Annual of Konstantin Preslavsky University of Shumen
vol. XXII C, 2021, pp. 55 – 69, https://doi.org/10.46687/XCDV4342

THINKING, INTELLECT AND MATHEMATICS TRAINING

DIANA R. STEFANOVA

ABSTRACT: *In this article we suggest some tools for development of students' thinking and intellect using different ways of learning mathematics. We have considered a learning approach that stimulates the intellectual development of learners, namely tasks, that take qualities such as wits, flexibility, transfer of knowledge in new conditions etc, when solving the questions.*

KEYWORDS: *thinking, intellect, activation*

2020 Math. Subject Classification: *97D50 and 97D60, 97G40*

МИСЛЕНЕ, ИНТЕЛЕКТ И ОБУЧЕНИЕТО ПО МАТЕМАТИКА

ДИАНА Р. СТЕФАНОВА

Непрекъснатото развитие на науката и техниката издига пред училището една от главните задачи на развитие на обществото, а именно възпитаване младите хора в активна мисловна дейност. По проблема за мисленето са писали редица автори [14, 3, 5]. Освен това е изяснено и видовете мислене и редица операции свързани с него като: сравнение, анализ, синтез, абстрахиране и обобщение [7].

В научната литература се изяснява и творческото мислене [13, 8, 15]. Тук ще отбележим, че понятие, близко по значение на мисленето, е интелектът. Посочва се, че двата термина изразяват „различни страни на едно и също явление“ [4], т.е те са много близки една до друга в самата им същност и отразяват различните страни на една обща концепция. Интелектът е способността на човека да осъзнава мисленето, а то е самият процес на възприятие, реакция и разбиране. Все пак има разлика: мисленето е характерно за всеки човек, докато това твърдение не важи за интелекта [2, 17]. Ще отбележим, че мисленето и интелекта се явяват отличителна черта на човека, като интелектът е по-широко понятие от мисленето [4].

Учените не дават единно определение на понятието интелект. В науката може да се каже, че съществуват две от най-разпространените му определения, а именно:

- интелект – способност да се адаптира към средата;
- интелект – способност да се решават умствено задачи.

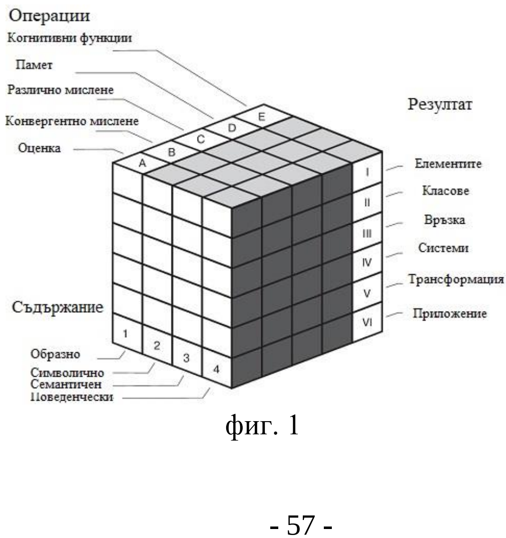
Редица психолози отбелязват, че интелекта има сложна структура, за което са писали [1] и други. Споровете за структурата на интелекта не са случайни. Те представляват не само научен интерес, но и помагат да отговорим на въпрос, който вълнува всички: от какви фактори зависи развитието на интелекта. Днес учените имат сходно мнение, че развитието му зависи както от вродените фактори, така от възпитанието, обучението и обкръжаващата среда.

В повечето дефиниции в основата на интелекта стои способността за решаване на задачи или ситуации с помощта на мисленето. Към интелектуалните способности се отнасят бързината на разбирането, лекотата при боравене с числа, концентрацията и превключването на вниманието, мисловните операции – анализ, синтез, сравнение, абстрахиране и обобщение, качествата на мисловната дейност – бързина, гъвкавост, самостоятелност, както и видовете мислене – абстрактно – логическо, техническо и нагледно – образно. Освен вниманието и мисленето, неразделна част на интелекта е и паметта – запомняне, съхраняване и възпроизвеждане на о пределена информация. Обемът на паметта, бързината на запомняне, трайността на съхраняване, точността и услужливостта на паметта са съществени признаци при неговите прояви.

Реалният успех на човека в училище, по време на следването и в професията до голяма степен зависят от неговия интелект. Като негов индикатор е мисленето със специфичните мисловни операции и качества на ума. Интелектуалната дейност е процес, в който има следните фази на мислене – ориентиране в условията на задачата, изграждане на план за действие, изпълнение на набелязания план за решаване на задачата и накрая сравняване и сверяване на получения резултат с предварително набелязаната цел.

Сред моделите на интелекта се счита, че най-известен е „кубическия модел на интелекта на Д. Гилфорд“, при който разузнаването се описва от три категории [4] (фиг. 1):

- съдържание - за какво мислим;
- операции - как мислим за него;
- резултати - това, което получаваме в резултат на умствената дейност. От това виждаме, че съотношението на мисленето и разума е много близко, интелектът е изграден върху способността на човека да мисли. И ако продуктивното мислене дава резултати, тогава може да се говори за разузнаване.



фиг. 1

В публикациите [9] са изяснени проблемът за развитието на интелекта и начините за развитието му в обучението по математика. Посочено е и какви задачи поставя този проблем. „Формирането и развитието на интелектуалните качества на ученика при обучението по математика (гъвкавост, рационалност, широта,…., критичност и самокритичност, самостоятелност и т.н.) става предимно чрез дейността решаване на математически задачи“ [1]. Затова много важно е какви задачи ще се включат към различни теми от училищния курс по математика, за да активизират и развият тези качества на ученика [11].

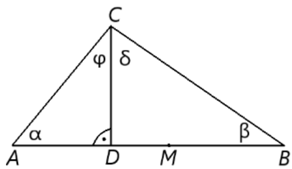
В настоящата разработка нямаме за цел да изясняваме изследванията и мненията на различни автори на това понятие. Ние приемаме, че за развитието на интелекта допринася способността на човек да решава задачи в нова среда, т.е. получените знания се използват за решаване на задачи в нови условия и да се потърсят пътища за решаването на различни проблеми.

В своята работа сме търсили такива теми от училищния курс по математика, които могат да се приложат в разнообразна нова среда. Учебното съдържание, което използвахме е свързано с темата „Прогресии“. За целта предлагаме една система от задачи, в които знанията за прогресии се прилагат в друга среда различна от стандартната.

I група: Задачи, при които прогресията явно е дадена в условието им.

Задача 1. Височината CD на $\triangle ABC$ дели страната AB на части AD и DB така, че дължините на отсечките AD, CD и DB са последователни членове на геометрична прогресия. Ако точка M е средата на страната $AB,$ да се докаже, че дължините на отсечките AD, CM и DB са последователни членове на аритметична прогресия и че точка M е центърът на описаната около $\triangle ABC$ окръжност.

Доказателство: Тук в условието на задачата е зададено, че *AD*, *CD* и *DB* са последователни членове на геометрична прогресия. Тогава записваме $CD^2 = AD.DB$, т.е. $\frac{CD}{AD} = \frac{DB}{CD}$. Това равенство показва,



черт. 1

отношението на катетите на двата правоъгълни $\triangle ACD$ и $\triangle CDB$ са равни. Тогава тези триъгълници са подобни (черт. 1) и следователно $\alpha = \delta, \beta = \varphi$. От друга страна $\beta + \delta = \alpha + \varphi = 90^0$. Тогава $\varphi + \delta = \varphi + \alpha = 90^0$, т.е. $\triangle ABC$ е правоъгълен и средата M на хипотенузата му AB е центърът на описаната около него окръжност. По-нататък $AD + DB = AB = 2CM$, т.е. $CM = \frac{AD+DB}{2}$ и следователно *AD*, *CM* и *DB* са последователни членове на аритметична прогресия.

Задача 2. Страните на $\triangle ABC$ образуват аритметична прогресия. Лицето му се отнася към лицето на равностранен триъгълник със същия периметър както 3:5. Намерете ъглите на $\triangle ABC$. Докажете, че $c^2 - 4d^2 = 12r^2$, където c е средната по-големина страна на $\triangle ABC, d$ е разликата на аритметичната прогресия като $d > 0$ и r е радиусът на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност. (УНСС, 1992 г.)

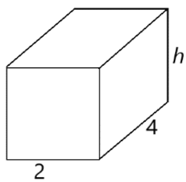
Доказателство: Тъй като страните на $\triangle ABC$ образуват аритметична прогресия, нека ги означим по следния начин $BC = c - d, AB = c, AC = c + d$. Тогава полупериметърът на $\triangle ABC$ е $p = \frac{3c}{2}$ и лицето му е $S_{\triangle ABC} = p.r = \frac{3c.r}{2}$. От друга страна можем да използваме и Хероновата формула за лице на триъгълник, т.е. $S_{\triangle ABC} = \sqrt{\frac{3c}{2}\left(\frac{c}{2} + d\right)\frac{c}{2}\left(\frac{c}{2} - d\right)} = \frac{c\sqrt{3}}{4}\sqrt{c^2 - 4d^2}$.

Следователно $\frac{3c.r}{2} = \frac{c\sqrt{3}}{4}\sqrt{c^2 - 4d^2}$, откъдето непосредствено следва $c^2 - 4d^2 = 12r^2$. По-нататък равностранният триъгълник със същия (както $\triangle ABC$) периметър $3c$ има страна c и лице $S = \frac{c^2\sqrt{3}}{4}$. Тогава (по условие) $S_{\triangle ABC} = \frac{3}{5}.\frac{c^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3c^2\sqrt{3}}{20}$. Но (от по-горе)

$S_{\triangle ABC} = \frac{c\sqrt{3}}{4}\sqrt{c^2 - 4d^2}$, така че $\frac{c\sqrt{3}}{4}\sqrt{c^2 - 4d^2} = \frac{3c^2\sqrt{3}}{20}$, откъдето след преобразуване получаваме $c = \frac{5d}{2}$. Следователно $BC = \frac{3d}{2}, AB = \frac{5d}{2}, AC = \frac{7d}{2}$. Сега от косинусовата теорема намираме $cos \sphericalangle BAC = \frac{13}{14}, cos \sphericalangle ACB = \frac{11}{14}, cos \sphericalangle ABC = -\frac{1}{2}$ (така че $\sphericalangle ABC = 120^0$).

Задача 3. Широчината и дължината на правоъгълен паралелепипед са съответно 2 cm и 4 cm. Определете височината на паралелепипеда, ако лицата на три негови съседни стени образуват аритметична прогресия.

Решение: Нека означим височината на паралелепипеда с h cm. След това пресмятаме лицата на трите различни стени на паралелепипеда (черт. 2) $S = 2.4 = 8$ cm^2; $S = 2.h$ cm^2; и $S = 4.h$ cm^2. Тъй като в условието на задачата, не е посочено в какъв ред лицата образуват аритметична прогресия, то ще трябва учениците да открият и трите възможни случаи:



черт. 2

I случай: Когато $2.h$; $4.h$ и 8 образуват аритметична прогресия в този ред.

Използваме свойството на средния член на аритметичната прогресия и получаваме уравнението $2.4.h = 2.h + 8$, откъдето намираме, че $h = 1\frac{1}{3}$ cm.

II случай: Когато 8; $2.h$ и $4.h$. образуват аритметична прогресия в този ред

Аналогично на решението на първия случай получаваме уравнението $2.2.h = 8 + 4.h$. В този случай задачата няма решение.

III случай: Когато $2.h$; 8 и $4.h$ образуват аритметична прогресия в този ред.

Използвайки същото свойство както в първи и втори случай получаваме уравнението $2.8 = 2.h + 4.h$, откъдето намираме, че $h = 2\frac{2}{3}$ cm.

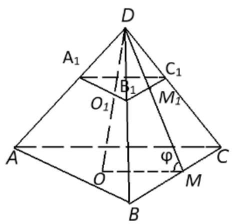
На базата на разгледаните случаи задачата има две решения: $h_1 = 1\frac{1}{3}$ cm; $h_2 = 2\frac{2}{3}$ cm.

Задача 4. Лицето на основата, лицето на околната повърхнина и лицето на пълната повърхнина на правилна триъгълна пирамида взети в този ред, образуват аритметична прогресия.

а) Да се намери големината на двустенния ъгъл, определен от околна стена и основата на пирамидата.

б) В пирамидата са вписани прави кръгови цилиндри така, че долната основа на всеки цилиндър лежи и в равнината на основата на пирамида, а горната му основа има точно по една обща точка с всяка от околната стени. Ако основният ръб на пирамидата има дължина a, да се намери радиусът на основата на този вписан в пирамидата прав кръгов цилиндър, който има най-голям обем. (ТУ-София, 2000 г.)

Доказателство: Нека пирамидата е $ABCD, AB = a, O$ е ортогоналната проекция на върха D върху основата ABC, М е средата на $BC, DM = k$ е апотемата на пирамидата и $\sphericalangle OMD = \varphi$ (черт. 3) е ъгълът между околна стена и основата. Нека B, S и $S_1 = S + B$ са лицата съответно на основата, на околната повърхнина и на пълната повърхнина на пирамидата.



черт. 3

От условието, че лицата са членове на аритметична прогрсия имаме $2S = S_1 + B = 2B + S$ или $S = 2B$. Оттук следва $3\frac{ak}{2} = \frac{2a^2\sqrt{3}}{4}$ или $k = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

а) От правоъгълния $\triangle DOM$ имаме $cos\,\varphi = \frac{OM}{DM}$ и от $OM = \frac{a\sqrt{3}}{6}, DM = k = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ получаваме $cos\,\varphi = \frac{1}{2}$. Следователно $\varphi = 60^0$.

б) Горната основа на всеки даден в условието цилиндър лежи в равнина, успоредна на равнината ABC и сечението на такава равнина с пирамидата е равностранен $\triangle A_1B_1C_1 (A_1 \in DA, B_1 \in DB, C_1 \in DC)$. Нека O_1 е центърът на този триъгълник ($(O_1 \in DO)$, а M_1 е средата на B_1C_1. От даденото в условието следва, че горната основа на цилиндъра е вписана в $\triangle A_1B_1C_1$ окръжност с център O_1 и радиус O_1M_1 и OO_1 е оста на цилиндъра. Правоъгълните $\triangle DO_1M_1$ и $\triangle DOM$ са подобни, в частност $\sphericalangle O_1M_1D = \sphericalangle OMD = 60^0$. Нека $O_1M_1 = x$. Последователно пресмятаме $OM = \frac{a\sqrt{3}}{6}, DO = OM = \sqrt{3} = \frac{a}{2}$, $DO_1 = O_1M_1\sqrt{3} = x\sqrt{3}, OO_1 = DO - DO_1 = \frac{a}{2} - x\sqrt{3}$.

Обемът на цилиндъра е $V = \pi O\ _1M_1^2 . OO_1 = \pi x^2 \left(\frac{a}{2} - x\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{2}\left(-2\sqrt{3}x^3 + ax^2\right)$. От $O_1M_1 < OM$ следва $x \in \left(0; \frac{a\sqrt{3}}{6}\right)$, при това x може да приема всяка стойност от този интервал. Накрая по стандартния начин установяваме, че функцията $f(x) = -2\sqrt{3}x^3 + ax^2$ расте в интервала $\left(0; \frac{a\sqrt{3}}{9}\right)$ и намалява в $\left(\frac{a\sqrt{3}}{9}; \frac{a\sqrt{3}}{6}\right)$ и следователно най-голямата ѝ стойност в интервала $\left(0; \frac{a\sqrt{3}}{6}\right)$ се достига при $x = \frac{a\sqrt{3}}{9}$. Така търсеният радиус на основата на цилиндъра с най-голям обем е равен на $\frac{a\sqrt{3}}{9}$.

Задача 5. Намерете трицифрено число, което се дели на 45 и цифрите му образуват аритметична прогресия.

Решение: Нека x е цифрата на стотиците, y е цифра на десетиците и z е цифрата на единиците. Тъй като x, y, z са членове на аритметична прогресия, то $2y = x + z$ (1). Търсено число има вида $100x + 10y + z$, но то по условие трябва да се дели на 45, т.е. ще има вида $100x + 10y + z = 45p$ (2). Тогава исканото число се определя от условията (1) и (2). За цифрата на единиците имаме две възможности $z = 0$ или $z = 5$, тъй като това са условията, за да се дели на 5 числото. Разглеждаме случай когато $z = 0$, тогава от (1) получаваме, че $x = 2y$, а от (2) намираме $100x + 10y = 45p$, или $20x + 2y = 9p$, $20x + \mathrm{x} = 9p$ или $7x = 3p$. Това означава, че x се дели на 3, но $x = 2y$ което означава, че x е четно число. Но единствено четно, което се дели на 3 е числото 6, тогава $y = 3$ и исканото число е 630. Да разгледаме втория случай, при който $z = 5$, тогава условията от (1) и (2) приемат вида: $2y = x + 5$ и $100x + 10y + 5 = 45p$. Последното равенство преобразуваме във вида $20x + 2y + 1 = 9p$ и по-нататък от равенството $2y = x + 5$ получаваме $21x + 6 = 9p$ или $7x + 2 = 3p$. Последното равенство е възможно при $x = 1,4,7$. Но тъй като $x + 5$ е четно число ($2y = x + 5$), то за x остават две възможностти: $x = 1$ или $x = 7$. В първия случай когато $x = 1$ $y = 3$, а във втория случай когато $x = 7$, $y = 6$. Тогава търсените числа са 135 и 765. Окончателно търсените числа са 135, 630 и 765.

II група: Задачи, при които прогресиите не са дадени в условието, а трябва да се открият и да се използват в решението им.

Задача 5. Ако е дадена функцията $f(x) = 5^x$, то решете уравнението $5f(x) - 1 = 24\big(f(0) + f(2) + f(4) + f(6) + f(8) + f(10)\big)$.

Решение: Пресмятаме последователно $f(0) = 1, f(2) = 5^2, f(4) = 5^4$, $f(6) = 5^6$, $f(8) = 5^8$, $f(10) = 5^{10}$. Тогава даденото уравнение е равносилно на $5.5^{\mathrm{x}} - 1 = 24(1 + 5^2 + 5^4 + 5^6 + 5^8 + 5^{10})$. Лесно се установява, че числата $1, 5^2, 5^4, 5^6, 5^8, 5^{10}$ образуват геометрична прогресия с първи член $\mathrm{a}_1 = 1$, частно $q = 5^2$ и сумата им е $S_6 = 1.\frac{(5^2)^6 - 1}{5^2 - 1} = \frac{5^{12} - 1}{24}$. От уравнението $5.5^{\mathrm{x}} - 1 = 24.\frac{5^{12} - 1}{24}$ намираме, че $x = 11$.

Задача 6. Да се реши системата $\left|\begin{array}{l} x^2 + xy + y^2 = 37 \\ x^2 + xz + z^2 = 28 \\ y^2 + yz + z^2 = 19 \end{array}\right.$.

Решение: Не е трудно да видим, че $x \neq y, y \neq z$ и $x \neq z$ [16]. Например, ако $x = y$, то второто уравнение на дадената система ще е в противоречие с третото. В такъв случай дадената система е равносилна на системата
$$\left|\begin{array}{l} x^3 - y^3 = 37(x-y) \\ z^3 - x^3 = 28(z-x) \\ y^3 - z^3 = 19(y-z) \end{array}\right. \qquad (1).$$
Ако съберем почленно левите и десните страни на уравненията от системата (1) получаваме $37x - 37y + 28z - 28x + 19y - 19z = 0$, откъдето следва $x + z = 2y$. В $x + z = 2y$ може да забележим, че променливите x, y и z образуват аритметична прогресия, разликата на която е равна на d, където $d \neq 0$. В такъв случай $x = y - d$ и $z = y + d$. Ще заместим $x = y - d$ и $z = y + d$ в първото и третото уравнение на дадената система и получаваме $\left|\begin{array}{l} (y-d)^2 + y(y-d) + y^2 = 37 \\ y^2 + y(y+d) + (y+d)^2 = 19 \end{array}\right.$ или $\left|\begin{array}{l} 3y^2 - 3yd + d^2 = 37 \\ 3y^2 + 3yd + d^2 = 19 \end{array}\right.$. Ако от първото уравнение извадим второто, то получаваме $yd = -3$ и $\left|\begin{array}{l} yd = -3 \\ 3y^2 + d^2 = 28 \end{array}\right.$, откъдето следва $3y^2 + \dfrac{9}{y^2} = 28 \Rightarrow 3y^4 - 28y^2 + 9 = 0$. Корените на биквадратното уравнение са $y^2 = 9, y^2 = \dfrac{1}{3}$ и като използваме, че $yd = -3$ намираме $\left|\begin{array}{l} y_1 = 3 \\ d_1 = -1 \end{array}\right.$, $\left|\begin{array}{l} y_2 = -3 \\ d_2 = 1 \end{array}\right.$, $\left|\begin{array}{l} y_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ d_3 = -3\sqrt{3} \end{array}\right.$ и $\left|\begin{array}{l} y_4 = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ d_3 = 3\sqrt{3} \end{array}\right.$. След това

заместваме в $x = y - d$ и $z = y + d$ и намираме решенията на дадената система $\begin{vmatrix} x_1 = 4 \\ y_1 = 3, \\ z_1 = 2 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} x_2 = -4 \\ y_2 = -3, \\ z_2 = -2 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} x_3 = \dfrac{10\sqrt{3}}{3} \\ y_3 = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ z_3 = -\dfrac{8\sqrt{3}}{3} \end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix} x_4 = -\dfrac{10\sqrt{3}}{3} \\ y_4 = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ z_4 = \dfrac{8\sqrt{3}}{3} \end{vmatrix}$.

Задача 7. Иво подрежда пъзел, като всеки ден подрежда с k елемента повече, отколкото предния. На дванадесетия ден той подредил два пъти по-малко елементи отколкото през първите 5 дни, взети заедно. На четиринадесетия ден Иво подредил 85 елемента. От колко елемента се състои пъзелът, ако Иво успял да го подреди на шестнадесетия ден, подреждайки с k елемента повече отколкото на петнадесетия ден? (ДЗИ, 2011 г.)

Решение: Всеки ден Иво подрежда с k елемента повече отколкото предходния. От това следва, че числата, определящи броя на подредените елементи през конкретния ден, образуват аритметична прогресия с разлика $d = k\left(k \in N\right)$. Означаваме с $a_1, a_2, a_3 ... a_{16}$ членовете на тази прогресия, като $S_5 = 2a_{12}$ (на 12 ден Иво е подредил два пъти по-малко елементи отколкото през първите 5 дни, взети заедно) и $a_{14} = 85$ (на 14 ден Иво подредил 85 елемента). От $S_5 = 2a_{12} \Leftrightarrow \dfrac{2a_1 + 4k}{2}.5 = 2\left(a_1 + 11k\right) \Leftrightarrow a_1 = 4k$ и от $a_{14} = 85$ определяме, че $k = 5.$ След това намираме и $a_1 = 20.$ Тогава броят на елементите, от които се състои пъзелът, е: $a_1 + a_2 + a_3 + a_{16} = S_{16} = \dfrac{2a_1 + 15k}{2}.16 = 920.$

Задача 8. Група младежи решили да изпратят писма по Интернет с пожелания за късмет. Първия ден всеки от тях изпратил пожелания на петима свои приятели. Втория ден всеки от получилите пожеланието го препратил на други петима свои приятели и т.н., като всеки, получил пожелание предния ден, препращал пожеланието на петима свои приятели следващия ден. При тези условия в края на петия ден броят на изпратените пожелания бил 12500. Колко са младежите от групата, започнали инициативата? (ДЗИ, 2012 г.)

Решение: Нека броят на младежите е $n\left(n \in N\right).$ Тогава броят на изпратените през първия ден писма е $a_1 = 5n,$ през втория ден е $a_2 = 5a_1$ и т.н. Числата a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 образуват геометрична прогресия с частно $q = 5.$ По условие $a_5 = 12500 \Leftrightarrow a_1 q = 12500 \Leftrightarrow 5n.5^4 = 12500 \Leftrightarrow n = 4.$ Следователно младежите от групата, започнали инициативата, са 4.

Задача 9. В равностранен триъгълник със страна *a*, е вписан кръг. След това в този триъгълник са вписани още три кръга, допиращи се до първия кръг и страните на триъгълника и още три кръга, допиращи се до вторите кръгове и страните на триъгълника и т.н. Да се намери сумата от лицата на всички вписани кръгове. (ВВВУ, 1984 г.) [12].

Решение: Радиусът на вписания в равностранния триъгълник кръг е $R_0 = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}.$ Ако построите допирателните на този кръг, успоредни на страните на триъгълника те отсичат от последния три равностранни триъгълника с една и съща страна $a_1 = \dfrac{a}{3}.$ Следващите три кръга са вписани в тези триъгълници и имат един и същи радиус $R_1 = \dfrac{a_1\sqrt{3}}{6} = \dfrac{a\sqrt{3}}{18}.$ Следващите три кръга са вписани в тези триъгълници и имат един и същи радиус $R_2 = \dfrac{a\sqrt{3}}{54}$ и т.н. Сумата от лицата на всички вписани кръгове е $S = S_0 + 3\left(S_1 + S_2 + \ldots\right) = \pi R_0^2 + 3\left(\pi R_1^2 + \pi R_2^2 + \ldots\right) = \dfrac{11}{96}\pi a^2.$

Задача 10. Пресметнете сумата $2 + 22 + 222 + \ldots + \underbrace{22\ldots2}_{n-\text{цифри}}$.

Решение: Нека дадената сума преобразуваме по следния начин: $2 + 22 + 222 + \ldots + 22\ldots2 = 2[1 + \left(1 + 10\right) + \left(1 + 10 + 10^2\right) + \ldots +$ $\left(1 + 10 + 10^2 + \ldots + 10^{n-1}\right)] = 2[S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_n]$, където S_k – е сумата на k членовете на геометрична прогресия $1, 10, 10^2, \ldots \left(k = 1, 2, \ldots n\right)$. Като използваме формулата $S_k = \dfrac{b_1\left(q^k - 1\right)}{q - 1}$ за сумата на членовете на геометрична прогресия, получаваме

$$2[S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_n] = \left(\frac{10 - 1}{9} + \frac{10^2 - 1}{9} + \frac{10^3 - 1}{9} + \ldots + \frac{10^n - 1}{9}\right) =$$

$$= \frac{2}{9}[10\left(1 + 10 + 10^2 + \ldots + 10^{n-1}\right) - n] =$$

$$\frac{2}{9}\left[\frac{10\left(10^n - 1\right)}{9} - n\right] = \frac{2\left(10^{n+1} - 10 - 9n\right)}{81}.$$

За разлика от стандартните задачи, предложените от нас, изискват при решаването им проява на такива интелектуални качества като съобразителност, гъвкавост, пренос на знания в нови условия и т.н. Като заключение ще посочим, че за развитието на интелекта допринася владеенето на мисловните операции (анализ, синтез, сравнение, абстрахиране и обобщение и т.н), подбор на разнообразни видове задачи (задачи с пренос на знания, задачи решавани по различни начини и т.н.) [10].

Ефективни средства за развитието на мисленето и интелекта на учениците е използването на различни начини на обучение по математика. Освен това сме се стремили да научим учениците да обобщават и систематизират придобитите знания; да могат да осъществяват вътрешнопредметни и междупредметни връзки; самостоятелно да придобиват знания; да се приучават към изследователска работа; да превръщат обучението в творчески процес.

ЛИТЕРАТУРА:

[1] Айзенк, Г. Ю. (1995). Интеллект: новый взгляд, Вопросы психологии. № 1. С. 111-131.

[2] Александров, П., (1990). Интелект и обучение, Народна просвета, София

[3] Аристова, Л. П. (1968). Активность учения школьников, Москва: Педагогика, 131-141

[4] Баданина, Л., (2012). Психология познавательных процессов, Флинта, Москва, ISBN 978-5-9765-0226-0

[5] Гроздев, С., В. Ненков, Св. Дойчев. За високи постижения в математиката (в помощ на учителя) (2012). София: „Фондация Миню Балкански“ & „Фондация Америка за България“, ISBN 978-954-92830-3-7

[6] Кликс, Ф. (1983). Пробуждающееся мышление, У истоков человеческого интеллекта, Москва, „Прогресс“

[7] Маврова, Р., & Бойкина, (2009). Средства за активизиране мисленето на учениците при обучението по математика, ПУ „Паисий Хилендарски“, Научни трудове, 46, 49-57

[8] Маврова, Р., (2006). За интелектуалните качества на учениците при обучението по математика, ПУ „Паисий Хилендарски", Научни трудове, 43, кн. 2, 15-22

[9] Mavrova, R., & Boikina, D. (2005) Intellect and Directions for Intellectual Development of Students in the Education in Mathematics. International, Conference on Mathematics Education 3-5 June 2005, Svishtov-Bulgaria, Sofia, p. 357-361, ISBN 954-8880-21-0

[10] Павлова, Н., & Харизанов, Кр., (2015). Технологии за описание на урок в обучението по математика, информатика и информационни технологии, УИ "Епископ Константин Преславски", ISBN 978-619-201-052-2, Шумен

[11] Павлова, Н., (2016). Методическа и технологична реализация на дидактическо проектиране в обучението по математика, Математика и информатика, 59, 2, 204-214

[12] Паскалев, Г., (1987). Конкурсни задачи по математика за постъпване във ВУЗ, Наука и изкуство, София

[13] Пирьов, Г., (2000). Проблеми на когнитивната психология, Учене, мислене, интелигентност, АИ „Проф. Марин Дринов", София, ISBN 954430715

[14] Рубинщайн, С., (1958). О мышлении и путях его исследовании, АНСССР

[15] Рубинщайн, С. (1996). Основы общей психологии. СПб: Питер Ком

[16] Супрун, В., (2008). Математика для старшеклассников, Либраком, ISBN 978-5-397-00050-5

[17] Холодная, М., (2019). Психология интеллекта: парадоксы исследования, Москва, Юрайт, ISBN 978-5-534-07365-2

Диана Р. Стефанова
ОУ „Никола Вапцаров", гр. Асеновград
e-mail: dianastefanova13@gmail.com