

ФОКАЛНИ КРИВИ В ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО*

ГЕОРГИ Х. ГЕОРГИЕВ, ЦВЕТЕЛИНА Л. ДИНКОВА, РАДОСТИНА П. ЕНЧЕВА

FOCAL CURVES IN EUCLIDEAN SPACE

GEORGI H. GEORGIEV, TSVETELINA L. DINKOVA, RADOSTINA P. ENCHEVA

ABSTRACT: We consider the focal curves of some classes of space curves. They are explored cases of maps between space curve and the corresponding focal curve. It is found the relation between Frenet frames of the corresponding curves.

KEYWORDS: focal curves, focal curvatures, helix, Bertrand curves

1. Въведение

Понятията фокална крива и фокални кривини на гладка крива в $m+1$ -мерно Евклидово пространство R^{m+1} се въвеждат за първи път от Uribe-vargas през 2005 в статията [4]. В случая на равнина, фокалната крива на дадена равнинна крива на Френе γ е нейната еволюта, която е геометричното място на центровете на кривината на γ . Фокалната й кривина е радиусът на кривината на γ . Uribe-vargas разглежда случая, когато $m \geq 2$.

Нека $\gamma: R \rightarrow R^{m+1}$ е крива на Френе, параметризирана спрямо естествен параметър s , с евклидови кривини $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_m$ и вектори на Френе $(t, n_1, n_2, \dots, n_m)$ в произволна точка от γ . Кривата C_γ , с векторно-параметрично уравнение $C_\gamma(s) = \gamma(s) + c_1 \cdot n_1 + c_2 \cdot n_2 + \dots + c_m \cdot n_m$, се нарича фокална крива на кривата $\gamma = \gamma(s)$, а коефициентите c_1, c_2, \dots, c_m се наричат нейни фокални кривини. В теорема 2 от [4] е дадена зависимостта между евклидовите кривини и фокалните кривини на кривата $\gamma = \gamma(s)$, а именно:

$$\kappa_i = \frac{c_1 \cdot c'_1 + c_2 \cdot c'_2 + \dots + c_{i-1} \cdot c'_{i-1}}{c_{i-1} \cdot c_i} \text{ за } i \geq 2. \quad (1)$$

Първата фокална кривина c_1 е винаги различна от нула и е изпълнено, че $c_1 = \frac{1}{\kappa_1}$.

Друга връзка между фокалните кривини и така наречените шейп кривини на γ , които я определят с точност до подобност, запазваща ориентацията в евклидовото пространство, е получена в [2].

В теорема 5. от статията [4], Uribe-vargas формулира и доказва, че векторите на Френе (с точност до знак) на фокалната крива C_γ на кривата γ съвпадат с векторите на Френе на γ , но са получени от тях чрез циклична замяна, т.е. ако $(T, N_1, N_2, \dots, N_m)$ са векторите на Френе на C_γ , то $T = \varepsilon n_m$, $N_k = \delta_k n_{m-k}$, за $k = 1, \dots, m-1$, и $N_m = \pm t$, където $\varepsilon(s)$ е знака на $(c'_m + c_{m-1} \kappa_m)(s)$, а $\delta_k(s)$ е знака на $(-1)^k \varepsilon(s) \kappa_m(s)$ за $k = 1, \dots, m-1$. Освен това е намерена

* This paper is supported by Shumen University under Grant RD-08-227/12.03.2014

връзка в явен вид между евклидовите кривини на C_γ и тези на γ , а именно, че ако K_1, K_2, \dots, K_m са евклидовите кривини на C_γ , то

$$\frac{K_1}{|\kappa_m|} = \frac{K_2}{\kappa_{m-1}} = \dots = \frac{|K_m|}{\kappa_1} = \frac{1}{|c'_m + c_{m-1}k_m|}. \quad (2)$$

2. Примери на фокални криви в \mathbb{R}^3

В тази точка ще разгледаме три примера на пространствени криви с техните фокални криви и фокални кривини. Всички пресмятания и визуализации са направени с компютърната система *Mathematica*.

Пример 1. (виж Фиг.1) Нека $\gamma = \gamma(q)$ е конична винтова линия, която се задава със скалярно-параметричните уравнения $\gamma(q) = (aq \cos q, aq \sin q, bq)$, $a, b = \text{const} \neq 0$.

За евклидови кривини κ_1 и κ_2 на γ имаме, че

$$\kappa_1 = \frac{a\sqrt{a^2(2+q^2)^2 + b^2(4+q^2)}}{\sqrt{b^2 + a^2(1+q^2)}^3}, \quad \kappa_2 = \frac{b(6+q^2)}{a^2(2+q^2)^2 + b^2(4+q^2)},$$

а за фокалните й кривини c_1 и c_2 получаваме, че

$$c_1 = \frac{1}{\kappa_1} = \frac{\sqrt{b^2 + a^2(1+q^2)}^3}{a\sqrt{a^2(2+q^2)^2 + b^2(4+q^2)}}, \quad c_2 = \frac{c'_1}{\kappa_2} = \frac{q(b^2(7a^2 - b^2) + a^4(8 + 6q^2 + q^4))}{ab(6+q^2)\sqrt{a^2(2+q^2)^2 + b^2(4+q^2)}}.$$

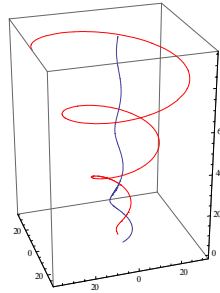
Единични вектори n_1 и n_2 по главната нормала и бинормалата, съответно, на кривата γ имат координати:

$$n_1(q) = \left(\frac{-q(b^2 + a^2(2+q^2))\cos q + (2b^2 + a^2(2+q^2))\sin q}{\sqrt{b^2 + a^2(1+q^2)}\sqrt{a^2(2+q^2)^2 + b^2(4+q^2)}}, \right. \\ \left. \frac{-q(b^2 + a^2(2+q^2))\sin q + (2b^2 + a^2(2+q^2))\cos q}{\sqrt{b^2 + a^2(1+q^2)}\sqrt{a^2(2+q^2)^2 + b^2(4+q^2)}}, \frac{abq}{\sqrt{b^2 + a^2(1+q^2)}\sqrt{a^2(2+q^2)^2 + b^2(4+q^2)}} \right) \\ n_2(q) = \left(b \frac{-2\cos q + q\sin q}{\sqrt{a^2(2+q^2)^2 + b^2(4+q^2)}}, b \frac{2\sin q + q\cos q}{\sqrt{a^2(2+q^2)^2 + b^2(4+q^2)}}, b \frac{a(2+q^2)}{\sqrt{a^2(2+q^2)^2 + b^2(4+q^2)}} \right).$$

Тогава, скалярно-параметричните уравнения на фокалната крива $C_\gamma(s) = \gamma(s) + c_1.n_1 + c_2.n_2$ на кривата γ имат вида

$$C_\gamma(q) = \left(-\frac{(a^2 + b^2)(q\cos q + 3\sin q)}{a(6+q^2)}, \frac{(a^2 + b^2)(-q\sin q + 3\cos q)}{a(6+q^2)}, \frac{(a^2 + b^2)q(4+q^2)}{b(6+q^2)} \right),$$

където $s = \frac{aq\sqrt{b^2 + a^2(1+q^2)} + (a^2 + b^2) \cdot \ln\left(a\left(aq + \sqrt{b^2 + a^2(1+q^2)}\right)\right)}{2a}$, $\frac{ds}{dq} = \sqrt{b^2 + a^2(1+q^2)}$.



Фиг.1: Коничната винтова линия и нейната фокална крива

Пример 2. Нека $\gamma = \gamma(q)$ е хеликоидална крива върху логаритмична спирала със скаларно-параметрични уравнения $\gamma(q) = (ae^{bq} \cos q, ae^{bq} \sin q, cq)$, $a, b, c = \text{const} \neq 0$.

За евклидови кривини κ_1 и κ_2 на γ намираме, че

$$\kappa_1 = \frac{a(1+b^2)e^{bq} \sqrt{c^2 + a^2 e^{2bq}}}{\sqrt{c^2 + a^2(1+b^2)} e^{2bq}{}^3}, \quad \kappa_2 = \frac{c}{c^2 + a^2 e^{2bq}},$$

а за фокалните й кривини c_1 и c_2 :

$$c_1 = \frac{1}{\kappa_1} = \frac{\sqrt{c^2 + a^2(1+b^2)} e^{2bq}{}^3}{a(1+b^2)e^{bq} \sqrt{c^2 + a^2 e^{2bq}}}, \quad c_2 = \frac{be^{-bq}(c^2(-c^2 + 2a^2 b^2 e^{2bq}) + a^4(1+b^2)e^{4bq})}{a(1+b^2)c \sqrt{c^2 + a^2 e^{2bq}}}.$$

Единични вектори n_1 и n_2 по главната нормала и бинормалата, съответно, на γ имат координати:

$$n_1 = \left(\frac{c^2((-1+b^2)\cos q - 2b\sin q) - a^2(1+b^2)e^{2bq}(\cos q + b\sin q)}{(1+b^2)\sqrt{c^2 + a^2 e^{2bq}} \sqrt{c^2 + a^2(1+b^2)} e^{2bq}}, \right. \\ \left. \frac{c^2((-1+b^2)\sin q + 2b\cos q) + a^2(1+b^2)e^{2bq}(-\sin q + b\cos q)}{(1+b^2)\sqrt{c^2 + a^2 e^{2bq}} \sqrt{c^2 + a^2(1+b^2)} e^{2bq}}, -\frac{abce^{bq}}{\sqrt{c^2 + a^2 e^{2bq}} \sqrt{c^2 + a^2(1+b^2)} e^{2bq}} \right) \\ n_2 = \left(-c \frac{2b\cos q + (-1+b^2)\sin q}{(1+b^2)\sqrt{c^2 + a^2 e^{2bq}}}, c \frac{-2b\sin q + (-1+b^2)\cos q}{(1+b^2)\sqrt{c^2 + a^2 e^{2bq}}}, \frac{ae^{bq}}{\sqrt{c^2 + a^2 e^{2bq}}} \right).$$

Отгук, скаларно-параметричните уравнения на фокалната крива $C_\gamma(q) = C_\gamma(s(q)) = \gamma(s(q)) + c_1 \cdot n + c_2 \cdot b$ на кривата γ имат вида:

$$C_\gamma(q) = \left(\frac{-2a^2 b^2 (1+b^2) e^{bq} (\cos q + b \sin q) + e^{-bq} c^2 ((3b^2 - 1) \cos q + b(b^2 - 3) \sin q)}{a(1+b^2)^2}, \right. \\ \left. \frac{2a^2 b^2 (1+b^2) e^{bq} (-\sin q + b \cos q) - e^{-bq} c^2 ((-3b^2 + 1) \sin q + b(b^2 - 3) \cos q)}{a(1+b^2)^2}, \right. \\ \left. \frac{a^2 b e^{2bq}}{c} + c \left(-\frac{2b}{1+b^2} + q \right) \right).$$

Пример 3. (виж фиг.2) Нека $\gamma = \gamma(q)$ е обобщена винтова линия със скаларно-параметрични уравнения $\gamma(q) = (2q, \ln q, q^2)$, $q > 0$.

За евклидови кривини κ_1 и κ_2 на $\gamma = \gamma(q)$ получаваме, че $\kappa_1 = -\kappa_2 = \frac{2q}{(1+2q^2)^2}$, а за

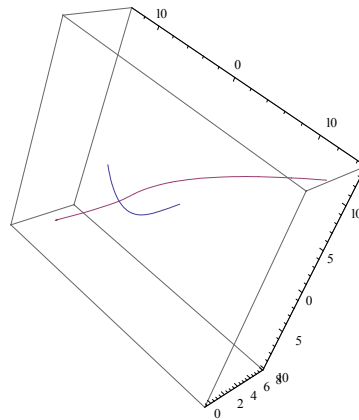
фокалните ѝ кривини c_1 и c_2 : $c_1 = \frac{1}{\kappa_1} = \frac{(1+2q^2)^2}{2q}$, $c_2 = \frac{1-6q^2}{2q}$. Единични вектори n_1 и n_2

по главната нормала и бинормалата, съответно, на γ имат координати:

$$n_1 = \left(\frac{1-2q^2}{1+2q^2}, \frac{-2q}{1+2q^2}, \frac{2q}{1+2q^2} \right) \text{ и } n_2 = \left(\frac{2q}{1+2q^2}, \frac{-2q^2}{1+2q^2}, \frac{-1}{1+2q^2} \right).$$

Тогава, за фокалната крива $C_\gamma = C_\gamma(q)$ на γ получаваме, че

$$C_\gamma(q) = \left(\frac{1+2q}{2q} - \frac{8q}{1+2q^2}, \ln q - q \frac{1-6q^2}{1+2q^2} - (1+2q^2), 1+3q^2 - \frac{1-6q^2}{2q(1+2q^2)} \right).$$



Фиг.2

3. Изображения между пространствена крива и съответната ѝ фокална крива.

Нека $\gamma = \gamma(s) : R \rightarrow R^3$ е крива на Френе, параметризирана спрямо естествен параметър $s, s \in I \subset R$, с евклидови кривини κ_1 и $\kappa_2 \neq 0$ и фокални кривини c_1 и c_2 . Прилагайки формулите (1), имаме, че

$$c_1 = \frac{1}{\kappa_1}, \quad c_2 = \frac{\left(\frac{1}{\kappa_1} \right)'}{\kappa_2}.$$

Векторно-параметричното уравнение на съответната на γ фокална крива има вида

$$C_\gamma(s) = \gamma(s) + c_1 \cdot n_1 + c_2 \cdot n_2,$$

където n_1 и n_2 са единични вектори по главната нормала и бинормалата, съответно, в точка $\gamma(s)$ от γ . Ако K_1 и K_2 са евклидовите кривини на кривата $C_\gamma(s)$, а N и B са единични вектори по главната нормала и бинормалата, съответно, в точка $C_\gamma(s)$, то от (2) за $m=2$ имаме, че

$$\frac{K_1}{|K_2|} = \frac{K_2}{\kappa_1} = \frac{1}{|c_2' + c_1 \cdot \kappa_2|} \text{ и } T = \pm n_2, \quad N = -n_1, \quad B = \pm t,$$

където t е единичният допирателен вектор в съответната точка на γ .

Твърдение 1. Нека $\gamma = \gamma(s)$ е винтовата линия, параметризирана спрямо естествен параметър s , а $C_\gamma = C_\gamma(s)$ е съответната ѝ фокална крива. Тогава

а) изображението $F : \gamma(s) \rightarrow C_\gamma(s), s \in I \subset \mathbb{R}$ е инволютивно изображение, т.е. F е различно от идентитета I в пространството и $F \circ F = F^2 = I$, тогава и само тогава, когато евклидовите кривини κ_1 и κ_2 на γ са равни;

б) фокалната крива на C_γ е кривата γ .

Доказателство: Нека скалярно-параметричните уравнения на винтовата линия спрямо декартовата координатна система $Oxyz$ имат вида:

$$\gamma(s) = \left(a \cdot \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, a \cdot \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b \cdot s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), \quad a, b = \text{const.}$$

За евклидовата кривина κ_1, κ_2 и фокалните кривини c_1, c_2 на γ са изпълнени равенствата

$$\kappa_1 = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad \kappa_2 = \frac{b}{a^2 + b^2}, \quad c_1 = \frac{a^2 + b^2}{a} = \text{const}, \quad c_2 = 0. \quad \text{Тъй като единичният вектор } n_1$$

по главните нормали на γ има координати $(-\cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, -\sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, 0)$, то

получаваме, че скалярно-параметричните уравнения на фокалната крива $C_\gamma(s) = \gamma(s) + c_1 \cdot n_1$ на γ имат вида

$$\begin{aligned} C_\gamma(s) &= \left(\left(a - \frac{a^2 + b^2}{a} \right) \cdot \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \left(a - \frac{a^2 + b^2}{a} \right) \cdot \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b \cdot s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) = \\ &= \left(-\frac{b^2}{a} \cdot \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, -\frac{b^2}{a} \cdot \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b \cdot s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right). \end{aligned}$$

Следователно, изображението $F : \gamma(s) \rightarrow C_\gamma(s), s \in I \subset \mathbb{R}$ се задава с формулите

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{b^2}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{b^2}{a^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

където $X = (x, y, z)^T$ е произволна точка от γ , а $X' = (x', y', z')^T$ е съответната ѝ точка от C_γ . Ясно е, че F е инволютивно изображение тогава и само тогава, когато $a = b \Leftrightarrow \kappa_1 = \kappa_2$ и с това условието в подточка а) е доказано.

б) За евклидовата кривина K_1 и фокалните кривини C_1 и C_2 на C_γ са изпълнени равенствата $K_1 = \kappa_1, C_1 = c_1 = \text{const}, C_2 = 0$. Ако \tilde{s} е естествения параметър на C_γ , то за

фокалната крива $C_{C_\gamma} = C_{C_\gamma}(\tilde{s})$ на кривата $C_\gamma = C_\gamma(\tilde{s})$ получаваме, че $C_{C_\gamma}(\tilde{s}) = C_\gamma(\tilde{s}) + C_1 \cdot N = \gamma(\tilde{s}) + c_1 \cdot n_1 + c_1 \cdot (-n_1) = \gamma(\tilde{s})$, т.е. $C_{C_\gamma} \equiv \gamma$.

Твърдение 2. Нека $\gamma = \gamma(s)$ е обобщена винтовата линия, параметризирана спрямо естествен параметър s , а $C_\gamma = C_\gamma(s)$ е съответната ѝ фокална крива. Ако фокалната кривина c_2 на γ е константа, то фокалната крива на C_γ и кривата γ са еквивалентни с точност до движение в пространството.

Доказателство: Тъй като γ е обобщена винтова линия, то за отношението от евклидовите ѝ кривини κ_1 и κ_2 е изпълнено, че $\frac{\kappa_2}{\kappa_1} = m = const$. Оттук, ако $C_\gamma(s) = \gamma(s) + c_1 \cdot n_1 + c_2 \cdot n_2$, то

диференцирайки спрямо s , получаваме, че

$$C_\gamma'(s) = t + c_1 \cdot n_1 - c_1 \cdot \kappa_1 \cdot t + c_1 \cdot \kappa_2 \cdot n_2 - c_2 \cdot \kappa_2 \cdot n_1 = (c_1 \cdot \kappa_2) \cdot n_2 = m \cdot n_2.$$

Следователно, ако \tilde{s} е естествения параметър на C_γ , то $d\tilde{s} = |C_\gamma'(s)| \cdot ds = m \cdot ds$. За евклидовата кривина K_1 и фокалните кривини C_1 и C_2 на кривата C_γ получаваме, че $K_1 = \kappa_1$, $C_1 = c_1$ и

$$C_2 = \frac{dC_1}{d\tilde{s}} = \frac{\kappa_2^2}{\kappa_1^2} \cdot \frac{c_1}{\kappa_2} = c_2 \cdot m^2 = const.$$

За фокалната крива $C_{C_\gamma} = C_{C_\gamma}(\tilde{s})$ на кривата

$$C_{C_\gamma}(\tilde{s}) = C_\gamma(\tilde{s}) + C_1 \cdot N + C_2 \cdot B = \gamma(\tilde{s}) + c_1 \cdot n_1 + c_2 \cdot n_2 + c_1 \cdot (-n_1) + c_2 \cdot m^2 \cdot (-t) = \gamma(\tilde{s}) + c_2 \cdot n_2 - c_2 \cdot m^2 \cdot t$$

и диференцирайки спрямо \tilde{s} имаме, че $C_{C_\gamma}' = (C_2' + C_1 \cdot K_2) \cdot B = \frac{K_2}{K_1} \cdot B$. Ако $\tilde{\tilde{s}}$ е естествения

параметър на кривата C_{C_γ} , то $d\tilde{\tilde{s}} = |C_{C_\gamma}'(\tilde{s})| \cdot d\tilde{s} = \frac{K_2}{K_1} \cdot \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \cdot ds = \frac{\kappa_1^2}{\kappa_2 \cdot \kappa_1} \cdot \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \cdot ds = ds$, т.е. $\tilde{\tilde{s}}$ е

естествен параметър и за кривата C_{C_γ} . Оттук, ако $\tilde{\kappa}_1$ и $\tilde{\kappa}_2$ са евклидовите кривини на C_{C_γ} ,

то използвайки формулите $\frac{\tilde{\kappa}_1}{|\tilde{K}_2|} = \frac{\tilde{\kappa}_2}{K_1} = \frac{1}{|C_2' + C_1 \cdot K_2|}$ намираме, че $\tilde{\kappa}_1 = K_1 = \kappa_1$ и

$$\tilde{\kappa}_2 = \frac{K_1^2}{K_2} = \frac{\kappa_1^2}{\frac{\kappa_1^2}{\kappa_2}} = \kappa_2,$$

откъдето съгласно основната теорема в диференциалната геометрия на кривите следва, че кривите C_{C_γ} и γ са еквивалентни с точност до движение в пространството.

Твърдение 3. Фокалната крива на конична спирала е конична спирала.

Доказателство: Нека $\gamma(q) = (a e^q \cos q, a e^q \sin q, b e^q)$ е конична спирала, лежаща на конуса с

уравнение $S: x^2 + y^2 = \left(\frac{a}{b} z\right)^2$. Намирайки фокалната крива $C_\gamma = C_\gamma(q)$ на кривата $\gamma = \gamma(q)$,

получаваме, че скарано-параметричните ѝ уравнения имат вида:

$C_\gamma(q) = \left(-\frac{a^2+b^2}{a}e^q \cos q, -\frac{a^2+b^2}{a}e^q \sin q, 2\frac{a^2+b^2}{b}e^q \right)$. Оттук следва, че кривата C_γ лежи на конуса с уравнение $\bar{S}: x^2 + y^2 = \left(\frac{b}{2a}z\right)^2$ и също е конична спирала.

Ако $\gamma = \gamma(s)$ е правилна линия с ненулева кривина κ_1 , то казваме, че γ е крива на Берtrand, ако съществува друга крива, на която главните нормали съвпадат с тези на γ в съответните им точки (виж [1]). Интересни свойства на винтовите линии и на кривите на Берtrand са получени и в [3].

Теорема 1. Нека $C_\gamma^{(1)}$ е фокалната крива на правилна линия $\gamma = \gamma(s)$, параметризирана спрямо естествен параметър s , а $C_\gamma^{(n)}$ е фокалната крива на кривата $C_\gamma^{(n-1)}$, $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Тогава

$$\frac{\kappa_1^{(n)}}{\kappa_2^{(n-1)}} = \frac{|\kappa_2^{(n)}|}{\kappa_1^{(n-1)}} = \frac{1}{\left| \left(c_2^{(n-1)} \right) + c_1^{(n-1)} \kappa_2^{(n-1)} \right|}, \text{ за всяко } n \in \mathbb{N}, n \geq 1, \quad (3)$$

където $\kappa_1^{(i)}, \kappa_2^{(i)}$ са евклидовите кривини, а $c_1^{(i)}, c_2^{(i)}$ са фокалните кривини на фокалната крива $C_\gamma^{(i)}$, за $i \geq 1$. С $\kappa_1^{(0)}, \kappa_2^{(0)}$ са означени евклидовите кривини, а с $c_1^{(0)}, c_2^{(0)}$ са означени фокалните кривини на линията γ .

Доказателство: Векторно-параметричното уравнение на съответната на γ фокална крива има вида $C_\gamma^{(1)}(s) = \gamma(s) + c_1^{(0)} \cdot n + c_2^{(0)} \cdot b$, където n и b са единични вектори по главната

нормала и бинормалата, съответно, а $c_1^{(0)} = \frac{1}{\kappa_1^{(0)}}, c_2^{(0)} = \frac{c_1^{\prime(0)}}{\kappa_2^{(0)}}$ са фокалните кривини в точка

$\gamma(s)$ от γ . Втората фокална крива, която е фокалната крива на кривата $C_\gamma^{(1)}$, има векторно-

параметрично уравнение от вида $C_\gamma^{(2)}(s) = C_\gamma^{(1)}(s) + c_1^{(1)} \cdot n_1 + c_2^{(1)} \cdot b_1$, където $c_1^{(1)}, c_2^{(1)}$ са

фокалните кривини на кривата $C_\gamma^{(1)}$, а n_1, b_1 са единични вектори по главната нормала и

бинормалата, съответно, на $C_\gamma^{(1)}$. Ако с s_1 означим естествения параметър на $C_\gamma^{(1)}$ и намерим

производната на втората фокална крива относно този параметър, получаваме, че $\frac{dC_\gamma^{(2)}}{ds_1} = \left(\frac{dc_2^{(1)}}{ds_1} + c_1^{(1)} \cdot \kappa_2^{(1)} \right) \cdot b_1$. Тогава $\left| \frac{dC_\gamma^{(2)}}{ds_1} \right| = \left| \frac{dc_2^{(1)}}{ds_1} + c_1^{(1)} \cdot \kappa_2^{(1)} \right| = \frac{ds_2}{ds_1}$, където s_2 е естествения

параметър на кривата $C_\gamma^{(2)}$. Оттук, за единичния допирателен вектор t_2 на втората фокална

крива намираме, че $t_2 = \frac{dC_\gamma^{(2)}}{ds_2} = \frac{dC_\gamma^{(2)}}{ds_1} \cdot \frac{ds_1}{ds_2} = \frac{\left(\frac{dc_2^{(1)}}{ds_1} + c_1^{(1)} \cdot \kappa_2^{(1)} \right) \cdot b_1}{\left| \frac{dc_2^{(1)}}{ds_1} + c_1^{(1)} \cdot \kappa_2^{(1)} \right|} = \varepsilon \cdot b_1$, където

$$\varepsilon = \text{sign} \left(\frac{dc_2^{(1)}}{ds_1} + c_1^{(1)} \cdot \kappa_2^{(1)} \right). \text{ Тогава } t_2' = \frac{dt_2}{ds_2} = \frac{dt_2}{ds_1} \cdot \frac{ds_1}{ds_2} = \frac{\varepsilon \cdot \frac{db_1}{ds_1}}{\varepsilon \cdot \left(\frac{dc_2^{(1)}}{ds_1} + c_1^{(1)} \cdot \kappa_2^{(1)} \right)} = \frac{-\kappa_2^{(1)} \cdot n_1}{\frac{dc_2^{(1)}}{ds_1} + c_1^{(1)} \cdot \kappa_2^{(1)}}.$$

Използвайки формулите на Френе за правилна линия, получаваме, че кривината $\kappa_1^{(2)}$ на

втората фокална крива $C_\gamma^{(2)}$ е равна на $\kappa_1^{(2)} = |t_2'| = \left| \frac{-\kappa_2^{(1)}}{\frac{dc_2^{(1)}}{ds_1} + c_1^{(1)} \cdot \kappa_2^{(1)}} \right|$, а единичните вектори

n_2, b_2 по главната нормала и бинормалата, съответно, на $C_\gamma^{(2)}$ са: $n_2 = \frac{t_2'}{|t_2'|} = -\varepsilon \cdot \delta \cdot n_1$,

$b_2 = t_2 \times n_2 = -\delta \cdot b_1 \times n_1 = \delta \cdot t_1$, където $\varepsilon = \text{sign} \left(\frac{dc_2^{(1)}}{ds_1} + c_1^{(1)} \cdot \kappa_2^{(1)} \right)$, $\delta = \text{sign} \kappa_2^{(1)}$. Следователно,

за торзията $\kappa_2^{(2)}$ на кривата $C_\gamma^{(2)}$ имаме, че $\kappa_2^{(2)} = -\frac{db_2}{ds_2} \cdot n_2 = -\delta \cdot \frac{dt_1}{ds_2} \cdot (-\varepsilon \delta) \cdot n_1 = \varepsilon \frac{t_1' \cdot n_1}{\frac{ds_2}{ds_1}} = \varepsilon \frac{\kappa_1^{(1)}}{\left| \frac{dc_2^{(1)}}{ds_1} + c_1^{(1)} \cdot \kappa_2^{(1)} \right|}$, откъдето получаваме, че

$$\left| \kappa_2^{(2)} \right| = \frac{\kappa_1^{(1)}}{\left| \left(\frac{dc_2^{(1)}}{ds_1} \right)' + c_1^{(1)} \cdot \kappa_2^{(1)} \right|} \text{ и } \kappa_1^{(2)} = \frac{|\kappa_2^{(1)}|}{\left| \left(\frac{dc_2^{(1)}}{ds_1} \right)' + c_1^{(1)} \cdot \kappa_2^{(1)} \right|}. \text{ Оттук, } \frac{|\kappa_2^{(2)}|}{\kappa_1^{(1)}} = \frac{\kappa_1^{(2)}}{|\kappa_2^{(1)}|} = \frac{1}{\left| \left(\frac{dc_2^{(1)}}{ds_1} \right)' + c_1^{(1)} \cdot \kappa_2^{(1)} \right|}, \text{ с което}$$

равенствата (3) са доказани за $n = 2$. Чрез метода на математическата индукция се доказва, че равенствата (3) са изпълнени и за произволно естествено число $n \geq 1$.

Следствие. Кривите γ и $C_\gamma^{(n)}$ за $n \geq 1$ са криви на Берtrand.

Доказателство: В хода на доказателството на теорема 1 се вижда, че $n_i = \delta_i \cdot n$, където $\delta_i = \text{sign} (-1)^i \varepsilon \cdot \kappa_2^{(i)}$ за $i \geq 1$, откъдето следва верността и на самото твърдение.

За представяне на преобразованията в следващото твърдение ще използваме така наречените хомогенни координати. Ако $X(x, y, z)$ е точка с координати (x, y, z) спрямо

координатната система $Oxyz$, то наредената ненулева четворка от числа (x_1, x_2, x_3, x_4) , определена с точност до ненулев множител, където $x = \frac{x_1}{x_4}, y = \frac{x_2}{x_4}, z = \frac{x_3}{x_4}, x_4 \neq 0$ се нарича хомогенни координати на точката X .

Твърдение 5. Нека $\gamma = \gamma(s)$ е винтовата линия, параметризирана спрямо естествен параметър s , а $C_\gamma = C_\gamma(s)$ е съответната ѝ фокална крива. Тогава изображението $\varphi: \gamma_s \rightarrow C_{\gamma_s}$, при което триедъра на Френе на кривата γ в точка $\gamma(s)$ се изобразява в триедъра на Френе на фокалната ѝ крива C_γ в точка $C_\gamma(s)$, т.е. $\varphi(t, n, b)_{\gamma(s)} = (T, N, B)_{C_\gamma(s)}$, е инволютивно изображение.

Доказателство: Тъй като $\varphi(t) = T = b, \varphi(n) = N = -n, \varphi(b) = B = t$, то получаваме, че $\varphi = R_b^\pi \circ R_n^{\frac{\pi}{2}} \circ T_{c_1 \cdot n}$, където R_b^π е ротация около бинормалата на ъгъл π , $R_n^{\frac{\pi}{2}}$ е ротация около главната нормала на ъгъл $\frac{\pi}{2}$ и $T_{c_1 \cdot n}$ е трансляция с вектор $c_1 \cdot n$. След извършване на необходимите пресмятания получаваме, че матрицата A_φ на изображението φ , в хомогенни координати, има вида :

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} -\frac{(a-b)^2 + (a+b)^2 \cos 2q}{2(a^2 + b^2)} & -\frac{(a+b)^2 \sin 2q}{2(a^2 + b^2)} & \frac{(a^2 - b^2) \sin q}{a^2 + b^2} & 0 \\ -\frac{(a+b)^2 \sin 2q}{2(a^2 + b^2)} & -\frac{(a-b)^2 + (a+b)^2 \cos 2q}{2(a^2 + b^2)} & -\frac{(a^2 - b^2) \cos q}{a^2 + b^2} & 0 \\ \frac{(a^2 - b^2) \sin q}{a^2 + b^2} & -\frac{(a^2 - b^2) \cos q}{a^2 + b^2} & -\frac{2ab}{a^2 + b^2} & 0 \\ \frac{(a^2 - b^2)((a^2 + b^2) \cos q - abq \sin q)}{a(a^2 + b^2)} & \frac{(a^2 - b^2)((a^2 + b^2) \sin q + abq \cos q)}{a(a^2 + b^2)} & \frac{b(a+b)^2 q}{a^2 + b^2} & 1 \end{pmatrix},$$

където $\det A_\varphi = 1$ и $A_\varphi^2 = A_\varphi \cdot A_\varphi = E$ е единичната матрица. Следователно, $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi = I$ е идентитета в пространството, т.е. φ е инволюция.

ЛИТЕРАТУРА

1. do Carmo, M., Differential Geometry of Curves and Surfaces. Prentice-Hall, New Jersey, 1976.
2. Encheva, R. and Georgiev, G. Similar Frenet Curves, Result. Math., 55 no. 3-4 (2009) 359-372.
3. Izumiya, S., Takeuchi, N., Generic properties of helices and Bertrand curves, J. geom. 74 (2002), 97-109.
4. Uribe-vargas, R. On Vertices, focal curvatures and differential geometry of space curves, Bull Braz Math Soc, New Series 36(3), (2005), 285-307.