MATTEX 2018,
CONFERENCE PROCEEDING, v. 1, pp. 273 - 284

MENTORING CRITICAL 3-DIMENSIONAL THINKING OF TALENTED 7-GRADE STUDENTS

YORDAN N. IVANOV, STANISLAV T. STEFANOV

ABSTRACT: *The article discusses several properties of human thinking. An opportunity to mentor critical 3-dimensional thinking is proposed and realized.*

KEYWORDS: *critical thinking; mentoring; education; 7-grade*

ВЪЗПИТАВАНЕ НА КРИТИЧНО ПРОСТРАНСТВЕНО МИСЛЕНЕ НА ИЗЯВЕНИ УЧЕНИЦИ ОТ 7. КЛАС

ЙОРДАН Н. ИВАНОВ, СТАНИСЛАВ Т. СТЕФАНОВ

АБСТРАКТ: *В статията са разгледани няколко свойства на мисленето. Реализирана е една възможност за възпитаване на критично пространствено мислене.*

КЛЮЧОВИ ДУМИ: *критично мислене; възпитание;7.клас.*

1 Въведение

Мисленето е най-сложният познавателен процес на човешката психика. В мисловните актове се осъществява преход между незнанието в знание, на неточното знание в точно, на неявното знание в явно. Мисленето изразява най-високата степен на активност на личността по отношение на света. За изходно начало на мислене считаме етапа на преобразуване на проблемна ситуация в задача. Тогава си даваме отчет, кое е неизвестното и кои са условията за намирането му.Това поражда и редица въпроси, за изясняването на които ще бъде насочен мисловният процес с неговите етапи: задача, осъзнаване на въпроса, формулиране на хипотеза, проверка на предположението, решение или опровергаване на мислено действие или ново решение.

Според съвременните психолози съществуват различни форми на мислене, а именно: **дивергентно мислене, конвергентно мислене, критично мислене, дедуктивно мислене, индуктивно мислене, аналитично мислене, интегративно мислене, творческо мислене, интерогативно мислене, системно мислене, продуктивно мислене, репродуктивно мислене, интуитивно мислене, реалистично мислене, аутистично мислене, магическо мислене и религиозно мислене.**

В процеса на обучение се развива предимно аналитичното, прогностичното, критичното и творческото мислене на обучаваните. **Аналитичното мислене** е свързано с умение безпогрешно да се откриват и идентифицират: понятия, факти, закономерности, идеи, правила и т. н.; проблемите и причините за възникването им; решенията им и последствията от това [17]. Уменията за **прогностично мислене** предполагат да се строят ефективни и устойчиви модели на идеи и концепции и да се намират информирани решения [7]. **Творческото мислене** пък се свързва с анализа и създаването, докато **критичното мислене** включва и самооценката [16].

Критичното мислене се приема за интелектуално организиран процес на: описание и разглеждане на твърдения или концепции; прилагане, анализ, синтез и оценка на информацията, събрана чрез наблюдения, опит или размисъл, даващи ясна насока за формулиране на изводи и предприемане на действия [8]. То е процес, водещ до разсъждение върху изказванията и подлагането под въпрос на посочените доказателства и направените оценки на фактите. Описва се като „мислене за мисленето“ [9].

Съгласно изследване извършено по метода Делфи на експертни оценки на специалисти от различни области на знанието се дава описание на критичното мислене, като съчетание от когнитивни и афективни качества на човешкия ум, включващо познавателни способности свързани с: 1) интерпретация; 2) анализ; 3) оценка; 4) заключение; 5) обяснение; 6) саморегулиране [10]. Разбира се уменията за критично мислене могат да бъдат групирани и по друг начин, в този смисъл тази класификация не е задължително да бъде единствено вярна, но тук трябва да спомена, че допълнително диференциране на съставните умения и отличаването им едно от друго не е нито необходимо, нито полезно. На практика способността за използване на едно ключово умение или под-умение може да предполага наличието и на другите. Тази систематизация е заложена в когнитивната таксономия на целите на Б. Блум [6].

Ефективното възпитаване в критично мислене зависи от установяването на добро взаимодействие в класната стая, най-често е резултат от осъзната съвместна дейност на учителя и учениците, което насърчава приемането на различни перспективи. Констатирано е, че учебните цели, стратегии и оценяване, които изискват по-високи нива на когнитивно мислене, оказват положително въздействие върху процеса на учене при учениците [15].

В съвременното общество се търсят и високо ценят специалистите, които създават **нови продукти**, което налага необходимостта от създаване, изследване и прилагане на нови методи и форми на възпитаване, с цел развитие на общи и специални математически умения у талантливите ученици. Необходимо е обучаваният да бъде включен в учебно – познавателния процес чрез дейностите решаване и съставяне на математически задачи, втората от които рядко се използва дори и в извънкласното обучение на състезатели по математика.

По думите на руския психолог В. Н. Пушкин : „Психическият процес, с помощта на който се решава проблем, избира се нова стратегия, открива се нещо ново, се нарича **продуктивно мислене** или, използвайки идващия още от Архимед термин, **евристична дейност**…. Науката, която изследва закономерностите в евристичната, творческата дейност на човека, може да бъде наречена **евристика**”[4]. За първи път този термин се среща в работите на Архимед, Сократ, Пап Александрийски и др.. Именно на тях дължим оформянето на евристиката като отделна наука, имаща за основна задача да изследва и развива **творческия процес.** Евристиката е наука, която: изучава как се правят открития; установява нови истини; решава задачи с помощта на знания, догадки и съобразителност; изучава продуктивната умствена дейност, водеща до оригинални резултати. Целта на евристиката е да изследва правилата и методите, които водят до откритията и изобретенията. За да има открития и изобретения обаче, трябва обучаваният да се научи да мисли продуктивно, да мисли творчески.

Проблемът за продуктивното и творческото мислене се разглежда и от трима най-изявени представители на **Гещалт-психологията**: Макс Вертхаймер, Волфганг Кьолер и Курт Кофка. Главният обяснителен принцип на тази психология, която е основа и на едноименната теорията за обучението, е гещалтът (от нем. „**гещалт**" означава образ, структура или цялостна форма) и цялостното обединение на отделните елементи при разглеждането на всеки протичащ в ума на човек психически процес. В този аспект гещалт-психолозите считат, че в процеса на учене участват не само връзки между отделни стимули и реакции на психиката, но и цялата психофизиологическа структура на човек, стимулирана от действието на вътрешни фактори, които наричат - явлението **„инсайт“**. Инсайтът е механизъм за творческо мислене с интуитивна природа, с помощта на който, запълването на липсващата част на гещалта, или построяването на нов гещалт, протичат спонтанно, т.е. инсайт може да е: хрумване, досещане, озарение, внезапно нахлуване на идея или установяване на връзка. Веднъж усвоен гещалта (чрез инсайт), практиката и репетициите само го усъвършенстват [19]. Според гещалтпсихолозите и продуктивното и творческото мислене е решаване на проблем чрез инсайт, което на езика на математиката означава, че решаването на една задача е творчество, в което съществена роля се пада на досещането, имащо изцяло случаен характер.

Традиционните методи за обучение по математика в училище често пречат на обучаваните да видят нещата по нов, различен начин, което често прави достигането до отговора на задача трудно и дори невъзможно. Възгледите на гещалт-психолозите биха могли да намерят приложение в обучението по математика, като към практическата подготовка се прибави повече творческа работа, която да развие креативните способности на учениците.

Креативно и нестандартно мислене у обучаваните можем да възпитаваме и като извършваме изследователска дейност в учебния процес. **Изследователският подход** в обучението създава възможности за: размисъл на абстрактно ниво; преживяване на чувството да се работи по колективна задача; размишления относно необходимите променящи се роли, за да могат учениците да споделят своя опит; Той е конструктивистки метод, който: използва учебния експеримент и го комбинира с групова работа, търсене и анализ на информация, формулиране на изследователски въпрос; позволява на учениците да контролират собственото си учене. Изследователският подход (в първия си аспект) е предизвикателен за учащите и ги мотивира да търсят връзките между фактите и закономерностите, като в същото време развиват ключови умения (като **критичност на мисленето**).

Този процес обикновено липсва в класните стаи, защото учителят в повечето случаи съобщава на учениците какво трябва да наблюдават, дава им въпросите наготово, демонстрира методите, които трябва да използват. Учениците е необходимо просто да следват указанията на своя учител.

Приложението на изследователският подход в обучението по математика и най-вече в часовете по **геометрия** би благоприятствало установяването на: нови леми, теореми или други твърдения; нови забележителни елементи, фигури или тела; важни техни свойства или пък свойства на известни вече такива; други значими за развитието на науката твърдения. Най-важното обаче е, че този подход допринася за развиване на продуктивното и **откривателско мислене** на подрастващите.

Историческата роля на геометрията за развитието на математиката като цяло ѝ определя водещо място в математическото образование. Учениците, които определят геометрията като един от любимите си предмети, обаче са твърде малко. Обяснението за това се крие в: прекалената консервативност на методиката на преподаване по геометрия; специфичните особености на **евклидовата геометрия** и трудността в усвояването на съответните геометрични твърдения и теореми; придобитите знания по геометрия, почти не носят пряка практическа полза.

Това е така, но трябва да се има впредвид, че косвените ползи от геометрията са огромни. Геометричните знания са важен фактор за развитие на: логическо мислене, наблюдателност, **пространствени представи**, **пространствено мислене и въображение**, естетическо възпитание на учениците.

Вторият аспект на изследователския подход се състои в изучаването на опита и резултатите от обучението на вече доказали се таланти в областта на математиката и изследването на възможностите за преноса на този опит в съвременното училище.

На този аспект на изследователския подход не се спираме в тази статия.

Способността да се мисли в образи, да се възприема видимия свят достатъчно точно и да се възпроизвежда (или видоизменя) мислено или на хартия, наречена накратко **пространствена интелигентност**, се определя като една от седемте различни вида интелигентности [11]. Развитието на **пространственото въображение** на учениците е една от основните цели на обучението по геометрия и изучаването на **стереометрия** е съществено за реализирането й.

Въображението в психологията се дели на: пасивно, активно или творческо. За нас представлява интерес **творческото въображение** – съзнателното създаване на нови образи, които са необходими в дейността. Като механизъм за балансиране на психиката, въображението има и немаловажната функция за стимулиране на човешкото творчество.

Установено е, че у учениците, изучаващи стереометрия трябва да се изградят и да се развият и **визуализационни умения** за да могат да се справят с мислените изображения в конкретна стереометрична задача. Приема се, че **визуализацията** е основен фактор в обучението по стереометрия [13].

Визуализацията според Gutiérrez и Jaime, а също и според Presmeg е интеграция на четири основни елемента: 1) мислени образи; 2) външни представяния; 3) процеси на визуализация; 4) визуализационни способности [14] [18].

1) Под мислен образ следва да се разбира когнитивно представяне на математическо понятие посредством пространствени елементи.

2) Построяването на различни тримерни обекти, наблюдаването им от различни гледни точки, както и последващо повтаряне на този процес помага на учениците да получат външни представяния - да сътворят „картина в очите на ума си"

3) Процесът на визуализация според Presmeg е умствено или физическо действие, в което участват мислени образи.

4) Визуализационните способности включват: мислена ротация, възприемане на различни пространствени положения и отношения, визуално разграничаване [5].

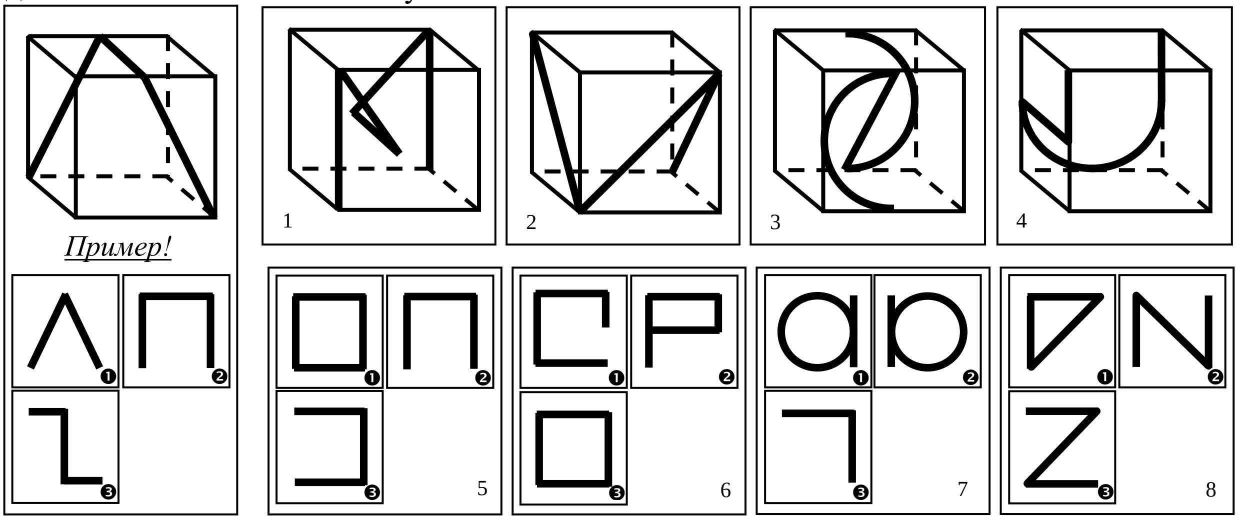
Всеки може да визуализира. Спомените, представите, мечтите са вид визуализация. Но **творческата визуализация** се различава от мечтата! Визуализация е създаването на мисловен образ на реалността, която искаме да се реализира и с помощта на **въображението** да „видим" тази реалност.

Преди петнадесетина години на Математическия конкурс „Академик Кирил Попов", който се провежда всяка година през месец май в гр. Шумен беше дадена за осми клас следната задача (черт. 1):

ЗАДАЧА ЗА СТЪКЛОЯДА

Стъклоядът издълбава по повърхността или във вътрешността на прозрачен стъклен куб непрекъснат черен тунел, който няма двойни места и не се самопресича. В трите квадрата вляво (погледнете в долната част на примера!) е начертано какво се вижда (проекциите), когато погледнем куба отпред (номер 1), отстрани отдясно (номер 2) и отгоре (номер 3).

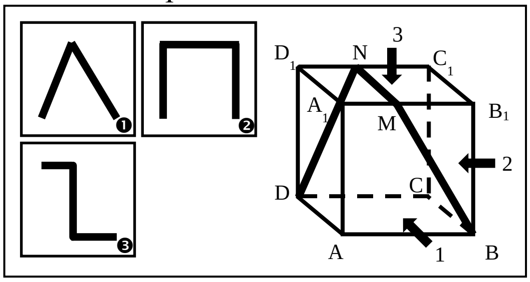
В първите 4 случая вие трябва да начертаете съответните проекции, а в останалите 4 - да възстановите линията на тунела.



Черт.1

Тази задача се оказа много трудна и беше решена от двама-трима ученика.Още тогава се замислихме за причините за това явление. През 2016 г. отново дадохме тази задача на този конкурс, но за 7.клас, като добавихме в условието следното изречение: Само в случаите 7 и 8 пътят на стъклояда е начертан като кубът е гледан отпред (номер 1), отстрани отляво (номер 2) и отгоре (номер 3).

Отново 2-3 ученика решиха почти всички случаи на задачата, но никой не можа да реши случая 7. Отново се убедихме, че възпитаването на критично мислене изисква специално внимание и добре организирана съвместна дейност на учителя и учениците. През 2017 г. проведохме 3 занятия с изявени ученици от 7. клас. Целта на първото занятие беше да наблегнем предимно върху развиване на пространственото въображение. От прозрачна пластмаса беше изработен куб и на него начертан с черна линия път на „стъклояда“ (черт. 2). Поставяме изследователската задача:



Черт. 2

Стъклояд издълбава по повърхността или във вътрешността на прозрачен стъклен куб непрекъснат черен тунел, който няма двойни места и не се самопресича.

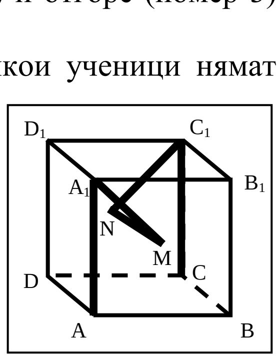
Вярно ли е, че в трите квадрата вляво е начертано какво се вижда (проекциите), когато погледнем куба отпред (номер 1), отстрани отдясно (номер 2) и отгоре (номер 3) (черт. 2)?

След като участниците погледнат през изработения модел (някои ученици нямат нужда от това), те се убеждават, че чертежите са верни.

Поставяме темата на първото занятие:

ТЕМА 1: Ученици, в това учебно занятие ви предлагаме за решаване задачи, свързани с „мислено“ проектиране на различни по вид геометрични фигури свързани с куба, върху негови стени.

Задача 1.1. От вас се иска да начертаете какво се вижда (съответните проекции), като погледнете куба: а) отпред (номер 1);



Черт. 3

б) отстрани отдясно (номер 2); в) отгоре (номер 3). Точките *M* и *N* са центрове съответно на стените ABB_1A_1 и DCC_1D_1 (черт. 3).
Ще опишем схематично въпросите и примерните отговори на организираната беседа:

Учител: За да си представим какво се вижда, гледайки куба отпред, върху кои стени ще проектираме „мислено“ получената фигура?

Ученик: В този пример трябва „мислено“ да проектираме начупената линия върху стената ABB_1A_1.

Учител: За да си представим търсеният образ, нека първо „мислено“ да разделим начупената линия на отделни отсечки - AA_1, A_1M, *MN*, NC_1 и C_1C. Ще проектираме „мислено“ и последователно всяка една от тези отсечки, като анализираме полученият резултат. На кои отсечки ви е трудно да си представите образите?

Ученик: На отсечките: *MN*, NC_1 и C_1C, защото се вижда, че образите на другите две отсечки - AA_1 и A_1M са самите тези отсечки.

Учител: Нека проектираме „мислено“ отсечката *NM* върху стената ABB_1A_1. Вярно ли е, че нейната проекция ще е точката *M* ?

Ученик: Ако мислено спуснем перпендикуляр от т. *N* към стената ABB_1A_1, петата на този перпендикуляр върху стената ще съвпадне с точката *M*.

Учител: Сега следва да направим „мислена“ проекция на отсечката NC_1 върху стената ABB_1A_1. Кои точки ще са проекциите на нейните краища?

Ученик: Това ще са точките *M* и B_1.

Учител: Последното означава, че MB_1 ще е проекцията на NC_1 върху разглежданата стена. Остана да намерим и проекцията на отсечката (околния ръб) C_1C. Проектираме „мислено“ нейните краища върху стената ABB_1A_1. Какъв ще е резултатът от проектирането?

Ученик: Точката C_1 ще се изобрази в B_1, а т.*C* - в *B*.

Учител: Тогава можем да заключим, че търсеният образ на отсечката (околния ръб) C_1C ще е отсечката (околния ръб) B_1B.

Учител: При обсъждане на решенията по-нататък, вместо „мислено“ проектиране за краткост ще използваме само думата проектиране. Кои **свойства на проектирането** използвахме досега?

Ученик: Използвахме, че **проекцията на точка върху равнина е точка, проекцията на отсечка перпендикулярна на равнина върху самата равнина е също точка, а проекцията на отсечка успоредна на равнина върху самата равнина е отсечка равна на проектираната**.

Учител: Как намирахме проекцията на отсечка?

Ученик: Като проектираме краищата й.

Учител: Сега да проектираме пътя на стъклояда върху стената BCC_1B_1. За целта отново ще го разделим на съставящите го отсечки и ще проектираме всяка една от тях поотделно. Съобразяваме, че образа на C_1C ще е самата отсечка, а образа на A_1A ще е отсечката B_1B. Как ще изглежда обаче образа на отсечката A_1M ?

Ученик: Проектираме нейните краища върху стената BCC_1B_1. Точка A_1 ще се изобрази в B_1, а проекцията на т. M ще е средата на отсечката B_1B.

Учител: Това означава, че образа на A_1M ще е отсечка, която е част от B_1B. Кое е проекция на отсечките AA_1 и A_1M, ако погледнем куба отстрани отдясно?

Ученик: Двете проекции ще съвпаднат в отсечката B_1B.

Учител: А как ще изглежда образът на отсечката C_1N?

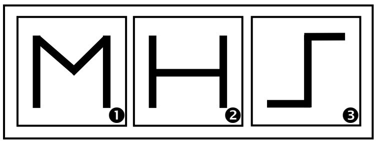
Ученик: Образът на C_1N ще е отсечка, част от C_1C, на която единия край ще съвпада с т. C_1, а другия ще е средата на отсечката C_1C.

Учител: Това означава, че гледайки куба отстрани отдясно вместо отсечките CC_1 и C_1N ще виждаме отсечката C_1C. Остана да съобразим кой ще е образът на отсечката MN!

Ученик: Той ще е отсечка равна на ръба на куба, с краища средите на отсечките BB_1 и CC_1.

Учител: Сега да проектираме пътя на стъклояда върху горната основа $A_1B_1C_1D_1$. Искам да чуя вашите разсъждения, проектирайки последователно всяка от съставящите пътя отсечки, използвайки решените до сега два случая.

Ученик: Проекциите на отсечките AA_1 и CC_1 ще са точки - съответно точките A_1 и C_1. Проекцията на отсечката MN ще е отсечка равна на ръба на куба, с краища средите на отсечките A_1B_1 и C_1D_1. Проекцията на отсечката A_1M ще е отсечка, с краища A_1 и средата на отсечката A_1B_1. Проекцията на отсечката C_1N ще е отсечка, с краища т. C_1 и средата на отсечката C_1D_1.

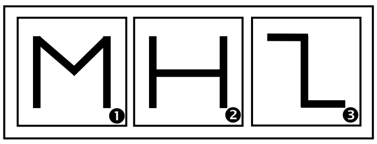


Черт. 4

Учител: Задачата вече е решена, можем да нанесем намерените проекции (черт. 4).

След като вече сме решили и анализирали първата задача от темата разглеждаме следваща - ***Задача 1.2***, която е със сходно, но леко променено условие, т.е. от учениците се иска за същия куб от ***Задача 1.1*** (черт. 3) да начертаят какво ще се вижда, гледайки го обаче: а) отзад (номер 1); б) отстрани отляво (номер 2); в) отдолу (номер 3).

Решаваме така поставена задачата по същия начин, както й първата, разсъждавайки върху решението, анализирайки го и формулирайки изводи, където е възможно (черт. 5).



Черт. 5

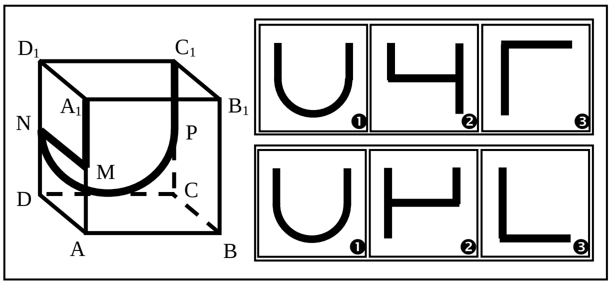
Сега **сравняваме** решенията на задачите, съобразявайки се с разликите на поставените в тях условия и **анализираме** получените в двете задачи **крайни резултати**.

Учител: Погледнете получените в квадрати с номер 1 (черт. 4, и черт. 5) проекции за двете задачи! **Откривате ли нещо общо** между тях**?**

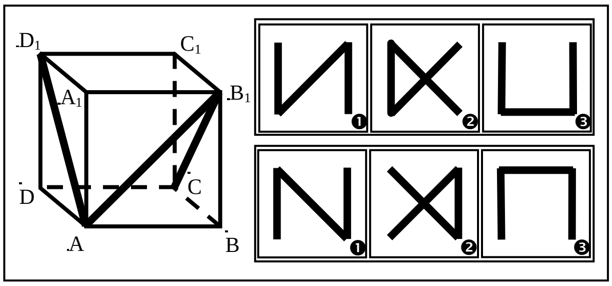
Ученик: Съответните проекции са огледални образи една на друга!

Учител: Да! Но не винаги е така! Обмислете този въпрос при решаването на задачите за домашна работа.

За домашна работа предлагаме две двойки задачи аналогични на разгледаните, без техните решения! Виж чертежи 6 и 7.



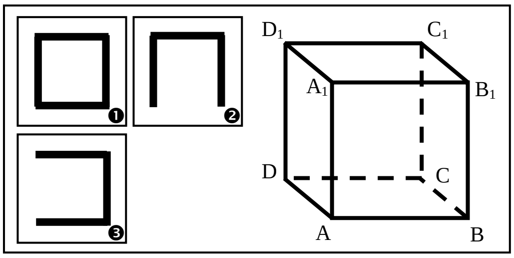
Черт. 6



Черт. 7

<u>ТЕМА 2</u> : Във второто учебно занятие предлагаме за решаване задачи, свързани с възстановяване образа на различни по вид геометрични фигури, по предварително зададени техни проекции в (перпендикулярно или успоредно) разположени една спрямо друга равнини.

Задача 2.1. От вас се иска да възстановите пътя на стъклояда. В квадратите вляво е начертано какво е видяно, при условие, че кубът е гледан: отпред (номер 1), отстрани отдясно (номер 2) и отгоре (номер 3) (черт. 8).



Черт. 8

Прилагаме обучаваща беседа с учениците по нейното решение:

Учител: При решаването на тази задача ще използваме **метода на изключването**, който често помага за намиране на решение. За да виждаме по този начин линията на тунела, гледайки куба отпред, то откъде може да минава той?

Ученик: Пътя със сигурност не може да минава през вътрешността на куба, или през вътрешността на стените ABB_1A_1 и DCC_1D_1.

Учител: Вярно е! Нека сега съобразим, гледайки куба отстрани отдясно, то кои от допустимите до момента **вероятни пътища ще отпаднат**?

Ученик: Линията на тунела не трябва да минава по ръбовете AD и BC, или да свързва двойка ръбове на основата $ABCD$ в тази си част от пътя. Тя също не може да минава през вътрешността на стените DAA_1D_1 и BCC_1B_1.

Учител: Добре! Отпаднаха доста от първоначално-възможните пътища. Нека поставим и следващото „изискване“ към пътя - да го виждаме по указания начин, гледайки куба отгоре. Кои още от оставащите към момента вероятни негови пътища ще отпаднат?

Ученик: Линията на тунела не трябва да минава и по ръбовете A_1D_1 и AD, както и да е отсечка от вътрешността на стените $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$.

Учител: Да уточним получените до момента резултати. Кои са възможните пътища на стъклояда?

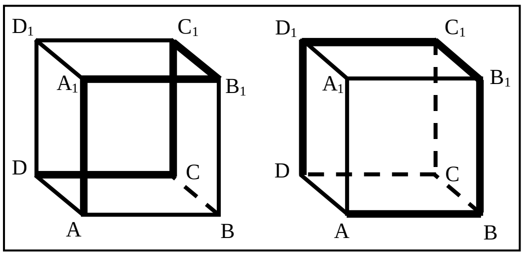
Ученик: Само по ръбовете на куба, без три от тях – AD, A_1D_1 и BC.

Учител: Нека припомним и последното условие, което трябва да изпълнява пътят на стъклояда - да няма двойни и самопресичащи се места. Кои възможни пътища за него останаха?

Ученик: Пътищата са два:

$AA_1 \to A_1B_1 \to B_1C_1 \to C_1C \to CD$ и

$AB \to BB_1 \to B_1C_1 \to C_1D_1 \to D_1D$.

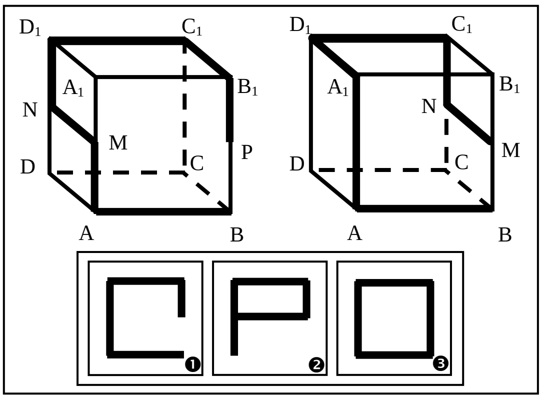


Черт. 9

Учител: Вярно е! Решенията наистина **са две**. Изобразяваме ги съответно на два куба (черт. 9).

След като вече сме решили и обсъдили първата задача от второто занятие разглеждаме следващата - ***Задача 2.2***, която е с подобна сложност, т.е. в нея отново се иска да се възстанови линията на тунел по зададени проекции на куба: отпред (номер 1), отстрани отдясно (номер 2) и отгоре (номер 3). Задачата решаваме по същия начин - използвайки метода на изключването, и използвайки елементи на логически разсъждения.

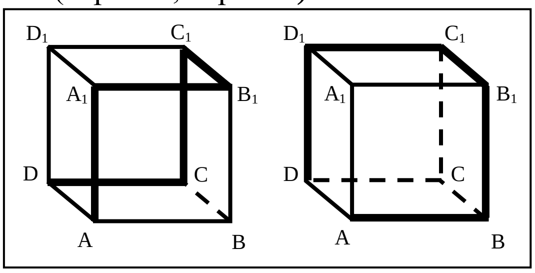
Изобразяваме получените резултати на два куба, т.к. и тази задача се оказва с две на брой възможни решения (черт. 10).



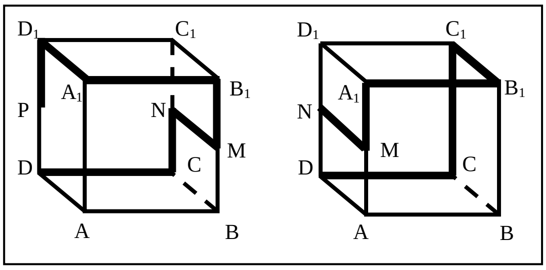
Черт. 10

На следващите предвидени в тази тема задачи: ***Задача 2.3*** и ***Задача 2.4***, условията са сходни (като на: ***Задача 2.1*** и ***Задача 2.2***), но леко променени, т.е. от учениците се иска да възстановят линия на тунел по зададени проекции на куба: отзад (номер 1), отстрани отляво (номер 2) и отдолу (номер 3). Проекциите, с които разполагат са абсолютно същите, т.е. взети са от условията на предходните две задачи.

Учениците **решават самостоятелно**, така поставени задачите със същите методи, които вече са усвоили при съвместното ни решаване на първите две задачи. Изобразяват получените резултати на четири куба, т.к. и двете задачи се оказват с по две на брой решения (черт. 11, черт. 12).



Черт. 11



Черт. 12

Сега сравняваме двойните решения на двойките задачи ((***Задача 2.1*** - ***Задача 2.3***) и (***Задача 2.2*** - ***Задача 2.4***)), съобразявайки се с разликите на поставените в тях условия и анализираме получените в двете двойки задачи крайни резултати.

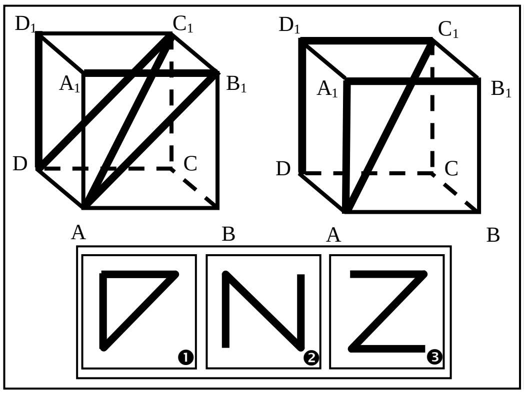
Учител: Погледнете получените фигури в двата куба от ***Задача 2.1*** (черт. 9) и съответно в двата куба от ***Задача 2.3*** (черт.11). Откривате ли нещо общо?

Ученик: Да, имаме две двойки огледални фигури.

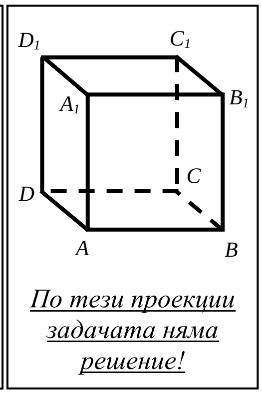
На следващите предвидени за решаване от тази тема задачи: ***Задача 2.5*** и ***Задача 2.6***, внасяме още промени в условията, в сравнение с вече решаваните дотук. От учениците се иска да възстановят линия на тунел по зададени проекции на куба: в ***Задача 2.5*** – съответно - отпред (номер 1), отстрани отляво (номер 2) и отгоре (номер 3); в ***Задача 2.6*** – съответно - отзад (номер 1), отстрани отдясно (номер 2) и отдолу (номер 3). Проекциите с които разполагат в двете задачи са напълно еднакви.

Учениците решават самостоятелно, така поставени задачите със същите методи, които вече са усвоили при решаване на предходните в тази тема задачи.

Получените от тях резултати са: ***Задача 2.5*** се оказва, че има две решения, а ***Задача 2.6*** – че няма решение (черт. 13, черт. 14)



Черт. 13



Черт. 14

Всички нужни за обучаване на учениците по тази тема материали са изложени. Правим анализ на придобитите нови знания:

Учител: Искам да формулирате направените от вас нови изводи, от решените днес задачи!

Ученик: Научихме, че различни геометрични фигури могат да имат еднакви, спрямо една и съща равнина проекции. Различни геометрични фигури могат да имат еднакви, спрямо различни равнини проекции. Еднакви геометрични фигури могат да имат еднакви, спрямо различни равнини проекции.

Учител: А колко на брой проекции са ви нужни, за да възстановите образа на разположена в пространството геометрична фигура и защо?

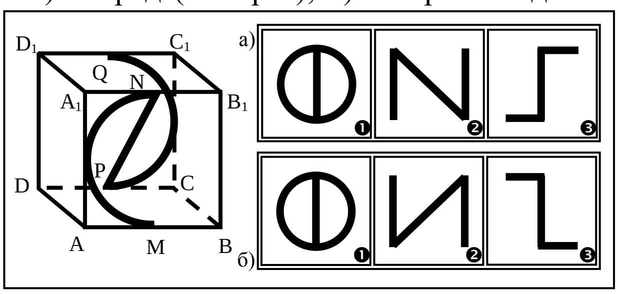
Ученик: Най-малко три, т.к. пространството в което работим е тримерно.

<u>ТЕМА 3</u> : В третото учебно занятие на учениците се предоставя възможност сами да съставят задачи, свързани с проектиране на различни по вид геометрични фигури в (перпендикулярно или успоредно) разположени една спрямо друга равнини, или пък въстановяване на образа им по предварително зададени техни проекции.

Прилагаме **съставени от учениците задачи**, с приложени към тях решения:

Задача 3.1. От вас се иска да начертаете в квадратите вдясно какво се вижда (съответните проекции), като погледнете куба: а) отпред (номер 1); б) отстрани отдясно (номер 2); в) отгоре (номер 3) (Предполага се, че: M, N, P и Q са среди на съответните ръбове, а MN и PQ са полуокръжности) (черт. 15 - а)).

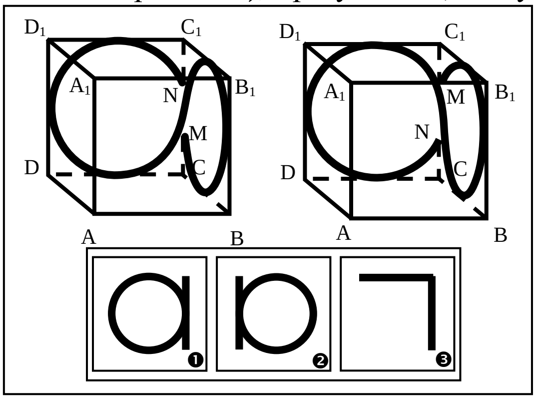
Задача 3.2. За същия куб (от задача 3.1) начертайте какво се вижда, ако го наблюдавате: а) отзад (номер 1); б) отстрани отляво (номер 2); в) отдолу (номер 3) (черт. 15 - б)).



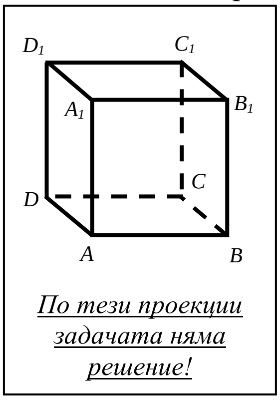
Черт. 15

Задача 3.3. От вас се иска да възстановите линията на тунела. В квадратите отдолу е начертано какво е видяно (съответните проекции), при условие, че кубът е гледан: отпред (номер 1), отстрани отляво (номер 2) и отгоре (номер 3) (черт. 16).

Задача 3.4. По същите проекции (от задача 3.3) възстановете линията на тунела, при условие, че те показват какво е видяно, при наблюдавания на куба: отзад (номер 1), отстрани отдясно (номер 2) и отдолу (номер 3) (черт. 17).



Черт. 16



Черт. 17

Задачи 3.3 и 3.4 са важни за възпитаване на критично мислене, защото ако изобразените на черт. 16 окръжности са правилни (а не някакви криви), то задачите нямат решение – ще има самопресичане на пътя! Цялото трето занятие с учениците следва да се фокусира върху критичността на математическото мислене. Интересна е беседата и по първоначалната формулировка на задачата – **ако стъклоядът наистина издълбава и по стените на куба черен тунел (а не пълзи по тях), то колко от вече разгледаните задачи имат (нямат) решение?**

Разработените от нас три занятия са полезни за изявените ученици от 7. клас, тъй като задълбочават получените от тях стереометрични знания в 6. клас и възпитават критично пространствено мислене.

ЛИТЕРАТУРА:

[1] Георгиева, М., Гроздев, С..Морфодинамиката за развитието на ноосферния интелект, София (2015).

[2] Иванов,Й.Н. Развитие продуктивного мышления учащихся при обучении геометрии в 6-7 классах (на материале болгарской основной школы), Дисертация, КГПИ, Киев (1990), 246.

[3] Ненков, В.Н. Формиране на изследователски умения по математика с помощта на информационни технологии, Дисертация, София (2010).

[4] Пушкин, В. Н. Евристика – наука о творческом мышлении. Издателство политической литературы, Москва (1967), 4-5.

[5] Bishop, A. J. Spatial abilities and mathematics education: A review, *Educational Studies in Mathematics*, 11(3) (1980), 257-269.

[6] Bloom, B. S. (Ed.), Engelhart, M. D., Furst, E. J., Hill, W. H., &Krathwohl, D. R. Taxonomy of educational objectives: The classification of educational goals. Handbook 1: Cognitive domain. New York: David McKay (1956).

[7] Chaffee, J. Thinking Critically, Cengage Learning, B, (2012).

[8] Cottrell, S. Critical Thinking Skills. Developing Effective Analysis and Argument, N. Y. (2005).

[9] Dunn, Dana S., Halonen, Jane S., Smith, Randolph A. Teaching Critical Thinking in Psychology. Blackwell Publishing Ltd, P., (2008).

[10] Facione, P. A. Critical Thinking: A Statement of Expert Consensus for Purposes of Educational Assessment and Instruction. California Academic Press, 217 LaCruzAve, Millbrae (1990).

[11] Gardner, H. Frames of Mind, New York: Basic Books, (1993).

[12] Grozdev, S. For High Achievments in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice). Sofia: ADE (2007).

[13] Gutiérrez, A. Vizualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework, Puig, L. and Guttierez, A. (eds.); *Proceedings of the 20th conference of the international group for the psychology of mathematics education*, Valencia: Universidad de Valencia (1996), 1, 3-19.

[14] Gutiérrez, A., and Jaime, A. On the assessment of the Van Hiele levels of reasoning, *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 20, (1998), 27-46.

[15] Judge, B., P. Jones, E. McCreery, Critical Thinking Skills for Education Students, (2009).

[16] Luk, A. H. Mishlenie I tvorchestva. M. (1976).

[17] Mikeshena, L. A. Evoluciya. Mishlenie. Soznanie. (Kognitivni podhodi epistemologiya), M. (2000).

[18] Presmeg, N. Visualization in high school mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 6(3) (1986), 42-46.

[19] www.referati.org/produkivno-i-tvorchesko-mislene-geshtalt-psihologiq-/51373/ref/p2./ (последно влизане на дата 06. 08. 2018г.).

Йордан Николов Иванов
ШУ „Е. К. Преславски“, хон.доцент
E-mail:yordan_5@abv.bg

Станислав Тошков Стефанов
ТУ - София, асистент
E-mail: stanislav.toshkov@abv.bg