик, който вече е получил резултат и записва на дъската:

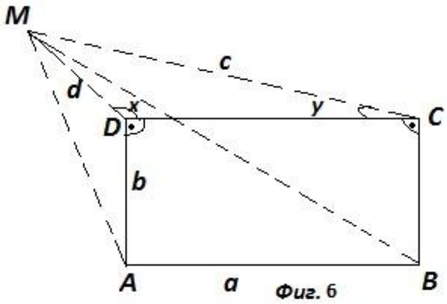
От $\Delta ADM \Rightarrow AM^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\left(90^0 + x\right)$
От $\Delta BCM \Rightarrow BM^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\left(90^0 + y\right)$
$MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2 \Leftrightarrow$
$c^2 + a^2 + d^2 - 2ad\cos\left(90^0 + x\right) = d^2 + a^2 + c^2 - 2ac\cos\left(90^0 + y\right)$
Въпрос: Помните ли формулата за $\cos\left(90^0 + \alpha\right)$?
Отговор: $\cos\left(90^0 + \alpha\right) = \sin\alpha$
Въпрос: За да докажем равенството, какво е достатъчно да проверим?
Отговор: $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2 \Leftrightarrow d\sin x = c\sin y$ Трябва да проверим дали последното равенство е вярно!
Въпрос: Можем ли да го запишем във вид на пропорция?
Отговор: Да, $\dfrac{d}{\sin y} = \dfrac{c}{\sin x}$.
Въпрос: Срещали ли сме това равенство по-рано?

Отговор: Да, това е синусовата теорема за ΔCDM !
Въпрос: Кое тъждество доказахме?
Отговор: За всяка точка M от равнината на квадрата $ABCD$ е изпълнено $AM^2 + CM^2 = BM^2 + DM^2$.
Въпрос: Квадратът е правилен четириъгълник, най-частният вид четириъгълник.Дали не можем да обобщим доказаното тъждество и за друг вид четириъгълници? Кой четириъгъл- ник е най-близкият по вид?
Отговор: Правоъгълникът и ромбът.
Въпрос: Начертайте правоъгълник. Има ли нужда да разглеждаме частни случаи или да проверим дали можем да използваме доказателството в общия случай? *(фиг. 5)*
Отговор: В изразяването на AM^2 и BM^2 ще се появи страната b, но преобразуванията са същите.
Въпрос: Формулирайте доказаното тъждество.
Отговор: За всеки правоъгълник $ABCD$ и т.M от равнината му е изпълнено:
$AM^2 + CM^2 = BM^2 + DM^2$



Фиг. 5

Учител: За домашна работа проверете верността на доказателството за случая, когато т.M е вътрешна за правоъгълника или например т.M е както на *фиг. 6.* Тогава $\angle ADM = 360^0 - x - 90^0$
Въпрос: Вярно ли е равенството, ако $ABCD$ е ромб?
Отговор: Не знаем, $\angle ADC \neq \angle BCD$ и доказателството не е аналогично!
Въпрос: Да проверим за частен случай, например при $M \equiv D$?
Отговор: Не е вярно! $DA^2 + DC^2 = DB^2$ само при $\angle BAD = 90^0$
Въпрос: Какъв извод можем да направим?
Отговор: Ако $ABCD$ е ромб, равенството не е вярно за всяка т.M от равнината му.



Фиг. 6

Въпрос: Можем ли да формулираме по-обща задача, свързана с разглежданата?
Отговор: Да се намерят всички точки M (ако съществуват) от равнината на даден четириъгълник $ABCD$(ромб, успоредник, трапец) за който $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$.
Учител: Тази обща задача е доста сложна и ние ще я обсъждаме в бъдеще.Помислете върху нея.Когато изучаваме стереометрия (геометрия на пространството) ще потърсим и точки с това свойство, които не са от равнината на четириъгълника $ABCD$.

Така проведената евристична беседа дава възможност да се илюстрират и усвоят елементи от евристични похвати като използване на частни случаи за откриване на верни твърдения,не пълна индукция за формулиране на обобщения, ролята на контрапримера за доказване на твърдения, отрицанието на квантора за общност, параметризиране на фигура, аналогия между доказателства и др.

Други доказателства, например с векторна база, с метод на масите, с комплексни числа и т.н. могат да се разгледат в СИП или в други форми на извънкласна дейност, и то ако учениците предварително са изучили и използвали тези методи.
Дейността решаване на математически задачи има съставки, които са с ясно изразен алгоритмичен тип, както и такива, които са с подчертан евристичен тип. Развитите

съдържателни и технологични страни на различните подходи, методи и евристики за комплексна дейност с математически задачи и усъвършенстването на методиката на работа с тях съдействат оптимално за пълноценно постигане на образователните, възпитателните и развиващи цели на обучението по математика. Внедряването в учебния процес на технологии във вид на актуализации на евристични ситуации и обучаването в решаване на задачи чрез използването на разнообразни прийоми на всеки етап от процеса на обучението по математика, позволява да се формира у обучаемите учебно-познавателна евристична дейност и спомага за по-лесното решаване на задачи.

Разработката е частично финансирана от Договор за научна работа РД -08 -98/2016 г. с Шуменски Университет „Епископ Константин Преславски“.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Адамар, Ж. Исследование психологии процеса изобретения в области математики, Съветское радио, Москва, 1970, с. 135-145, с. 140.
[2] Брунер, Дж., Психология познания, Прогрес, Москва, 1977.
[3] Вертгеймер, М. Продуктивное мышление, Прогрес, Москва, 1987, с. 40-110
[4] Вутова, И. З. Евристична и прогностична роля на теоремите в училищния курс по математика, Дисертация, София, 2012 г.
[5] Ганчев И., Ю. Колягин, Й. Кучинов и др., Методика на обучението по математика от VIII до XI клас – втора част, София, Модул, 1998 г.
[6] Ганчев Ив., Ю. Нинова, В. Никова, Методика на обучението по математика /обща част/, Благоевград, Унив. изд. ”Неофит Рилски”, 2002 г.
[7] Кучинова, Й. Шопова, Д. Ръководство за самостоятелна подготовка на кандидатстуденти за приемен изпит по математика, Планиметрия, Модул, София 2000г.
[8] Кучинова, Й. Шопова, Д. Ръководство за самостоятелна подготовка на кандидатстуденти за приемен изпит по математика, Стереометрия, Модул, София 2000г.
[9] Минчев, Б. Терапия и практическа психология, София, 2004.
[10] Ольбинский, И. Б. Развитие задачи, Математика в школе, 1998, 2, с.15-16
[11] Пушкин, В. Н. Евристика – наука о творческом мышлении. Издателство политической литературы, Москва, 1967, с. 4-5.
[12] Пойа, Д. Как решать задачу, Учпедгиз, Москва, 1961.
[13] Скафа, Е., Милушев, В., Конструиране на учебно-познавателна евристична дейност по решаване на математически задачи, УИ „Паисий Хилендарски“, 2009 г.
[14] Тонов, И., Евристиката - наука, изкуство, занаят. Монографичен труд. София, 2012.
[15] Тонова, Т., Когнитивни модели в обучението по математика на ученици от 3 – 6 клас. Дисертация.
[16] Bulletin de I’Institut General de Psychology, 3, 8, anee, 1908.