Годишник на Шуменски университет „Епископ Константин Преславски“
Факултет по математика и информатика, том XIX C, 2018, стр. 27 - 36

EXTREMAL PROPERTIES OF TWO NOTABLE POINTS IN CONVEX QUADRILATERAL

VESELIN N. NENKOV, STANISLAV T. STEFANOV

ABSTRACT: *In the paper some special convex quadrilaterals are considered, where remarkable points reach extreme properties.*

KEYWORDS: *convex quadrilateral, circumcircle, area, epicenter, pseudocentre*

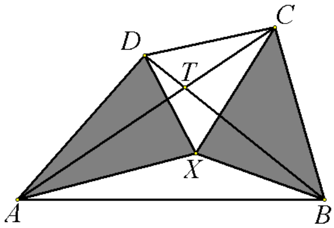
ЕКСТРЕМАЛНИ СВОЙСТВА НА ДВЕ ЗАБЕЛЕЖИТЕЛНИ ТОЧКИ В ИЗПЪКНАЛ ЧЕТИРИЪГЪЛНИК

ВЕСЕЛИН Н. НЕНКОВ, СТАНИСЛАВ Т. СТЕФАНОВ

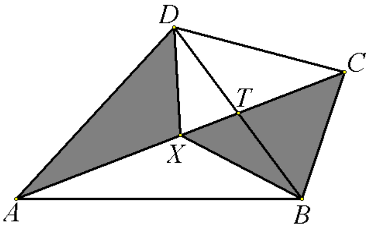
АБСТРАКТ: *Разгледани са специални изпъкнали четириъгълници, в които забележителни точки достигат екстремални свойства.*

Въведение

В редица публикации са описани свойства на различни забележителни точки в изпъкнал четириъгълник (вж. [1] – [6]). Тук ще разгледаме някои екстремални свойства на две от тях. Първата – *епицентърът* – е разгледана в [3]. Епицентър на четириъгълника $ABCD$ наричаме точката E, за която са изпълнени равенствата $S_{ABE} = S_{CDE}$ и $S_{ADE} = S_{BCE}$ (Фиг. 1). В [3] е изяснено, че четириъгълник, в който единият диагонал разполовява другия, за епицентъра E са изпълнени по-силните равенства $S_{ABE} = S_{BCE} = S_{CDE} = S_{DAE}$. Обратно, лесно се доказва, че за епицентъра тези равенства са изпълнени само в четириъгълник, в който единият диагонал разполовява другия (Фиг. 2.).



Фиг. 1

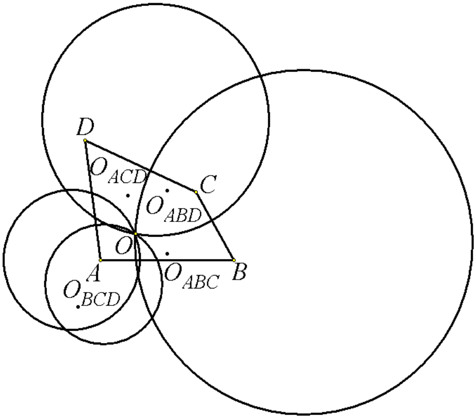


Фиг. 2

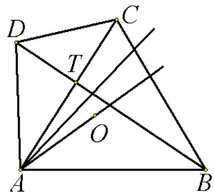
Втората точка – *псевдоцентърът* – е разгледана в [1]. Псевдоцентър на четириъгълник $ABCD$ се нарича точката O, за която са изпълнени равенствата

$$AO.R_{BCD} = BO.R_{CDA} = CO.R_{DAB} = DO.R_{ABC},$$

където R_{BCD}, R_{CDA}, R_{DAB} и R_{ABC} са радиусите на описаните окръжности съответно около триъгълниците BCD, CDA, DAB и ABC (Фиг.3) (Окръжностите на фиг. 3 са Аполониевите окръжности на отсечките AB, BC, CD и DA, определени при съответните отношения на радиусите на описаните окръжности). В [5] е показано, че в четириъгълник с перпендикулярни диагонали псевдоцентърът O и пресечната точка на диагоналите T лежат на изогонални прави спрямо всеки от ъглите му (две прави в даден ъгъл се наричат изогонални спрямо него, ако образуват равни ъгли с ъглополовящата му, а следователно и с раменете му (Фиг. 4)).



Фиг. 3



Фиг. 4

Екстремални свойства на епицентъра и псевдоцентъра в изпъкнал четириъгълник

Първо ще докажем следното екстремално свойство на епицентъра. За целта преди това ще разгледаме едно помощно твърдение, което се изразява със следната

Лема 1. *Ако X е вътрешна точка за изпъкнал четириъгълник $ABCD$ с лице S, то е изпълнено неравенството*

$S_{ABX}.S_{BCX}.S_{CDX}.S_{DAX} \le \left(\frac{S}{4}\right)^4$*, където* S_{ABX}, S_{BCX}, S_{CDX} *и* S_{DAX} *са лицата съответно на триъгълниците* ABX, BCX, CDX *и* DAX.

Доказателство. Тъй като точката X е вътрешна за $ABCD$, то е изпълнено равенството $S_{ABX}+S_{BCX}+S_{CDX}+S_{DAX}=S$. От това равенство и неравенството между средното аритметично и средното геометрично следва желаното неравенство.

Равенството в лемата се достига точно когато $S_{ABX} = S_{BCX} = S_{CDX} = S_{DAX} = \frac{S}{4}$. Следователно произведението $S_{ABX}.S_{BCX}.S_{CDX}.S_{DAX}$ приема най-голямата си стойност $\left(\frac{S}{4}\right)^4$ тогава и само тогава, когато $S_{ABX} = S_{BCX} = S_{CDX} = S_{DAX} = \frac{S}{4}$.

Тези равенства, както беше споменато в началото, показват, че е изпълнена следващата теорема, която изяснява какъв е четириъгълникът $ABCD$ и коя е точката X в случаите, в които тя съществува.

Теорема 1. *Ако $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник, който притежава вътрешна точка X, за която произведението от лицата на триъгълниците ABX, BCX, CDX и DAX е най-голямо, то единият диагонал на $ABCD$ разполовява другия, а точката X е епицентърът на $ABCD$.*

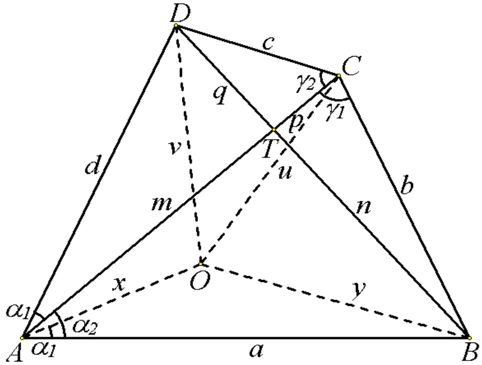
Сега ще разгледаме едно екстремално свойство на псевдоцентъра в изпъкнал четириъгълник с перпендикулярни диагонали. Предварително ще докажем следната

Лема 2. *Диагоналите на изпъкнал четириъгълник $ABCD$ се пресичат в точка T, като $AT = m$, $BT = n$, $CT = p$ и $DT = q$. Ако диагоналите на $ABCD$ са перпендикулярни, а разстоянията от псевдоцентъра O на $ABCD$ до върховете A, B, C и D са съответно x, y, u и v, то са изпълнени равенствата:*

$$(1)\qquad x=\frac{p\sqrt{(m^2+n^2)(m^2+q^2)}}{mp+nq},\quad y=\frac{q\sqrt{(m^2+n^2)(n^2+p^2)}}{mp+nq},$$

$$u=\frac{m\sqrt{(n^2+p^2)(p^2+q^2)}}{mp+nq},\quad v=\frac{n\sqrt{(p^2+q^2)(m^2+q^2)}}{mp+nq}.$$

Доказателство. Без ограничение можем да считаме, че точката O лежи в ΔATB. Въвеждаме означенията $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$, $\sphericalangle CAD=\alpha_1$, $\sphericalangle CAB=\alpha_2$, $\sphericalangle ACB=\gamma_1$ и $\sphericalangle ACD=\gamma_2$ (Фиг. 5).



Фиг. 5

Тъй като точките T и O лежат на изогонални прави относно $\sphericalangle BAD$ (според казаното в началото), то $\sphericalangle OAB=\sphericalangle CAD=\alpha_1$.

Тогава $\sphericalangle OAC=\sphericalangle BAC-\sphericalangle OAB=\alpha_2-\alpha_1$.

Аналогично $\sphericalangle OCA = \gamma_1 - \gamma_2$. Оттук определяме $\sphericalangle AOC = 180° - \sphericalangle OAC - \sphericalangle OCA = 180° - (\alpha_2 - \alpha_1) - (\gamma_1 - \gamma_2)$.
От синусовата теорема за ΔAOC намираме:

$$(2) \quad x = AO = \frac{AC}{\sin \sphericalangle AOC} \sin \sphericalangle OCA = \frac{(m+p)\sin(\gamma_1 - \gamma_2)}{\sin\left[(\alpha_2 - \alpha_1) + (\gamma_1 - \gamma_2)\right]}$$

Освен това от правоъгълните триъгълници ADT и ABT имаме равенствата $\sin\alpha_1 = \dfrac{q}{d}$, $\cos\alpha_1 = \dfrac{m}{d}$, $\sin\alpha_2 = \dfrac{n}{a}$ и $\cos\alpha_2 = \dfrac{m}{a}$. С помощта на последните равенства получаваме:

$$(3) \quad \begin{aligned} \sin(\alpha_2 - \alpha_1) &= \sin\alpha_2 \cos\alpha_1 - \cos\alpha_2 \sin\alpha_1 = \frac{m}{ad}(n-q), \\ \cos(\alpha_2 - \alpha_1) &= \cos\alpha_2 \cos\alpha_1 + \sin\alpha_2 \sin\alpha_1 = \frac{m^2 + nq}{ad}. \end{aligned}$$

Аналогично намираме:

$$(4) \quad \begin{aligned} \sin(\gamma_1 - \gamma_2) &= \frac{p}{bc}(n-q), \\ \cos(\gamma_1 - \gamma_2) &= \frac{p^2 + nq}{bc}. \end{aligned}$$

От (3) и (4) получаваме равенството:

(5) $$\sin\left[(\alpha_2-\alpha_1)+(\gamma_1-\gamma_2)\right]=$$
$$=\sin(\alpha_2-\alpha_1)\cos(\gamma_1-\gamma_2)+\cos(\alpha_2-\alpha_1)\sin(\gamma_1-\gamma_2)=\frac{(m+p)(n-q)(mp+nq)}{abcd}.$$

Сега от равенства (2), (4) и (5) следва равенството $x=\dfrac{pad}{mp+nq}$. Като вземем предвид, че от Питагоровата теорема следват равенствата $a=\sqrt{m^2+n^2}$ и $d=\sqrt{m^2+q^2}$ (Фиг. 5), окончателно получаваме $x=\dfrac{p\sqrt{(m^2+n^2)(m^2+q^2)}}{mp+nq}$. Така доказахме първото от равенства (1). Аналогично се доказват и останалите равенства (1). Лемата е доказана.

Сега разглеждаме множеството M на всички изпъкнали четириъгълници $ABCD$, диагоналите на които са перпендикулярни, а за пресечната им точка T са изпълнени условията $AT=m$, $BT=n$, $CT=p$ и $DT\geq k=\max\left(\dfrac{mn}{p},\dfrac{np}{m}\right)$. За тези четириъгълници е в сила следващата

Теорема 2. *Сумата на разстоянията от псевдоцентровете на четириъгълниците от множеството M до съответните им върхове достига минимална стойност, когато $DT=k$.*

Доказателство. Означаваме псевдоцентъра на четириъгълника $ABCD$ с O. Полагаме $DT=q$, $OA=x(q)$, $OB=y(q)$, $OC=u(q)$ и $OD=v(q)$. От лема 2 следват равенствата:

$$x(q)=\frac{p\sqrt{\left(m^2+n^2\right)\left(m^2+q^2\right)}}{mp+nq},$$
$$y(q)=\frac{q\sqrt{\left(m^2+n^2\right)\left(n^2+p^2\right)}}{mp+nq},$$

$$u(q)=\frac{m\sqrt{\left(n^2+p^2\right)\left(p^2+q^2\right)}}{mp+nq},$$
$$v(q)=\frac{n\sqrt{\left(p^2+q^2\right)\left(m^2+q^2\right)}}{mp+nq}.$$

Трябва да докажем, че минималната стойност на сумата $x(q)+y(q)+u(q)+v(q)$ в интервала $[k,+\infty)$ се достига при $q=k$. За това е достатъчно да докажем, че при $q\in(k,+\infty)$ са изпълнени неравенствата $x'(q)>0$, $y'(q)>0$, $u'(q)>0$ и $v'(q)>0$ (тъй като тогава разглежданата сума ще е растяща функция в интервала $(k,+\infty)$). За производната на $x(q)$ получаваме $x'(q)=\dfrac{mp^2\left(m^2+n^2\right)\left(q-\dfrac{mn}{p}\right)}{(mp+nq)^2\sqrt{\left(m^2+n^2\right)\left(m^2+q^2\right)}}$. Освен това при $q\in(k,+\infty)$ имаме $q>k=\max\left(\dfrac{mn}{p},\dfrac{np}{m}\right)\geq\dfrac{mn}{p}$, т.е. $q>\dfrac{mn}{p}$. Тогава от израза за $x'(q)$ следва, че $x'(q)>0$ при $q\in(k,+\infty)$.

За производната $y'(q)$ очевидно имаме $y'(q)=\dfrac{mp\sqrt{(m^2+n^2)(n^2+p^2)}}{(mp+nq)^2}>0$ за всяко $q>0$. По-нататък

от $u'(q)=\dfrac{pm^2(n^2+p^2)\left(q-\dfrac{np}{m}\right)}{(mp+nq)^2\sqrt{(n^2+p^2)(p^2+q^2)}}$

и $q>k=\max\left(\dfrac{mn}{p},\dfrac{np}{m}\right)\geq\dfrac{np}{m}$ следва, че $u'(q)>0$ при $q\in(k,+\infty)$. Накрая имаме $q>\dfrac{mn}{p}$ и

$$v'(q)=\frac{n}{(mp+nq)^2}\frac{nq^4+2mpq^3+m^3pq+mp^3(q-\dfrac{mn}{p})}{\sqrt{(p^2+q^2)(m^2+q^2)}}.$$

Откъдето $v'(q)>0$ при $q\in(k,+\infty)$. Така се убедихме, че при $q\in(k,+\infty)$ и четирите производни $x'(q)$, $y'(q)$, $u'(q)$ и $v'(q)$ са положителни. С това теоремата е доказана.

ЛИТЕРАТУРА:

[1] Ненков, В., Ст. Стефанов, Х. Хаимов. Псевдоцентър и ортоцентър – забележителни точки в четириъгълника, Математика и информатика, 6, 2016, 614-625.

[2] Стефанов, Ст. Втори псевдоцентър на четириъгълника, Математика и информатика, 3, 2017, 252-261.

[3] Хаимов, Х. Епицентърът – забележителна точка в четириъгълника, Математика, 1, 1997, 18-21.

[4] Хаимов, Х. Брокарианите – забележителни точки в четириъгълника, Математика и информатика, 6, 2001, 17-23.

[5] Хаимов, Х. Геометрия на четириъгълника. Псевдоцентър и ортоцентър, Математика плюс, 2, 2010, 28-51.

[6] Хаимов, Х. Точка на Лемоан, Математика, 6, 2011, 4-12.

Веселин Ненков
ВВМУ „Н. Вапцаров“
E-mail: vnenkov@mail. bg

Станислав Стефанов
ТУ-София
E-mail: stanislav.toshkov@abv.bg