

ON THE ORBITS OF ONE SUBGROUP OF THE MÖBIUS GROUP IN $\mathbb{R}^3$ *

RADOSTINA P. ENCHEVA

ABSTRACT: In this paper we characterize spatial curves that are orbits of a subgroup of the Möbius group in the three-dimensional Euclidean space. The resulting curves are illustrated by a special case.

KEYWORDS: Orbits of a group, Möbius group, Frenet curves

ЗА ОРБИТИТЕ НА ЕДНА ПОДГРУПА НА МЪОБИУСОВАТА ГРУПА В $\mathbb{R}^3$

РАДОСТИНА П. ЕНЧЕВА

АБСТРАКТ: В тази работа са характеризирани пространствени криви, които са орбити на една подгрупа на Мьобиусова група в тримерното Евклидово пространство. Получените криви са илюстрирани с един частен случай.

1 Въведение

Нека $\mathbb{S}^3$ е единичната 3-сфера в четиримерното Евклидово пространство $\mathbb{R}^4$, снабдено с естествената си метрика, а точката O е центърът на $\mathbb{S}^3$. Еднаквостите върху $\mathbb{S}^3$, запазващи ориентацията, наречени движения, са ротациите от групата $SO(4)$ в $\mathbb{R}^4$ с център точката O . Чрез една стереографска проекция Π с център точка в $P \in \mathbb{S}^3$ на $\mathbb{S}^3 \setminus \{P\}$ в $\mathbb{R}^3$, групата на движенията върху $\mathbb{S}^3$ индуцира в $\mathbb{R}^3$ една подгрупа M_0 на Мьобиусовата група $\text{Möb}(3)$ в $\mathbb{R}^3$. Тази група има хубаво представяне чрез алгебрата на кватернионите $\mathbb{H}$, като $\mathbb{H}_0 \subset \mathbb{H}$ е множеството на така наречените чисто векторни кватерниони (с нулева реална част). Ако $w \in \mathbb{H}$ е кватернион, то нормата на w се означава с $\|w\|$, а кватернионът $\bar{w} \in \mathbb{H}$ е спрегнатият на w кватернион и $\|w\|^2 = w \cdot \bar{w} = \bar{w} \cdot w$. Преобразованията от групата M_0 могат да се представят чрез

$$F(q) = (A \cdot q + B) \cdot (B \cdot q + A)^{-1},$$

където $A, B \in \mathbb{H}$, $q \in \mathbb{H}_0$, $\|A\|^2 + \|B\|^2 = 1$ и $A \cdot \bar{B} + B \cdot \bar{A} = 0$, отъждествявайки $\mathbb{H}_0$ с $\mathbb{R}^3$ (Теорема 3 в [3]).

Орбита на една група от преобразования G в $\mathbb{R}^3$ ([1]) е множеството

$$\text{orb}(x_0) = \{y \in \mathbb{R}^3; y = g(x_0), g \in G\}, x_0 \in \mathbb{R}^3.$$

Орбити на групата на движенията в $\mathbb{R}^3$ са правите, окръжностите и винтовите линии. Разширявайки тази група с подобностите, които запазват ориентацията, получаваме групата

*This paper is (partially) supported by the National Scientific Program "Information and Communication Technologies for a Single Digital Market in Science, Education and Security (ICTinSES) financed by the Ministry of Education and Science.

$Sim^+(3)$ на подобностите в $\mathbb{R}^3$, които запазват ориентацията. Тогава към изброените орбити се добавят логаритмичните спирали и коничните спирали. Ако c е гладка крива в $\mathbb{R}^3$, то нейните определящи я с точност до движение диференциално-геометрични инварианти са кривината и торзията на кривата като функции на естествения параметър s на кривата ([6]). Определящите диференциално-геометрични инварианти относно групата $Sim^+(3)$ на една крива са така наречените шейп кривина и шейп торзия, като функции на естествения параметър на тангенциалната индикатриса на кривата ([2]). Орбити на групата на движенията, както и на групата $Sim^+(3)$ в $\mathbb{R}^3$, са криви с постоянни кривина и торзия или шейп кривина и шейп торзия, съответно.

Можем да считаме, че орбити на една група от преобразования са криви с постоянни диференциално-геометрични инварианти, които определят кривата с точност до преобразование от разглежданата група.

Нека $K = O \vec{e}_1 \vec{e}_2 \vec{e}_3 \vec{e}_4$ е дясна Декартова координатна система в $\mathbb{R}^4$. Тогава

$$\mathbb{S}^3 = \{(x^1, x^2, x^3, x^4) \in \mathbb{R}^4 | (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2 = 1\}.$$

Нека $l = (x^1, x^2, x^3, x^4)$, $x^1 \neq 1$ е радиус-векторът на произволна точка от $\mathbb{S}^3$, различна от точката $P(1, 0, 0, 0) \in \mathbb{S}^3$. Означавайки с (u^1, u^2, u^3) координатите на радиус-вектора u на произволна точка в $\mathbb{R}^3$ относно Декартовата координатна система $K' = O \vec{e}_1' \vec{e}_2' \vec{e}_3'$ в $\mathbb{R}^3$, където $\vec{e}_1' = \vec{e}_2$, $\vec{e}_2' = \vec{e}_3$, $\vec{e}_3' = \vec{e}_4$, стереографската проекция $\Pi : \mathbb{S}^3 \setminus \{P\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ се определя с равенствата $u^i = \frac{x^{i+1}}{1 - x^1}$, $i = 1, 2, 3$. За обратното изображение Π^{-1} имаме, че

$$\begin{aligned} x^1 &= \frac{(u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2 - 1}{(u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2 + 1}, \\ x^i &= \frac{2u^{i-1}}{(u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2 + 1}, \quad i = 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Чрез $\|u\|$ ще означаваме дължината на вектора u .

Нека γ е гладка крива върху сферата $\mathbb{S}^3$ с векторно-параметрично уравнение $l = l(\sigma)$, $\sigma \in J$, където σ е естествен параметър. Диференцирането спрямо естествен параметър ще означаваме с $'$ и $l'(\sigma) = \frac{dl}{d\sigma}$. Подвижният репер $ltnb$ в произволна точка от γ върху $\mathbb{S}^3$ се определя

по следния начин: $t = l'$, $n = \frac{l + l''}{\|l + l''\|}$ и b е единственият вектор определен така, че $ltnb$ да бъде дясна ортонормирана координатна система. Функцията $\tilde{\kappa} = \|l + l''\| = \sqrt{l''^2 - 1} > 0$ се нарича сферична кривина на γ . За $ltnb$ имаме следните формули за производните

$$(1) \quad l' = t, \quad t' = -l + \tilde{\kappa}n, \quad n' = -\tilde{\kappa}t + \tilde{\tau}b, \quad b' = -\tilde{\tau}n,$$

където $\tilde{\tau}$ се нарича сферична торзия на γ ([7]). Функциите $\tilde{\kappa} = \tilde{\kappa}(\sigma)$ и $\tilde{\tau} = \tilde{\tau}(\sigma)$ определят γ с точност до движение върху сферата $\mathbb{S}^3$. Линиите върху $\mathbb{S}^3$, за които $\tilde{\kappa} = 0$, са големите окръжности на сферата $\mathbb{S}^3$, т.е. нейните геодезични линии. Линиите, за които $\tilde{\kappa} > 0$ и $\tilde{\tau} = 0$, се наричат Риманови окръжности и лежат на 2-сферите $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{S}^3$. Линиите, за които $\tilde{\kappa} > 0$ и $\tilde{\tau} \neq 0$, ще наричаме правилни линии върху $\mathbb{S}^3$.

2 Основни резултати

Теорема 2.1. Нека γ е правилна линия върху сферата $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$, параметризирана спрямо естествен параметър σ , $\sigma \in J$, за която $\tilde{\chi} = a > 0$ и $\tilde{\tau} = b \neq 0$ са константи за всяко $\sigma \in J$. Тогава векторната функция $\mathbf{l} = \mathbf{l}(\sigma)$, $\sigma \in J$, определяща γ , има вида

$$(2) \quad \mathbf{l}(\sigma) = (\cos \varphi \cos(\alpha\sigma), \cos \varphi \sin(\alpha\sigma), \sin \varphi \cos(\beta\sigma), \sin \varphi \sin(\beta\sigma)), \sigma \in J,$$

където

$$(3) \quad \begin{aligned} \alpha^2 \cos^2 \varphi + \beta^2 \sin^2 \varphi &= 1, \\ \alpha^2 &= \frac{1 + a^2 + b^2 - \sqrt{(1 + a^2 + b^2)^2 - 4b^2}}{2}, \quad \beta^2 = \frac{1 + a^2 + b^2 + \sqrt{(1 + a^2 + b^2)^2 - 4b^2}}{2}, \\ \beta > 1 > \alpha, \quad \cos^2 \varphi &= \frac{1 - \beta^2}{\alpha^2 - \beta^2}, \quad \sin^2 \varphi = \frac{1 - \alpha^2}{\beta^2 - \alpha^2}. \end{aligned}$$

Доказателство. Заместваме $\tilde{\chi}$ и $\tilde{\tau}$ от (1) с константите $a > 0$ и $b \neq 0$, съответно, и ре-

шаваме матричното диференциално уравнение $X' = A.X$, където $X = \begin{pmatrix} \mathbf{l} \\ \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}$ и $A =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & a & 0 \\ 0 & -a & 0 & b \\ 0 & 0 & -b & 0 \end{pmatrix} \text{ с дадено начално условие } X(\sigma_0) = X_0, \sigma_0 \in J, \text{ където } X_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{l}_0 \\ \mathbf{t}_0 \\ \mathbf{n}_0 \\ \mathbf{b}_0 \end{pmatrix}$$

и $\mathbf{l}_0 \mathbf{t}_0 \mathbf{n}_0 \mathbf{b}_0$ е дясна ортонормирана координатна система в точка $\mathbf{l}_0 = \mathbf{l}(\sigma_0)$ от γ . Съгласно ([5], Sec. 8.16) имаме, че нормалната форма на матрицата A е

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ -\lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & -\lambda_2 & 0 \end{pmatrix}, \text{ където } -\lambda_1^2, -\lambda_2^2 \text{ са неотрицателните двукратни собствени}$$

$$\text{стойности на матрицата } A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & a & 0 \\ 0 & -1 - a^2 & 0 & ab \\ a & 0 & -a^2 - b^2 & 0 \\ 0 & ab & 0 & -b^2 \end{pmatrix}. \text{ Решавайки характерис-}$$

тичното уравнение $\det(A^2 - \lambda E) = 0$ на матрицата A^2 , където E е единичната матрица,

намираме че $-\lambda_1^2 = -\frac{1 + a^2 + b^2 - \sqrt{(1 + a^2 + b^2)^2 - 4b^2}}{2}$ и

$$-\lambda_2^2 = -\frac{1 + a^2 + b^2 + \sqrt{(1 + a^2 + b^2)^2 - 4b^2}}{2}. \text{ Оттук, полагайки } \alpha^2 = \lambda_1^2 \text{ и } \beta^2 = \lambda_2^2 \text{ и изпол-}$$

звайки, че $\mathbf{l}^2 = \mathbf{l}'^2 = 1$, получаваме (2) и (3). $\square$

Тъй като групата M_0 е подгрупа на Мьобиусовата група $\text{Möb}(3)$ в $\mathbb{R}^3$, то орбити на M_0 са правите и окръжностите в $\mathbb{R}^3$. Освен тях обаче има и други линии в $\mathbb{R}^3$, орбити на тази група. Те се характеризират чрез следващата теорема.

Теорема 2.2. Нека s е правилна линия в $\mathbb{R}^3$, различна от окръжност, параметризирана спрямо естествения параметър σ на сферичния ѝ първообраз γ при стереографската проекция

$\Pi : \mathbb{S}^3 \setminus \{P\} \rightarrow \mathbb{R}^3$, с векторно-параметрично уравнение $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\sigma)$, $\sigma \in J$, Евклидова кривина $\varkappa$ и Евклидова торзия τ . Тогава, ако α и β са константи, удовлетворяващи условията $\beta > 1 > \alpha$ и $\alpha^2 \cos^2 \varphi + \beta^2 \sin^2 \varphi = 1$, то c е орбита на групата M_0 тогава и само тогава когато

$$(4) \quad \begin{aligned} \frac{1}{\mu} \varkappa^2(\sigma) - 1 + 2S_s(\sigma) &= (\alpha^2 - 1)(1 - \beta^2) \\ \varkappa \tau \cos \theta - \sqrt{\mu} \frac{d\varkappa}{d\sigma} \sin \theta &= \alpha \beta \mu \sqrt{(\alpha^2 - 1)(1 - \beta^2)}, \end{aligned}$$

където $\cos \theta = \frac{1}{\varkappa \sqrt{\mu(\alpha^2 - 1)(1 - \beta^2)}} \left(\varkappa^2 + \mu S_s(\sigma) + \frac{1}{8\mu} \left(\frac{d\mu}{d\sigma} \right)^2 - \sqrt{\mu} \right)$, $s = s(\sigma)$ е функцията на дължината на дъгата, $\mu = \frac{4}{(1 + \|\mathbf{u}\|^2)^2}$, а $S_s(\sigma)$ е производната на Schwarzian на функцията $s = s(\sigma)$.

Доказателство. Съгласно Теорема 4.2 и Теорема 4.3 ([4]), определящите инварианти на c относно групата M_0 , т.е. инвариантите определящи c с точност до преобразование от разглежданата група, са

$$(5) \quad \begin{aligned} \mathfrak{K}(\sigma) &= \frac{1}{\mu} \varkappa^2 - 1 + 2S_s(\sigma) \\ \mathfrak{T}(\sigma) &= \frac{1}{\mu \sqrt{\mu \mathfrak{K}}} \left(\varkappa \tau \cos \theta - \sqrt{\mu} \frac{d\varkappa}{d\sigma} \sin \theta \right), \end{aligned}$$

където $\cos \theta = \frac{1}{\varkappa \sqrt{\mu \mathfrak{K}}} \left(\varkappa^2 + \mu S_s(\sigma) + \frac{1}{8\mu} \left(\frac{d\mu}{d\sigma} \right)^2 - \sqrt{\mu} \right)$. Имайки предвид Теорема 3.1 от [4], функциите (5) са съответно квадратът на сферичната кривина $\tilde{\varkappa}$ и сферичната торзия $\tilde{\tau}$ на линията γ . Полагаме $\mathfrak{K}(\sigma) = a^2$ и $\mathfrak{T}(\sigma) = b$, където $a > 0$ и $b \neq 0$ са константи. Тогава $\tilde{\varkappa} = a$, $\tilde{\tau} = b$ и от Теорема 2.1 намираме, че векторната функция $\mathbf{l} = \mathbf{l}(\sigma)$, определяща γ , има вида (2). От (3) намираме, че $a^2 = \alpha^2 + \beta^2 - \alpha^2 \beta^2 - 1 = (\alpha^2 - 1)(1 - \beta^2)$ и $b^2 = \alpha^2 \beta^2$, с което теоремата е доказана. $\square$

Прилагайки стереографската проекция Π върху линията $\gamma \in \mathbb{S}$ с уравнение (2) при дадена стойност на $\varphi \neq k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, намираме еднопараметричното семейство от линии $c_{\alpha, \beta}$, орбити на групата M_0 , с уравнения

$$\mathbf{u}(\sigma) = \left\{ \frac{\cos \varphi \sin(\alpha \sigma)}{1 - \cos \varphi \cos(\alpha \sigma)}, \frac{\sin \varphi \cos(\beta \sigma)}{1 - \cos \varphi \cos(\alpha \sigma)}, \frac{\sin \varphi \sin(\beta \sigma)}{1 - \cos \varphi \cos(\alpha \sigma)} \right\}, 1 - \cos \varphi \cos(\alpha \sigma) \neq 0,$$

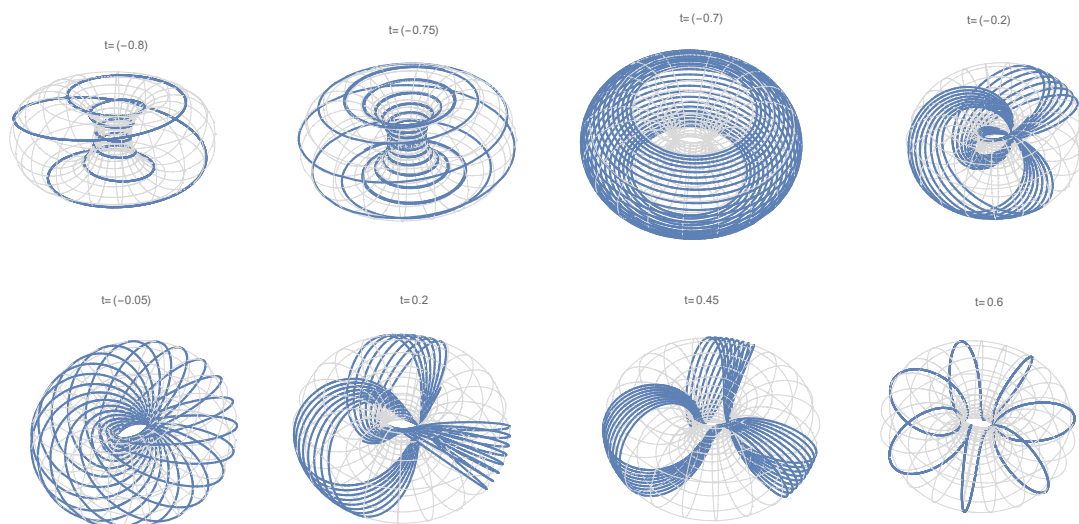
$\sigma \in J$, където $\alpha^2 \cos^2 \varphi + \beta^2 \sin^2 \varphi = 1$. Тези линии лежат на повърхнина, наречена тор, с уравнение в неявен вид

$$\left(\frac{1}{\sin \varphi} - \sqrt{y^2 + z^2} \right)^2 + x^2 = \cot^2 \varphi.$$

Пример 1. Нека $\Re(\sigma) = a^2 = \text{const}$, $a > 0$, $\Im(\sigma) = b = \text{const} \neq 0$ и $a^2 + b^2 = 1$. Тогава $\alpha^2 + \beta^2 = 1 + a^2 + b^2 = 2$. Полагаме $\alpha = t - \sqrt{1-t^2}$ и $\beta = t + \sqrt{1-t^2}$, $-1 < t < 1$, и получаваме еднопараметричното семейство от линии с уравнения

$$u_t(\sigma) = \left\{ \frac{\sin(\sigma(t - \sqrt{1-t^2}))}{\sqrt{2} - \cos(\sigma(t - \sqrt{1-t^2}))}, \frac{\cos(\sigma(t + \sqrt{1-t^2}))}{\sqrt{2} - \cos(\sigma(t - \sqrt{1-t^2}))}, \frac{\sin(\sigma(t + \sqrt{1-t^2}))}{\sqrt{2} - \cos(\sigma(t - \sqrt{1-t^2}))} \right\},$$

изобразени на Фигура 1.



Фигура 1: Еднопараметрично семейство от криви, лежащи на тор, орбити на групата M_0

ЛИТЕРАТУРА:

- [1] Berger M., Geometry I, Universitext, ISBN 978-3-540-93815-6, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1987.
- [2] Encheva R. and Georgiev G., Similar Frenet Curves, *Result. Math.*, **55** no. **3-4** (2009) 359-372.
- [3] Encheva, R.P., Möbius transformations induced by rotations on the three-sphere, MATTEX 2016, *Conference proceedings*, vol. **1** (2016) 43-50.
- [4] Encheva, R.P., Recovering space curves by Möbius invariants, *Annual of Konstantin Preslavsky University of Shumen*, vol. **XX C** (2019) 21-35.
- [5] Greub W., Linear Algebra, Third Edition, ISBN 978-1-4684-9446-4, Springer-Verlag New York, 1975.
- [6] Künel W., Differential geometry: Curves-Surfaces-Manifolds, Second Edition, ISBN: 0-8218-3988-8, AMS, 2006.
- [7] Tazawa Y., Curves and surfaces in the three dimensional sphere placed in the space of quaternions, *Innovation in mathematics, Transactions on Engineering Sciences*, vol. **15** (1997) 459-466.

