RELATIONS BETWEEN THREE TRANSFORMATIONS IN THE PLANE OF AN ARBITRARY QUADRILATERAL

VESELIN N. NENKOV, YORDAN N. IVANOV, STANISLAV T. STEFANOV, HAIM M. HAIMOV

ABSTRACT**:** *In the paper there are considered important connections between three newly discovered mappings (transformations) in the plane of an arbitrary quadrilateral. The mappings will be used in further papers (based on our already done explorations) for studying important qualities of both the pentagon and hexagon, related to the emplacement of the pedal circles of an arbitrary point in their plane, with respect to the triangles, formed by their sides and diagonals.*

KEYWORDS: *Quadrilateral, Transformations, Pedal circle, Relations between transformations.*

ВРЪЗКИ МЕЖДУ ТРИ ИЗОБРАЖЕНИЯ В РАВНИНАТА НА ПРОИЗВОЛЕН ЧЕТИРИЪГЪЛНИК

ВЕСЕЛИН Н. НЕНКОВ, ЙОРДАН Н. ИВАНОВ, СТАНИСЛАВ Т. СТЕФАНОВ, ХАИМ М. ХАИМОВ

АБСТРАКТ**:** *В статията се разглеждат интересните връзки между три универсални изображения в равнината на произволен четириъгълник. С помощта на изображенията, в предстоящи статии (на базата на проведени вече наши изследвания) ще бъдат изложени важни свойства и на петоъгълника, и шестоъгълника, свързани с разположението на педалните окръжности на произволна точка в равнината им, спрямо триъгълниците, определени от техните страни и диагонали.*

КЛЮЧОВИ ДУМИ**:** *четириъгълник, изображения, педална окръжност, връзки между изображения.*

1 Въведение

Неотдавна бяха открити три универсални преобразования в равнината на произволен четириъгълник. Първото, наречено педалност спрямо четириъгълник, бе разгледано в [3]. Второто, наречено инверсна изогоналност, бе разгледано в [1]. На третото, наречено изогонална спрегнатост (или перфектна изогоналнност), бяха посветени статиите: [4], [2]. Тези три изображения съставляват важна част от геометрията на четириъгълника. Основен фактор (аргумент) за това е, че при тях едни забележителни точки в (равнината на) четириъгълника се изобразяват в други. Благодарение на това, от свойства на едни забележителни точки се извеждат свойства на други. С помощта на изображенията се доказва лесно колинеарността на редица тройки забележителни точки в четириъгълника и принадлежността на ред четворки от тях на една окръжност. Тук ще разгледаме някои важни връзки между въпросните три изображения.

2 Дефиниции и някои свойства на разглежданите изображения

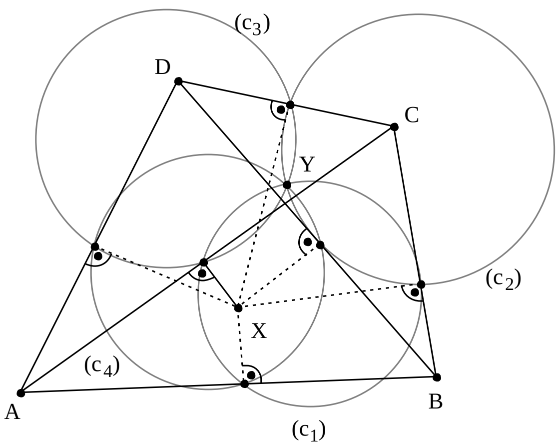
Предварително, нека припомним дефинициите и тези свойства на изображенията, които ще ни послужат в изложението по-нататък:

1. Да припомним, че педална окръжност на произволна точка в равнината на произволен триъгълник, спрямо последния, наричаме окръжността, определена от ортогоналните проекции на точката върху правите, съдържащи страните му. Първото изображение - педалност в четириъгълника се дефинира въз основа на следното твърдение, доказано в [3]:

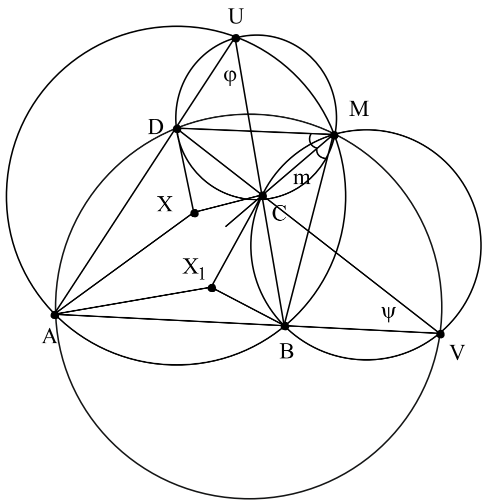
Теорема 1. Педалните окръжности на произволна точка X в равнината на произволен четириъгълник $ABCD$, нележаща на една окръжност с никои три от върховете му, спрямо триъгълниците ABC, BCD, CDA и DAB, определени от страните и диагоналите на четириъгълника, минават през една точка Y (фиг.1).

Точката Y се нарича педален образ на точката X спрямо четириъгълника $ABCD$.

Изображението, което на точката X съпоставя педалния ѝ образ, наричаме педалност в четириъгълника.



Фиг. 1

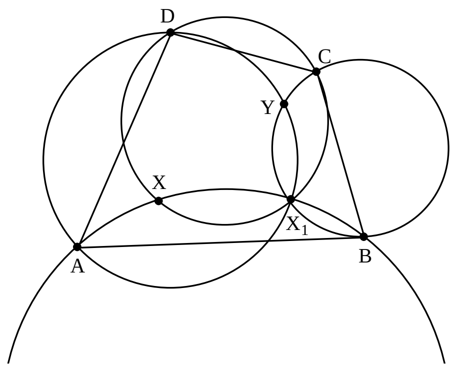


Фиг. 2

2. Второто изображение - инверсна изогоналност - е свързано с точката на Микел на четириъгълника. Ако в четириъгълника $ABCD$ правите AD и BC се пресичат в точка U (фиг. 2), а правите AB и DC - в точка V, доказва се, че описаните окръжности около триъгълниците ABU, BCV, CDU и DAV се пресичат в една точка M. Тя се нарича точка на Микел на четириъгълника. Композицията от симетрия спрямо ъглополовящата на ъгъл BMD и инверсия с полюс M и степен $r^2 = BM \cdot DM$ се нарича инверсна изогоналност спрямо четириъгълника $ABCD$. Съществува достатъчно условие, две точки в равнината на четириъгълника да са съответни при това изображение. Преди да го формулираме ще припомним следното помощно:

Определение 1. Две точки в равнината наричаме изогонални спрямо дадена отсечка, ако те лежат на една окръжност с краищата ѝ.

Теорема 2. Нека $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник и X и Y са две точки в него, за които съществува точка X_1, изогонална на X едновременно спрямо страните AB и CD и в същото време - изогонална на Y едновременно спрямо страните AD и BC. Тогава точките X и Y са инверсно изогонални спрямо четириъгълника $ABCD$ (фиг. 3).



Фиг. 3

Едно важно свойство на инверсно изогоналните точки, което ще използваме тук, е следното:

Теорема 3. Ако X и X_1 са две инверсно изогонални точки в изпъкналия четириъгълник $ABCD$ и $\measuredangle AUB = \varphi$, а $\measuredangle AVD = \psi$, то са изпълнени равенствата (фиг.2):

$\measuredangle AX_1B = \measuredangle DXC + \varphi$, $\measuredangle AXD = \measuredangle BX_1C + \psi$.

3. Третото изображение - изогонална спрегнатост спрямо четириъгълник е аналог на известното изображение изогонална спрегнатост спрямо триъгълник. Да припомним, че две прави се наричат изогонални спрямо даден ъгъл, ако сключват равни ъгли с ъглополовящата му. Две точки в (равнината на) четириъгълника се наричат изогонално спрегнати спрямо него, ако лежат на изогонални прави спрямо всеки от ъглите му. Едно необходимо и достатъчно условие, една точка в изпъкнал четириъгълник да има изогонално спрегната спрямо него точка, се съдържа в следната теорема, доказана в [4].

Теорема 4. Една точка X в произволен изпъкнал четириъгълник има изогонално спрегната спрямо него точка Y, тогава и само тогава, когато е изпълнено равенството: $\measuredangle AXB + \measuredangle CXD = 180^\circ$ (фиг. 4).

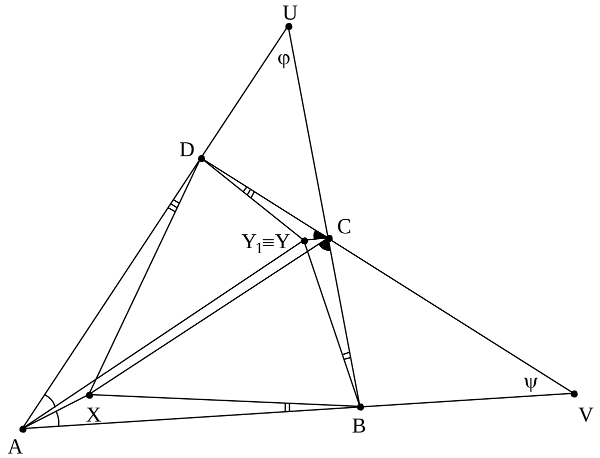
Вече можем да пристъпим към разглеждането на връзките между въпросните изображения.

3 Връзка между изображенията инверсна изогоналност и изогонална спрегнатост

Ще разгледаме първо една важна връзка между изображенията инверсна изогоналност и изогонална спрегнатост спрямо четириъгълник. Както следва от току-що формулираната теорема 4, изображението изогонална спрегнатост е дефинирано само за тези точки X в четириъгълника $ABCD$, за които е изпълнено равенството $\measuredangle AXB + \measuredangle CXD = 180^\circ$. Ако точката X лежи извън четириъгълника, това условие се заменя с условията: $\measuredangle AXD = \measuredangle BXC$ и $\measuredangle AXB = \measuredangle DXC$. Нека Ω е множеството от точките X, за които са изпълнени съответните условия, т.е. това е дефиниционното множество на изогоналната спрегнатост. Както ще видим, изображението инверсна изогоналност, което е дефинирано в цялата равнина, съвпада с изображението изогонална спрегнатост в дефиниционното му множество Ω. (Казано по друг начин, инверсната изогоналност е разпространение на изогоналната спрегнатост от дефиниционното ѝ множество - в цялата равнина.)

Теорема 5. Ако точката X има изогонално спрегната спрямо четириъгълника $ABCD$ точка Y, т.е. точките X и Y са от дефиниционното множество на изогоналната спрегнатост, то точката Y е и инверсно изогонална на X спрямо същия четириъгълник, т.е. образът Y на X при изогоналната спрегнатост съвпада с образа й при инверсната изогоналност.

Доказателство: Въвеждаме означенията: $AD \cap BC = U$, $AB \cap DC = V$, $\measuredangle AUB = \varphi$, $\measuredangle AVD = \psi$ (фиг. 4).



Фиг. 4

За определеност ще предполагаме, че изогонално спрегнатите точки X и Y са вътрешни за четириъгълника $ABCD$. Първо ще покажем, че за тях са изпълнени равенствата:

(1) $\measuredangle AYB = \measuredangle DXC + \varphi$, $\measuredangle AXD = \measuredangle BYC + \psi$.

Щом точките X и Y са изогонално спрегнати спрямо четириъгълника $ABCD$, то те лежат на изогонални прави спрямо всеки от ъглите му - DAB и ABC . Оттук имаме: $\measuredangle YAB = \measuredangle XAD$ и $\measuredangle YBA = \measuredangle XBC$. С помощта на тези равенства получаваме последователно:

$$\measuredangle AYB = 180° - \measuredangle YAB - \measuredangle YBA = 180° - \measuredangle XAD - \measuredangle XBC =$$

$$= 180° - (\measuredangle BAD - \measuredangle XAB) - (\measuredangle ABC - \measuredangle XBA) =$$

$$= [180° - (\measuredangle BAD + \measuredangle ABC)] + (\measuredangle XAB + \measuredangle XBA) = \measuredangle AUB + (180° - \measuredangle AXB),$$

т.е.:

(2) $\measuredangle AYB = \varphi + (180° - \measuredangle AXB)$

Понеже точката X има изогонално спрегната спрямо четириъгълника $ABCD$ точка (точката Y - по условие) и е вътрешна за него, то съгласно теорема 4 за нея е изпълнено равенството: $\measuredangle AXB + \measuredangle DXC = 180°$. Тогава от равенство (2) получаваме: $\measuredangle AYB = \varphi + (180° - \measuredangle AXB) = \varphi + \measuredangle DXC$, което е първото от равенства (1). Аналогично се доказва и второто равенство.

Да означим сега с Y_1 инверсно изогоналната точка на X спрямо четириъгълника $ABCD$. Съгласно цитираната по-горе теорема 3 имаме:

(3) $\measuredangle AY_1B = \measuredangle DXC + \varphi$, $\measuredangle AXD = \measuredangle BY_1C + \psi$.

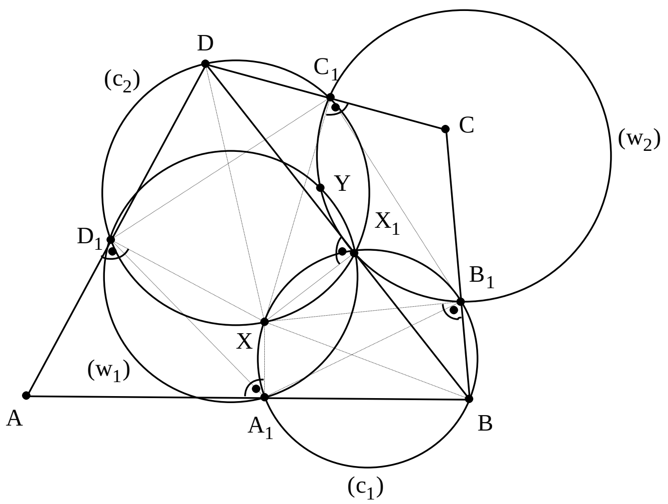
От равенства (1) и (3) следват равенствата: $\measuredangle AYB = \measuredangle AY_1B$ и $\measuredangle BYC = \measuredangle BY_1C$. Можем да заключим, че точките Y и Y_1 лежат на дъга от окръжност с краища точките A и B и на дъга от окръжност с краища B и C. Освен точката B, двете дъги могат да имат само още една обща точка, следователно точките Y и Y_1 съвпадат. Получихме, че инверсно изогоналната точка Y_1, на точката X съвпада с изогонално спрегнатата й точка Y спрямо разглеждания четириъгълник, т.е. че точката Y е и инверсно изогонална на X спрямо *ABCD*.

4 Връзка между изображенията педалност и инверсна изогоналност в четириъгълник

Съществува важна връзка и между изображенията педалност и инверсна изогоналост в четириъгълник:

Теорема 6. Нека X е произволна точка в равнината на изпъкнал четириъгълник $ABCD$, нележаща на една окръжност с никои три от върховете му и различна от точката му на Микел. Нека още A_1, B_1, C_1 и D_1 са ортогоналните проекции на точката X съответно върху правите AB, BC, CD и DA. Педалният образ Y на точката X спрямо четириъгълника $ABCD$ съвпада с инверсно изогоналната точка на X спрямо четириъгълника $A_1B_1C_1D_1$.

Доказателство: Тъй като точката X е различна от точката на Микел на четириъгълника $ABCD$, то четириъгълника $A_1B_1C_1D_1$ не се изражда в отсечка. Нека X_1 е ортогоналната проекция на точката X върху диагонала BD. (фиг. 5)



Фиг. 5

Окръжността (c_1) с диаметър BX съдържа точките A_1, X_1 и B_1. Следователно точките X и X_1 лежат на окръжност, минаваща през точките A_1 и B_1. Това означава, че те са изогонални спрямо страната A_1B_1 на четириъгълника $A_1B_1C_1D_1$. Аналогично се доказва, че точките X и X_1 лежат и на окръжност (c_2), минаваща през точките C_1 и D_1, т.е. че те са изогонални и спрямо страната му C_1D_1.

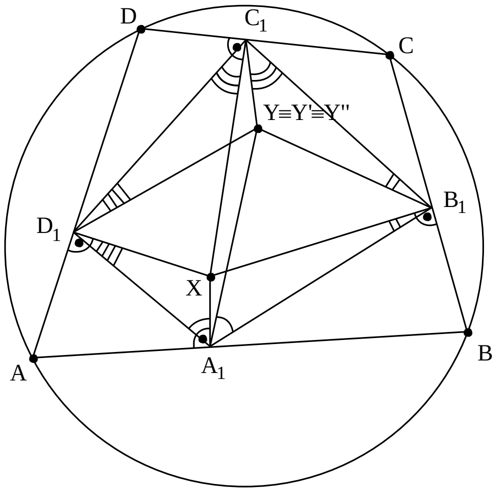
Педалният образ Y на точката X спрямо четириъгълника $ABCD$ лежи на педалната окръжност на X спрямо $\triangle ABD$, т.е. на окръжността (w_1), определена от точките D_1, A_1 и X_1 (по определение - виж по-горе). Следователно точките Y и X_1 лежат на окръжност, минаваща през точките A_1 и D_1. Това означава, че точките Y и X_1 са изогонални спрямо страната A_1D_1 на четириъгълника $A_1B_1C_1D_1$. Аналогично се доказва, че те лежат и на окръжност (w_2), минаваща през точките B_1 и C_1, т.е. че те са изогонални и спрямо страната му B_1C_1. Получихме, че за точките X и Y, разглеждани спрямо четириъгълника $A_1B_1C_1D_1$, съществува точка X_1 такава, че X и X_1 са изогонални едновременно спрямо страните му A_1B_1 и C_1D_1, а Y и X_1 са изогонални едновременно спрямо страните му A_1D_1 и B_1C_1. Можем да заключим, че точките X и Y са инверсно изогонални спрямо четириъгълника $A_1B_1C_1D_1$ (съгласно цитираната теорема 2). Така доказахме, че педалният образ Y на точката X спрямо четириъгълника $ABCD$ съвпада с инверсно изогоналната точка на X спрямо четириъгълника $A_1B_1C_1D_1$.

5 Връзка между изображенията педалност и изогонална спрегнатост във вписан четириъгълник

Ще разгледаме и една важна връзка между изображенията педалност и изогонална спрегнатост във вписан четириъгълник.

Теорема 7. Нека X е произволна точка във вписания четириъгълник $ABCD$, нележаща на описаната му окръжност и различна от точката му на Микел, а Y е педалният й образ спрямо него. Ако A_1, B_1, C_1 и D_1 са ортогоналните проекции на точката X съответно върху правите AB, BC, CD и DA, то точките X и Y са не само инверсно изогонални, но и изогонално спрегнати спрямо четириъгълника $A_1B_1C_1D_1$.

Доказателство: Педалният образ Y на точката X спрямо четириъгълника $ABCD$ съвпада с инверсно изогоналната й точка Y' спрямо четириъгълника $A_1B_1C_1D_1$ (съгласно току-що доказаната теорема 6), т.е. $Y \equiv Y'$ (фиг. 6). От друга страна, понеже четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност, то $\measuredangle BAD + \measuredangle BCD = 180°$. Тогава от четириъгълниците AA_1XD_1 и XB_1CC_1, лесно получаваме, че е изпълнено равенството: $\measuredangle A_1XD_1 + \measuredangle B_1XC_1 = 180°$. От цитираната по-горе теорема 4 следва, че точката X има изогонално спрегната спрямо четириъгълника $A_1B_1C_1D_1$ точка Y''. Но изогонално спрегнатата точка Y'' на точката X спрямо четириъгълника $A_1B_1C_1D_1$ е и инверсно изогонална на X спрямо този четириъгълник, т.е. $Y'' \equiv Y'$ (съгласно теорема 5). Получихме, че $Y \equiv Y'$ и $Y' \equiv Y''$, следователно $Y \equiv Y''$.



Фиг. 6

Така доказахме, че педалният образ Y на точката X спрямо четириъгълника $ABCD$ съвпада с изогонално спрегнатата ѝ точка Y'' спрямо четириъгълника $A_1B_1C_1D_1$, т.е. че точките X и Y са и изогонално спрегнати (освен, че са инверсно изогонални - както следва от теорема 6) спрямо четириъгълника $A_1B_1C_1D_1$.

Следствие. Нека X е произволна точка във вписания четириъгълник $ABCD$, нележаща на описаната му окръжност и различна от точката му на Микел, а Y е педалният ѝ образ спрямо него. Ако A_1, B_1, C_1 и D_1 са ортогоналните проекции на точката X съответно върху страните AB, BC, CD и DA, то са изпълнени равенствата (фиг.6):

$$\measuredangle XA_1D_1 = \measuredangle YA_1B_1, \quad \measuredangle XB_1A_1 = \measuredangle YB_1C_1, \quad \measuredangle XC_1D_1 = \measuredangle YC_1B_1$$ и $\measuredangle A_1D_1X = \measuredangle YD_1C_1$.

Доказателство: Съгласно доказаната теорема точките X и Y са изогонално спрегнати спрямо четириъгълника $A_1B_1C_1D_1$. Тогава доказваните равенства са изпълнени според определенията на изображенията изогонална спрегнатост спрямо четириъгълника и изогоналност на прави спрямо ъгъл (виж по-горе).

6 Заключение

Разгледаните връзки между трите изображения: педалност, инверсна изогоналност и изогонална спрегнатост спрямо четириъгълник представляват интерес сами по себе си, но по-съществеността е, че те служат за получаването на интересни свойства на петоъгълника и шестоъгълника, свързани с разположението на педалните окръжности на произволна в равнината на същите точка, спрямо триъгълниците, определени от техните страни и диагонали. Необходимите изследвания са проведени, но на тези свойства (резултати) ще се спрем в следващи статии.

Работата на Станислав Стефанов е подкрепена от Министерството на образованието и науката по Националната програма за научни изследвания „Млади *учени и постдокторанти", одобрена с РМС № 577 от 17.08.2018 г. / The work of Stanislav Stefanov is supported by the Bulgarian Ministry of Education and Science under the National Program for Research „Young Scientists and Postdoctoral Students", approved with RMS № 577/ 17.08.2018.*

ЛИТЕРАТУРА:

[1] Ненков, В., Стефанов Ст., Хаимов Х. Геометрия на четириъгълника, точка на Микел, инверсна изогоналност [Geometry of the quadrilateral, Miquel point, inversion], Математика и информатика, 1, 2017, 81-93.

[2] Ненков, В., Стефанов Ст., Хаимов Х. Перфектна изогоналност в четириъгълник [Perfect isogonality in quadrilateral], Математика и информатика, София, 2, 2018, 175-189.

[3] Хаимов, Х. Едно твърдение за конкурентност на педални окръжности на точка в равнината на четириъгълник [A statement for concurrence of pedal circles of a point in the plane of a quadrilateral], Математика и информатика, 1, 2019, 77-91.

[4] Alexandrov, Pl., H. Haimov. Geometry of the quadrangle. Isogonal conjugated points. International Congress Massee 2003, Borovets, Bulgaria. Proceedings, Borovets, 2003, 141-146.