ИЗУЧЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ И НАЧАЛ АНАЛИЗА 10 КЛАССА*

Василий А. Швец, Ирина В. Жук

THE STUDY OF THE ELEMENTS OF APPROXIMATE COMPUTATION THEORY IN THE COURSE OF ALGEBRA AND INTRODUCTION TO ANALYSIS AT THE 10TH FORM

Vasiliy A. Shvets, Irina V. Zhuk

ABSTRACT: *The issue on introduction of educational topic "Approximate computation" to the academic program in mathematics at special-profile high school, for the study of which the authors propose to allocate 12 hours, is considered in this paper. The content of educational material on the topic, methodological recommendations, examples of exercises solving are summarized in this paper. The authors propose to acquaint students with two methods of approximate computation – using the method of computing correct digits and the boundary method. An extensive use of contemporary computational tools during computation of expressions values and applied problems solving is recommended.*

KEYWORDS: *Approximate values of numbers and quantities, approximate computation, absolute and relative errors, absolute error limit, relative error limit, accuracy of approximation, correct digit, significant digit, method of computing correct digits, boundary method.*

В независимой Украине программа по математике, в частности для старшей школы, менялась неоднократно. Сегодня, с внедрением нового Государственного стандарта базового и полного общего среднего образования, Концепции профильного обучения в старшей школе, снова идет речь об очередных изменениях в учебных программах. Однако ни разу во время таких изменений не уделялось должное внимание изучению приближенных вычислений, хотя для обучения дисциплинам естественнонаучного цикла именно такие знания крайне необходимы.

Изучением приближенных вычислений в школе, как научной проблемой, занимались Н.Ф. Елизаветина, Р.А. Мусаелян, И.Г.Адишев, И.Ф. Соколовский, М.М. Мадбабаев, Т.М. Казакова, Н.И. Жданова. Методике обучения учащихся приближенным вычислениям занимались такие известные ученые как А.Н. Крылов, В.М. Брадис, А.И. Маркушевич, П.В. Стратилатов, А.Н. Колмогоров и другие. Частично проблема изучения приближенных вычислений в школе рассматривалась в диссертационных исследованиях З.И. Слепкань, Н.В. Елизаветиной, М.М. Мадбабаевым, более глубоко методику изучения приближенных вычислений в курсе математики основной школы изучала В.Н. Клиндухова [1].

В настоящее время содержание школьного курса математики существенно изменилось, появились мощные вычислительные средства, что делает **проблему изучения приближенных вычислений в школе вновь актуальной**. Несмотря на это, внимание к проблеме, в соответствии с действующей программой [2], сводится только к правилам округления чисел (5 класс) и знакомства с десятичным приближением обыкновенной дроби (6 класс). Поэтому и не удивительно, что результаты проведенного нами исследования среди учащихся старших классов и учителей математики общеобразовательных учреждений Черновицкой области показали низкий уровень культуры приближенных вычислений. Ученики не умеют работать с приближенными значениями величин и чисел. Таким образом, возникает потребность во включении темы «Приближенные вычисления» в учебные программы по математике для учащихся старших классов, в создании учебно-методического обеспечения и методических рекомендаций по изучению приближенных вычислений в старшей профильной школе.

Перед тем, как говорить о методике изучения приближенных вычислений (далее ПВ) в старшей школе, следует выяснить содержание основных понятий и методов теории приближенных вычислений. Это целесообразно сделать уже в первой теме курса алгебры и начал анализа десятого класса «Приближенные вычисления», которой мы предлагаем начать изучение курса, отведя на изучение 12часов (таблица 1). Основной целью изучения темы есть знакомство с числовыми характеристиками приближенных значений чисел и величин, с такими методами ПВ как метод подсчета правильных цифр и метод границ. Такое расположение темы в программе является актуальным. Это связано еще и с тем, что изучение физики в 10 классе начинается с вступления, на изучение которого отводится всего 2 часа. Его содержание предполагает изучение погрешностей измерения и ПВ. Понятно, что в течение двух часов невозможно овладеть математическим аппаратом теории ПВ, поэтому рассмотрение этих вопросов старшеклассниками логично продолжить на уроках алгебры и начал анализа.

Остановимся более подробно на методике изучения названной выше темы в 10 классе.

Таблица 1. Фрагмент программы.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА	**ТРЕБОВАНИЯ К УРОВНЮ УЧЕБНЫХ ДОСТИЖЕНИЙ УЧАЩИХСЯ**
ТЕМА 1. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ (12 часов)	
Множества и операции над ними. Числовые множества. Действительные числа. Числовая прямая. Изображение чисел на числовой прямой. Приближенные значения чисел и величин. Характеристики приближенного значения числа: погрешность, абсолютная погрешность, предел абсолютной погрешности относительная погрешность, предел относительной погрешности, точность приближения. Запись приближенных чисел в виде двойного неравенства и условного равенства. Приближенные вычисления методом границ. Правильные и значащие цифры. Запись приближенных значений чисел в виде приближенного равенства. Приближенные вычисления методом подсчета правильных цифр.	*Изображает* на диаграммах или числовой прямой объединения и пересечение множеств, иллюстрирует понятие подмножества. *Имеет представление* о приближенном значении чисел и величин; абсолютной и относительной погрешности, точности приближения, правильной и сомнительной цифре, значащих цифрах приближенного значения числа. *Различает* точные и приближенные числа; *Знает* правила округления чисел, выполнения арифметических действий с приближенными значениями величин; правила записи ответа в прикладных задачах. *Умеет* округлять числа с заранее заданной точностью, находить абсолютную и относительную погрешности, границы абсолютной и относительной погрешности, точность приближения, правильные и сомнительные цифры, значащие цифры приближенного значения числа. *Указывает* формы записи приближенных значений числа. *Выполняет* действия над приближенными значениями, в том числе и с помощью вычислительной техники. *Знает и использует* метод границ для нахождения приближенного значения числа, метод подсчета правильных цифр, оценку погрешности вычислений. *Решает* прикладные задачи, данные в которых выражены приближенными числами.

В условиях задач редко можно встретить записи, которые четко говорят, что заданные величины являются приближенными. Поэтому прежде всего важно научить учащихся при анализе условия определить это самостоятельно. Иногда случается так, что тот или иной результат можно считать точным, а можно - приближенным. Например, в условии задачи сказано, что для перевозки груза нужно 3 машины. Если считать, что речь идет о количестве единиц машин для перевозки, то данное число является точным. Если же имеется в виду объем перевозимого груза, который помещается в машины, то это - приближенная величина.

В подобных неопределенных случаях точность данных следует определять в соответствии с содержанием условия задачи.

Из курса физики старшеклассникам уже известно, что на практике используют понятие абсолютной погрешности и относительной погрешности. При этом следует помнить, что понятие погрешности и абсолютной погрешности различаются между собой. Пусть x - точное значение некоторой величины, a - ее приближенное значение, а Δa - погрешность приближенного значения:

а) *погрешностью* Δa приближенного значения a называется разность между точным числом и его приближенным значением, иначе $\Delta a = x - a$;

б) *абсолютной погрешностью* приближенного значения a называется модуль разности между точным числом x и его приближенным значением a, иначе $\Delta_a = |x - a|$.

Ученики должны знать, что погрешность может быть как положительной, так и отрицательной. Абсолютная погрешность всегда положительная. Обычно знать знак погрешности не обязательно, поэтому в основном используют понятие абсолютной погрешности. Часто точное значение величины остается неизвестным, тогда и абсолютную погрешность вычислить невозможно. Однако, иногда следует оценить, т.е. указать, какое значение не превышает эта погрешность. Такую величину называют *границей абсолютной погрешности* и обозначают h_a.

Таким образом, ученики должны усвоить, что *границей абсолютной погрешности приближенного числа* a называется такое положительное число h_a, которое не меньше абсолютной погрешности, т.е. $\Delta_a \le h_a$, или $|x - a| \le h_a$. Иными словами $a - h_a \le x \le a + h_a$, или $x = a \pm h_a$, или $x \approx a$ с точностью до h_a.

Таким образом, связь между точным числом и его приближенным значением имеет три формы записи.

После таких сообщений следует с учащимися рассмотреть упражнения. Они могут быть следующего содержания.

Пример 1. Найдите значение абсолютной погрешности и границы абсолютной погрешности числа $a = 0{,}285$ для числа $x = \dfrac{2}{7}$.

Решение. Имеем: $\Delta_a = \left|\dfrac{2}{7} - 0{,}285\right| = \left|\dfrac{2}{7} - \dfrac{57}{200}\right| = \left|\dfrac{400-399}{1400}\right| = \dfrac{1}{1400}$.

За границу абсолютной погрешности можно брать как число $h_a = \dfrac{1}{1400}$, так и любое другое, большее значение. Поэтому, например, в десятичной записи будем иметь $\dfrac{1}{1400} = 0{,}00071428...$. Заменив это число большей, конечной десятичной дробью, получим, что $h_a = 0{,}0008$. Ученики должны усвоить, что округление в случае нахождения границы абсолютной погрешности осуществляется **только с избытком**.

В таком случае можно сказать, что для числа $x = \dfrac{2}{7}$ число $a = 0{,}285$ является его приближенным значением с точностью до 0,0008.

Пример 2. Найдите предел абсолютной погрешности числа x, если $13{,}6 \le x \le 14{,}6$.

Решение. Число 13,6 называется нижней границей числа x и обозначается НГ$_x$, а 14,6 - верхней границей и обозначается ВГ$_x$. Вполне естественно принять за приближенное значение числа x число, равное среднему арифметическому НГ$_x$ и ВГ$_x$. В таком случае приближенное значение числа x вычисляется по формуле $a = \frac{ВГ_x + НГ_x}{2}$, а граница абсолютной погрешности $h_a = \frac{ВГ_x - НГ_x}{2}$.Эти формулы ученики должны усвоить и научиться ими пользоваться. Итак, пользуясь указанным формулам вычисляем, что $a = \frac{14{,}6 + 13{,}6}{2} = 14{,}1$, $h_a = \frac{14{,}6 - 13{,}6}{2} = 0{,}5$. Тогда, $x = 14{,}1 \pm 0{,}5$.

Замечание 1. Обычно на практике используют границу абсолютной погрешности, поэтому для удобства договорились ее называть просто «абсолютная погрешность», если это не вызывает определенных недоразумений.

Замечание 2. Если в условии задачи есть приближенные данные и не указана их точность, то считают, что **граница абсолютной погрешности равна половине единицы последнего разряда** заданной величины.

Замечание 3. В некоторой литературе можно встретить, что граница абсолютной погрешности равна единице последнего разряда заданной приближенной величины. Однако чаще придерживаются предыдущей договоренности.

Далее следует ознакомить учащихся с понятием относительной погрешности. Для этого изложение учебного материала следует начать с конкретных задач (конкретно-индуктивным методом). Например:

1. Тане на день рождения мама в магазине купила торт весом 2 кг.
2. Фабрика «Рошен» за один день производит 120220 кг продукции.

Ученики должны заметить, что числовые значения величин в обоих примерах являются приближенными значением с точностью до килограмма. Тогда, согласно условиям задач, масса торта $1{,}5 \le m_1 \le 2{,}5$ килограммов, а дневной объем произведенной продукции на фабрике $120\ 219{,}5 \le m_2 \le 120\,120{,}5$ килограммов. Очевидно, что точность задания данных кардинально отличается в соотношении с приближенным значением. Поэтому возникает необходимость кроме **количественной характеристики** приближенного значения – абсолютной погрешности ввести другую, **качественную характеристику**. Ее называют *относительная погрешность*. Формулируем с учащимися определение.

Относительной погрешностью δ_a *приближенного значения а числа х называют отношение абсолютной погрешности* Δ_a *числа к модулю точного значения этого числа, и записывают* $\delta_a = \frac{\Delta_a}{|x|}$.

Иногда относительную погрешность выражают в процентах. Тогда $\delta_a = \frac{\Delta_a}{|x|} \cdot 100\%$. Она характеризует качество результата вычислений или измерения. Поскольку точное число обычно бывает неизвестным, то в приведенных формулах точное значение x заменяют на приближенное *а:* $\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|}$.В таком случае можно говорить и о *границе относительной погрешности* ε_a.

Границей относительной погрешности ε_a приближенного числа a называется положительное число ε_a такое, что $\delta_a \le \varepsilon_a$.

Так как $\Delta_a \le h_a$, то с учетом предыдущей формулы, границу относительной погрешности можно вычислить по формуле $\varepsilon_a = \dfrac{h_a}{|a|}$.Как и в случае абсолютной погрешности, тогда, когда это не вызывает недоразумений, предел относительной погрешности называют просто «относительная погрешность». Далее следует перейти с учениками к решению упражнений. Это могут быть упражнения следующего содержания:

Пример 3.Тане на день рождения мама в магазине купила торт весом 2 кг. Какова граница относительной погрешности приближенного значения 2 кг?

Решение. Поскольку абсолютная погрешность не указана, то она равна половине единицы последнего разряда числа, т.е. $h_a = 0{,}5$ кг. Тогда $\varepsilon_a = \dfrac{h_a}{|a|} = \dfrac{0{,}5}{2} = 0{,}25$ или $\varepsilon_a = 0{,}25 \cdot 100\ \% = 25\ \%$.

Пример 4. Фабрика «Рошен» за один день производит 120220 кг продукции. Какова граница относительной погрешности приближенного значения 120220 кг?

Решение. Абсолютная погрешность не указана, тогда $h_a = 0{,}5$ кг. Находим, что $\varepsilon_a = \dfrac{h_a}{|a|} = \dfrac{0{,}5}{120\,220} = 0{,}00000415...$ или $\varepsilon_a = 0{,}00000415 \cdot 100\,\% \approx 0{,}0005\,\%$.

Итак, можно сделать вывод о том, что качество измерения во втором упражнении было выше, чем в первом.

По записи приближенного значения числа можно распознавать его точность. Для того, чтобы правильно записывать приближенные данные, используют понятие *правильной* цифры. Цифра числа называется *правильной,* если абсолютная погрешность приближения не превышает половины единицы того разряда, в котором эта цифра записана.

Цифру, которая следует в записи числа после правильных, договорились называть *сомнительной.* Все цифры числа, следующие после сомнительной, называют *неправильными.*

Замечание 4. Часто во время преподавания математики учитель говорит ученикам, что в десятичной записи числа последние нули можно не записывать - они не существенны. Например, 2,500 = 2,5. Такую запись можно считать правильной только при условии, что число 2,500 является точным. Если же речь идет о приближенных величинах, то так считать нельзя. Например, запись 2,500 км означает, что расстояние измерено с точностью до 0,5 м, в то время, как запись 2,5 км означает измерения с точностью до 50 м.

Для того, чтобы определять правильные цифры числа, удобно записывать (разряд под разрядом) границу точности под приближенным значением:

1. а) $x = 6{,}48 \pm 0{,}3$

Правильные цифры

6,	4	8
0,	3	

Если в записи границы абсолютной погрешности первая цифра, отличная от нуля, не более 5, то правильными будут все цифры приближенного значения, стоящих слева от нее. Итак, правильной является цифра 6, сомнительной – 4, неправильной – 8.

1. б) $x = 67{,}216 \pm 0{,}06$

Правильные цифры

6	7,	2	1	6
	0,	0	6	

Если в записи границы абсолютной погрешности первая цифра, отличная от нуля, больше 5, то правильными будут все цифры приближенного значения, стоящие слева от нее, кроме последней. Итак, правильные цифры 6; 7, сомнительная – 2, неправильные – 1; 6.

Важным понятием в теории ПВ является понятие *значащей* цифры. Ученики должны знать, что *значащими* цифрами числа называются все правильные цифры этого числа, кроме нулей, стоящих слева от первой отличной от нуля цифры. Например, в записи числа $x = 0{,}010254$ значащими есть все цифры, начиная с единицы, стоящие справа от нее: 1, 0, 2, 5, 4. С другой стороны, если находить значащие цифры числа 1200, заданного с точностью до десятков, то последний ноль НЕ будет значащей цифрой, потому что эта цифра не является правильной, она сомнительная. Для того, чтобы не возникало недоразумений с определением значащих цифр числа, его записывают в стандартном виде. *Стандартным видом числа* называется его запись вида $a\cdot 10^n$, где $1\le a<10$, все цифры которого – правильные, *n*– целое число, которое называется порядком заданного числа. Итак, из предыдущего примера $1200 = 1{,}20\cdot 10^3$, где цифры 1, 2, 0 - значащие.

Замечание5. Если приближенное значение некоторой величины является целым числом и записано с нулями в конце, то последние нули считают незначащими цифрами.

Например, приближенные числа 250, 2500 содержат по две значащих цифры - нули считают незначащими. После такого сообщения следует решить несколько упражнений на закрепление изученного.

Пример 5. Определите значащие цифры числа 3540004, предварительно округлив его до: а) до десятков; б) до сотен; в) до тысяч.

Решение. а) $3\,540\,004 \approx 3\,540\,00\underline{0}$ – значащими будут первые шесть цифр 3, 5, 4, 0, 0, 0;

б) $3\,540\,004 \approx 3\,540\,0\underline{00}$ – значащими будут первые пять цифр 3, 5 , 4, 0, 0;

в) $3\,540\,004 \approx 3\,540\,\underline{000}$ – значащими будут первые четыре цифры 3, 5, 4, 0.

При решении задач возникает необходимость выполнять арифметические действия над приближенными значениями величин. Как известно, существует три метода выполнения таких действий с приближенными данными: метод границ (далее МГ); метод подсчета правильных цифр (далее МППЦ); метод границ погрешностей. В начале десятого класса учащихся следует ознакомить только с первыми двумя.

Рассмотрим подробнее, как должно происходить знакомство учащихся с МППЦ. Прежде всего необходимо довести до сведения учащихся два важных правила и разъяснить их суть.

Правило 1. *При сложении (вычитании) приближенных чисел, все цифры которых правильные, в сумме (разности) оставляют столько* ***правильных цифр****, сколько их содержит слагаемое с наименьшей точностью (т.е. слагаемое с наименьшим количеством десятичных знаков).*

Это правило следует закрепить решением тренировочных упражнений.

Пример 6. Вычислить: а) $x+y$; б) $x-y$, если, $x\approx 1769$, $y\approx 230$, в записи которых все цифры правильные.

Решение. а) Запишем числа *x* и *y* в стандартном виде: $x\approx 1{,}769\cdot 10^3$, $y\approx 2{,}30\cdot 10^2$. Тогда $x+y\approx 1769+230=1999=1{,}999\cdot 10^3$. В записи числа *y* меньше десятичных знаков, чем в записи *x*, поэтому в ответе оставляем 2 десятичных знака, округлив число 1,999 до сотых. Таким образом, $x+y\approx 2{,}00\cdot 10^3$.

Правило 2. *При умножении (делении) приближенных чисел в произведении (в частном) оставляют столько* ***значащих*** *цифр, сколько их содержит множитель с наименьшим количеством значащих цифр.*

Пример 7. Вычислите: а) $x\cdot y$; б) $x:y$, если $x\approx 2{,}345$, $y\approx 1{,}42$, в записи которых все цифры правильные.

Решение. а) $x \cdot y \approx 2{,}345 \cdot 1{,}42 = 3{,}3299$. Так как число x содержит 4 значащих цифры, а y – 3 значащих цифры, то в записи произведения остается три цифры. Итак, $x \cdot y \approx 3{,}33$.

Возведение в степень с натуральным показателем равносильно действию умножения, поэтому можно с учащимися сформулировать следующее правило.

Правило 3. *При возведении приближенных чисел в степень (а также при извлечении корня квадратного, корня кубического) в результате оставляют столько значащих цифр, сколько их содержит основа степени (подкоренное число).*

Названные правила нужно закрепить решением тренировочных упражнений.

Пример 8. Найдите значения выражений: а) $1{,}2^3$; б) $0{,}4^2$; в) $\sqrt{2{,}1}$, если заданные числа есть приближенными.

Решение. а) $1{,}2^3 = 1{,}728$. Так как у числа 1,2 – две значащие цифры, то $1{,}2^3 \approx 1{,}7$.
б) $0{,}4^2 = 0{,}14$. У числа 0,4 - одна значащая цифра, поэтому $0{,}4^2 \approx 0{,}1$.
в) $\sqrt{2{,}1} \approx 1{,}4491377$. Подкоренное число 2,1 состоит из двух значащих цифр, тогда $\sqrt{2{,}1} \approx 1{,}4$.

Замечание 6. Если все цифры исходных приближенных данных являются правильными, то в результате выполнения над ними действий по методу подсчета правильных цифр получается результат, последняя цифра которого может быть сомнительной.

Часто при решении задач важна точность полученного результата. Для этого нужно знать числовые характеристики приближенного значения ответа. В таких ситуациях следует применять другой метод ПВ– метод границ.

Знакомство учащихся с методом границ следует проводить на основании правил выполнения действий над неравенствами: сложения, умножения и производных от них – вычитания и деления. Поэтому перед изучением МГ целесообразно вспомнить с учащимися свойства числовых неравенств. Как и в предыдущем случае, знакомство с МГ следует начать с правил и разъяснить их суть.

Правило 4. *Нижняя граница суммы равна сумме нижних границ слагаемых; верхнияяграница суммы равна сумме верхних границ слагаемых.*

С помощью числовых неравенств правило может быть записано в виде схемы:

$$\begin{array}{c} НГ_x < x < ВГ_x \\ \downarrow \qquad\quad \downarrow \\ \underline{НГ_y < y < ВГ_y} \\ НГ_x + НГ_y < x + y < ВГ_x + ВГ_y . \end{array}$$

Закрепить применение на практике названное правило следует решением упражнений.

Пример 9. Оценить значение периметра прямоугольника, зная границы, в которых находятся длины его сторон выраженные в сантиметрах: $7{,}6 < x < 8{,}2$, $4{,}2 < y < 4{,}8$.

Решение. Применим правила выполнения действий над неравенствами:

$$\begin{array}{c} 7{,}6 < x < 8{,}2 \\ \underline{4{,}2 < y < 4{,}8} \\ 11{,}8 < x + y < 13{,}0 \\ 23{,}6 < 2(x + y) < 26{,}0 . \end{array}$$

Таким образом, $НГ_{(x+y)}$ = 23,6, а $ВГ_{(x+y)}$ = 26,0. Как видим, цифры верхней и нижней границ отличаются уже в разряде единиц. Поэтому разряд десятых не влияет на точность полученного результата: $НГ_{(x+y)}$ = 23, $ВГ_{(x+y)}$ = 26.

Замечание 7. Ученикам следует отметить, что во время выполнения действий над приближенными числами методом границ **нижняя граница всегда округляется с недостатком, а верхняя - с избытком.**

Находим приближенное значение периметра и границы абсолютной погрешности:

$$2(x+y)=\frac{26+23}{2}\pm\frac{26-23}{2},\ 2(x+y)=24{,}5\pm1{,}5.$$

Найденная граница абсолютной погрешности 1,5 означает, что в приближенном значении периметра 24,5 правильной является только первая цифра 2. Поэтому в ответе можно оставить только правильные цифры или еще одну запасную – сомнительную. Имеем: $2(x+y)=20\pm6$. Или, если оставить сомнительную цифру: $2(x+y)=25\pm2$. Тогда $P=20\pm6$ (см) или $P=25\pm2$ (см).

Замечание 8. Если приближенная величина округляется, то модуль погрешности округления прибавляется к пределу абсолютной погрешности.

Правило 5*. Нижняя граница разности равна разности нижней границы уменьшаемого и верхній границы вычитаемого; верхняя граница разности равна разности верхней границы уменьшаемого и нижній границы вычитаемого*.

С помощью числових неравенств правило может быть записано в виде схемы:

$$НГ_x < x < ВГ_x$$

$$\underline{НГ_y < y < ВГ_y}$$

$$НГ_x - ВГ_y < x - y < ВГ_x - НГ_y.$$

Применение этого правила также следует закрепить решением тренировочных упражнений.

Правило 6*. Нижняя граница произведения равна произведению нижних границ множителей, при условии, что они положительные; верхний предел произведения равен произведению верхних границ множителей, при условии, что они положительные.*

Правило 7. *Нижняя граница частного равна частному нижней границы делимого и верхній границы делителя, при условии, что они положительные; верхняя граница частного равна частному верхній границы делимого и нижній границы делителя, при условии, что они положительные.*

С помощью числовых неравенств эти правила могут быть записаны в виде схем:

$$НГ_x < x < ВГ_x \qquad\qquad НГ_x < x < ВГ_x$$

$$\underline{НГ_y < y < ВГ_y} \qquad\qquad \underline{НГ_y < y < ВГ_y}$$

$$НГ_x \cdot НГ_y < xy < ВГ_x \cdot ВГ_y. \qquad\qquad \frac{НГ_x}{ВГ_y} < \frac{x}{y} < \frac{ВГ_x}{НГ_y}.$$

Далее с учащимися следует решать упражнения на применение указанных правил.

Пример 10. Найти плотность вещества, если в результате измерений получили данные: масса вещества m = 148,0 ± 0,5 г, объем вещества V = 34,0 ± 0,5 см^3.

Решение. Плотность вещества находим по формуле: $\rho=\frac{m}{V}$:

$$147{,}5\ г < m < 148{,}5\ г,$$

$$\underline{33{,}5\,см^3 < V < 34{,}5\,см^3},$$

$$\frac{147{,}5}{34{,}5}\,г/см^3 < \frac{m}{V} < \frac{148{,}5}{33{,}5}\,г/см^3,$$

$$4{,}27536...\,г/см^3 < \frac{m}{V} < 4{,}43283...\,г/см^3.$$

Как видим, в нижней и верхней границе совпадает только первая цифра – 4, она является правильной. Проверим, будет ли правильной следующая за ней цифра: округляем нижнюю границу с недостачей, а верхнюю - с избытком. Имеем:

$$4{,}2\,г/см^3 < \frac{m}{V} < 4{,}5\,г/см^3,$$

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{4{,}5+4{,}2}{2} \pm \frac{4{,}5-4{,}2}{2}\,г/см^3,$$

$$\rho = 4{,}35 \pm 0{,}15\,г/см^3.$$

Граница абсолютной погрешности больше половины единицы разряда десятых, поэтому 3 – цифра сомнительная. Тогда $\rho = 4{,}4 \pm 0{,}2\,г/см^3$ или $\rho = 4 \pm 0{,}6\,г/см^3$.

Ответ. $\rho = 4{,}35 \pm 0{,}15\,г/см^3$ или $\rho = 4 \pm 0{,}6\,г/см^3$.

*Замечание 9.*В связи с применением метода границ возник вопрос: к какому разряду следует округлять границы? Как правило, округляют до того разряда, начиная с которого начинается различие в цифрах верхней и нижней границ.

Таким образом, в течение первых двенадцати уроков по алгебре и началам анализа в 10 классе учащиеся ознакомятся с элементами теории ПВ. Изучение методов ПВ позволит старшеклассникам применять их в дальнейшем при изучении следующих тем курса алгебры и начал анализа, геометрии, при решении прикладных задач, выполнения лабораторных работ по физике, химии.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Кліндухова В. М.** Вивчення наближених обчислень в основній школі: Дис. канд. пед. наук: 13.00.02. - К., 2008. – 316с.
2. **URL**: http://mon.gov.ua/ua/activity/education/56/692/educational_programs/1349869429/