CHARACTERIZATION OF A FOUR-DIMENSIONAL RIEMANNIAN MANIFOLDS WITH COMMUTING STANILOV CURVATURE OPERATOR WITH RESPECT TO ORTHOGONAL PLANE

VESELIN T. VIDEV, MARIA V. IVANOVA

***ABSTRACT**: In the present paper using commuting conditions of the skew-symmetric Stanilov curvature operator and the generalized Jacobi operator of order 2 defined with respect to orthogonal plane we characterize a four-dimensional Riemannian manifold of constant sectional curvature.*

***KEYWORDS**: Jacobi operator, skew-symmetric Stanilov curvature operator, commuting conditions, space of constant sectional curvature*

DOI: https://doi.org/10.46687/LQCR1576

ЧЕТИРИМЕРНИ РИМАНОВИ МНОГООБРАЗИЯ С КОМУТИРАЩИ ОПЕРАТОРИ НА СТАНИЛОВ ОТНОСНО ОРТОГОНАЛНИ ПЛОЩАДКИ

ВЕСЕЛИН Т. ВИДЕВ, МАРИЯ В. ИВАНОВА

***АБСТРАКТ:** В тази статия чрез комутационно условие за кососиметричния оператор на Станилов и обобощения оператор на Якоби от ред 2, дефинирани относно ортогонални двумерни площадки, характеризираме четиримерните Риманови многообразия с постоянна секционна кривина.*

***КЛЮЧОВИ ДУМИ:** Оператор на Якоби, кососиметричен оператор, комутационни условия, пространства с постоянна секционна кривина*

Нека (M,g) е n-мерно Риманово многообразие с тензор на кривината R от тип (1,3), или от тип (0,4), като двата тензора са свързани с релацията:

$$g\big(R(x,y,z),u\big) = R(x,y,z,u),$$

за произволни допирателни вектори x,y,z,u от тангенциалното пространство M_p, в точката $p\in M$. Означаваме с

$$R_{E^k} = \sum_{i=1}^{k} R_{e_i}$$

обобщения оператор на Якоби за M_p, където $\{e_i\}$, i=1,.., k е ортонормиран базис за подпространството $E^m\subset M_p$, в точка $p\in M$[1].

Кососиметричният оператор на Станилов означаваме с k_{E^2}, където

$$k_{E^2}(u) = R(x,y,u),$$

и където x, y е произволен ортонормиран базис за двумерната площадка $E^2\subset M_p$, в точка $p\in M$[2].

В представената статия изучаваме класовете от четиримерни Риманови многообразия със свойството във всяка точка $p\in M$ и за произволна двумерна площадка E^2 от тангенциалното пространство M_p да е в сила равенството :

(1) $$k_{(E^2)^{\perp}} \circ R_{E^2} = R_{E^2} \circ k_{(E^2)^{\perp}}$$

където $(E^2)^{\perp}$ означава ортогоналното допълнение на площадката E^2 в тангенциалното пространство M_p. Това условие е еквивалентно на условието операторът на кривина $k_{(E^2)^{\perp}} \circ R_{E^2}$ да бъде кососиметричен линеен оператор.

Нека $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ е произволен ортонормиран базис за тангенциалното пространство M_p, в точката $p \in M$. Относно този базис имаме следните матрици за операторите на кривина k_{e_1,e_2} и R_{e_3,e_4}:

$$\left(k_{e_1,e_2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -K_{12} & -R_{2113} & -R_{2114} \\ K_{12} & 0 & R_{1223} & R_{1224} \\ R_{2113} & -R_{1223} & 0 & R_{1234} \\ R_{2114} & -R_{1224} & -R_{1234} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\left(R_{e_3,e_4}\right) = \begin{pmatrix} K_{13}+K_{14} & R_{1332}+R_{1442} & R_{1443} & R_{1334} \\ R_{1332}+R_{1442} & K_{23}+K_{24} & R_{2443} & R_{2334} \\ R_{1443} & R_{2443} & K_{34} & 0 \\ R_{1334} & R_{2334} & 0 & K_{34} \end{pmatrix}.$$

След умножението им можем да получим матрицата на оператора на кривина $k_{e_1,e_2} \circ R_{e_3,e_4}$, която съгласно поставеното условие (1) и евивалентното на това условие операторът на кривина $k_{(E^2)^{\perp}} \circ R_{E^2}$ да бъде кососиметричен линеен оператор, следва да е антисиметрична матрица. Тогава нейните диагонални елементи са равни на нула и по-точно имаме равенствата:

(2)
$$\begin{aligned} a_{11} &= -K_{12}\,\rho_{12} - R_{2113}\,R_{1443} - R_{2114}\,R_{1334} = 0 \\ a_{22} &= K_{12}\,\rho_{12} + R_{1223}\,R_{2443} + R_{1224}\,R_{2334} = 0 \\ a_{33} &= R_{2113}\,R_{1443} - R_{1223}\,R_{2443} = 0 \\ a_{44} &= R_{2114}\,R_{1334} - R_{1224}\,R_{2334} = 0\,. \end{aligned}$$

В тези равенства означаваме с

$$K_{ij} = R(e_i,e_j,e_j,e_i)$$

секционните кривини на площадките образувани от допирателните векторите e_i,e_j, където $i \neq j = 1, 2, \ldots, n$. Съответно означаваме компонентите на тензора на Ричи с

$$\rho_{u,v} = \rho(u,v)$$

където

$$\rho(u,v) = \Sigma_{i=1,n} R(e_i,u,v,e_i).$$

В равенство (2) заменяме индексите 1 и 2 и получаваме следната система равенства:

(3)
$$\begin{aligned} &-K_{21}\,\rho_{21} - R_{1223}\,R_{2443} - R_{1224}\,R_{2334} = 0, \\ &K_{21}\,\rho_{21} + R_{2113}\,R_{1443} + R_{2114}\,R_{1334} = 0, \\ &R_{1223}\,R_{2443} - R_{2113}\,R_{1443} = 0, \\ &R_{1224}\,R_{2334} - R_{2114}\,R_{1334} = 0. \end{aligned}$$

Нека X е гладко векторно поле дефинирано върху многообразието (M,g). Като вземем пред вид, че всеки оператор на Якоби R_X е симетричен линеен оператор тогава можем да означим с M_3, M_2, M_1 тези подмногообразия на M, за които операторът на Якоби R_X има съответно 3, 2 или 1 ненулеви собствени стойности.

Нека $X= e_1$, и нека e_1, e_2, e_3, e_4 е ортонормиран базис от собствени вектори на оператора на Якоби R_{e_1} за тангенциалното пространство M_p, в точката $p\in M$. Тогава за компонентите на тензора на кривината R е в сила следната релация:

(4) $$R_{2113} = R_{2114} = R_{3114} = 0,$$

а за съответните собствени стойности c_0, c_1, c_2, c_3, съответни на собствените вектори e_1, e_2, e_3, e_4 , имаме равенствата:

$$c_0 = 0,$$
$$c_1 = K_{12},$$
$$c_2 = K_{13},$$
$$c_3 = K_{14}.$$

От равенствата (2) и (4), получаваме ново равенство:

$$K_{12}.\rho_{12} = 0.$$

Понеже релацията (1) е в сила за произволна двумерна площадка $E^2 = e_1\wedge e_j$, тогава имаме следната система равенства:

(5) $$K_{1j}.\rho_{1j} = 0, \qquad (j = 2, 3, 4).$$

Сега ние разглеждаме първата от логическите възможности, когато операторът на Якоби R_{e_1} притежава три ненулеви собствени стойности c_1, c_2, c_3 , които са различни една от друга, във всяка точка $p\in M_3$. Тогава имаме следната система равенства:

(6) $$\rho_{1j} = 0, \qquad (j = 2, 3, 4),$$

от която получаваме равенството

(7) $$\rho_{1x} = 0,$$

изпълнено за произволен допирателен вектор $x\perp e_1$, в точката $p\in M_3$.

Втората логическа възможност за собствените стойности на оператора на Якоби R_{e_1} е когато този оператор притежава две различни помежду си ненулеви собствени стойности в точката $p\in M_2$, например $c_2=K_{13}$ и $c_3=K_{14}$. Тогава от системата равенства (5) получаваме, че

(8) $$\rho_{13} = 0, \quad \rho_{14} = 0.$$

Сега от (2), (3), (4) , като заменим индекса 1 чрез индексите 3 и 4, аналогично на (5), получаваме системата равенства

(9) $$K_{12}.\rho_{12} = 0,$$
$$K_{23}.\rho_{23} = 0,$$
$$K_{24}.\rho_{24} = 0.$$

Да приемем, че $\rho_{12}=0$. Тогава като използваме равенство (8) получаваме, че отново са в сила равенствата (6) и (7), но сега за произволен допирателен вектор $x\perp e_i$, в точката $p\in M_2$. Ако $\rho_{12} = \rho_{11} - \rho_{22} \neq 0$, тогава

(10) $$\rho_{11} \neq \rho_{22}.$$

Понеже от (8) следва системата равенства

(11) $$\rho_{11} - \rho_{33}.= 0,$$
$$\rho_{11} - \rho_{44} =0,$$

тогава от (10) и (11) получаваме, че

(12) $$\rho_{23} \neq 0, \qquad \rho_{24} \neq 0 .$$

От последните неравенства и системата (9) следва, че

$$K_{23} = K_{24} = 0,$$

и тогава използвайки нашето допускане, че $c_1 = K_{12} = 0$, получаваме нова система равенства:

(13) $$\rho_{33} = K_{13} + K_{23} + K_{34} = c_2 + K_{34}\,,$$
$$\rho_{44} = K_{14} + K_{24} + K_{34} = c_3 + K_{34}\,.$$

Понеже от второто равенство в (8) имаме, че

(14) $$\rho_{33} = \rho_{44},$$

тогава от равенство (13) и равенство (14) получаваме, че $c_2=c_3$, което е противоречие с нашето допускане оператора на Якоби R_{e_1} да притежава две различни помежду си ненулеви собствени стойности в точката $p\in M_2$, и които приехме да са $c_2=K_{13}$ и $c_3=K_{14}$.

Третата от логическите възможности за собствените стойности на оператора на Якоби R_{e_1} е когато оператора R_{e_1} има точно една собствена стойност c различна от нула върху M_1. Ако e_1,u_2,u_3,u_4 е произволен ортонормиран базис за допирателното пространство M_p, в точката $p\in M_1$, тогава използвайки специалният случай за характеристичното уравнение на оператора на Якоби R_{e_1}, относно този базис, намираме

$$R_{2113} = 0\,,$$

което е в сила за произволна ортонормирана тройка вектори e_1, u_2, u_3 от тангенциалното пространство M_p, в точката $p\in M_1$. Последното равенство означава, че подмногообразието M_1 има постоянна секционна кривина и следователно (7) отново е в сила, но сега за произволен допирателен вектор $x\perp e_1$, в точката $p\in M_1$.

И така при трите логически възможности за ненулевите собствени стойности на оператора на Якоби R_X винаги е в сила равенство (7), за произволен единичен вектор X от допирателните пространства на подмногообразията M_3, M_2, M_2 на многообразието M, което означава че всички тези подмногообразия са Айнщайнови[3].

Тогава Римановото многообразие (M,g) е също Айнщайново многообразие, и тогава съгласно Лема 1 и Лема 2 в [2] имаме, че операторите на кривина k_{E2} и S_{E2} са ортогонални един на друг. Това означава, че за всеки ортонормиран базис $\{e_i\}$, i=1,2,3,4 е в сила равенството:

$$g\big(k(e_i),S(e_i)\big) = 0,$$
$$g\big(k(e_i),S(e_j)) + g\big(k(e_j),S(e_i)\big) = 0,$$

за произволни индекси $i, j = 1,\ldots, n$.

Ако този базис е базис на Сингер-Торп, тогава имаме системата равенства

$$R_{ijkl} = 0,$$

в която три от индексите са различни. Оттук следва, че $\rho = K_{ij}$ и следователно (M,g) е многообразие с постоянна секционна кривина.

Обратно, ако (M,g) е Риманово многообразие с постоянна секционна кривина, тогава равенството (8) е в сила. И така ние доказахме следната

Теорема 1. *Нека* (M,g) *е четиримерно Риманово многообразие. Тогава следните условия са еквивалентни*:

1. *Във всяка точка* $p\in M$, *за произволна площадка* $E^2\in M_p$, *и за нейното ортогонално допълнение* $(E^2)^\perp$ *в* M_p, *е в сила комутационното равенство*

$$k_{(E2)^\perp}\circ S_{E2} = S_{E2}\circ k_{(E2)^\perp}$$

2. (M,g) *е локално изометрично на Риманово многообразие с постоянна секционна кривина.*

ЛИТЕРАТУРА:

[1] Gilkey, G.Stanilov,V.Videv. Pseudo-Riemannian manifolds whose generalized Jacobi operator has a constant characteristic polynomial. Journal of Geometry(Basel), 62(1998), 144-153

[2] Ivanova, R., G.Stanilov, A skew- symmetric curvature operator in Riemannian geometry. Symposia Gaussiana, Conf. A, (1995)

[3] Singer, I., J. Thorpe. The curvature of 4-dimensional Einstein spaces. Global Analisys. Papers in Honour of K. Kodaira. University of Tokio press, Princeton University Press (1969)