ВАРИАЦИОННИ ГРАНИЦИ И ОЦЕНКИ ЗА ДИЕЛЕКТРИЧЕСКАТА ПРОНИЦАЕМОСТ НА МНОГОФАЗНИ ДИСПЕРСИИ ОТ ХОМОГЕННИ ЕЛИПСОИДАЛНИ ВКЛЮЧВАНИЯ

КРАСИМИР Д. ЦВЯТКОВ

VARIATIONAL BOUNDS AND ESTIMATES FOR THE DIELECTRIC PERMITTIVITY OF MULTIPHASE DISPERSIONS OF HOMOGENEOUS ELLIPSOIDAL INCLUSIONS

KRASIMIR D. TSVYATKOV

ABSTRACT: *Bounds and estimates of Hashin-Shtrikman type are developed for the effective dielectric permittivity of random dispersions of homogeneous ellipsoidal inclusions, which can have different, random permittivities, but independent on the random distributions of their centers and orientations. Explicit formulae are derived in the case of aligned inclusions when pair distribution function of their locations has ellipsoidal symmetry. The obtained results can be compared with similar results of Ponte Castaneda and Willis (1995) concerning elastic media.*

KEYWORDS: *effective permittivity, random dispersions, variational bounds*

1.Основни уравнения. Вариационният принцип на Хашин и Щрикман

Разглеждаме дисперсия от хомогенни непресичащи се елипсоидални включвания със случаен тензор на диелектрическата си проницаемост $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{i}}$, разпределени случайно в неограничена матрица с проводимост $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{m}}$, заемаща цялото d -мерно евклидово пространство $\mathbb{R}^d$, $d = 2,3$. Предполагаме, че включванията имат не само случайни положения на техните центрове $\mathbf{x}_j$, но също така и случайна ориентация $\boldsymbol{\omega}_j$. (В равнинния случай ($d = 2$) тази ориентация се определя чрез един скаларен параметър ω_j, а в тримерния ($d = 3$) − от три скаларни параметъра, например, трите ойлерови ъгли).

Ще изложим отначало основните уравнения, свързани с определянето на ефективното поведение на произволна хетерогенна и статистически хомогенна среда с тензор на диектрическата проницаемост $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$ и ще формулираме варицонния принцип на Хашин и Щрикман [1]. При отсъствие на свободни електрически заряди електрическото поле $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ и електрическата индукция $\mathbf{D}(\mathbf{x})$ в средата се подчиняват на уравненията

(1) $$\nabla\cdot\mathbf{D}(\mathbf{x}) = 0,\ \ \nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \mathbf{0},$$

последното от които означава, че $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ е потенциално поле. Връзката между тях се дава от линейното конститутивно уравнение

(2) $$\mathbf{D}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{E}(\mathbf{x})\ .$$

Ефективната диелектрическа проницаемост $\boldsymbol{\varepsilon}_e$ на средата най-често се дефинира чрез равенството

(3) $$\langle \mathbf{D}(\mathbf{x})\rangle = \boldsymbol{\varepsilon}_e \cdot \langle \mathbf{E}(\mathbf{x})\rangle,$$

където скобите $\langle \ \rangle$ означават усреднение по ансамбъла от реализации на средата.

Заедно с хетерогенната среда да разгледаме хомогенна неограничена среда за сравнение с проницаемост $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ и да въведем индуцираната поляризация $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ относно средата за сравнение чрез равенството

(4) $$\mathbf{D}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})\cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\varepsilon}_0 \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) + \mathbf{P}(\mathbf{x}),$$

откъдето следва, че $\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \left(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\varepsilon}_0\right)\cdot \mathbf{E}(\mathbf{x})$. Тогава първото уравнение в (1) приема вида

(5) $$\nabla\cdot\left(\boldsymbol{\varepsilon}_0\cdot \mathbf{E}(\mathbf{x})\right) + \nabla\cdot \mathbf{P}(\mathbf{x}) = 0,$$

което подсказва използването на функцията на Грийн $G^\infty(\mathbf{x})$ за неограничената среда за сравнение – решението на уравнението $\nabla\cdot\left(\boldsymbol{\varepsilon}_0\cdot \mathbf{E}(\mathbf{x})\right) + \delta(\mathbf{x}) = 0$ при условието $G^\infty(\mathbf{x}) \to 0$ при $|\mathbf{x}| \to \infty$. (Напомняме, че тук $\delta(\mathbf{x})$ е делта-функцията на Дирак.) Следвайки Уилис [2], уравнението (5) може да се замени със сингуларното интегрално уравнение

(6) $$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{E}(\mathbf{x})\rangle - (\Gamma\mathbf{P})(\mathbf{x}),$$

където Γ е линеен оператор, имащ вида

(7) $$(\Gamma\mathbf{P})(\mathbf{x}) = \int \boldsymbol{\Gamma}^\infty(\mathbf{x}-\mathbf{y})\cdot(\mathbf{P}(\mathbf{y}) - \langle\mathbf{P}\rangle)\,\mathrm{d}\mathbf{y},$$

при $\boldsymbol{\Gamma}^\infty(\mathbf{x}) = -\nabla\nabla G^\infty(\mathbf{x})$. От уравненията (5) и (6) получаваме уравнение за $\mathbf{P}(\mathbf{x})$, което според Уилис [2] е еквивалентно на вариационния принцип на Хашин и Щрикман [1]. Според формулировката на Уилис на този принцип функционалът

(8) $$\mathrm{H}[\hat{\mathbf{P}}] = 2\langle \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{x})\rangle - \langle \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{x})\cdot(\Gamma\hat{\mathbf{P}})(\mathbf{x})\rangle - \langle \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{x})\cdot(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})-\boldsymbol{\varepsilon}_0)^{-1}\cdot\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{x})\rangle$$

е стационарен за истинското поле на поляризацията $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ в средата и неговата стационарна стойност H_{st} е $\mathrm{H}_{\mathrm{st}} = \langle \mathbf{E}(\mathbf{x})\rangle\cdot(\boldsymbol{\varepsilon}_e - \boldsymbol{\varepsilon}_0)\cdot\langle\mathbf{E}(\mathbf{x})\rangle$. При това H_{st} е минимум (максимум), ако $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) \ge \boldsymbol{\varepsilon}_0$ ($\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) \le \boldsymbol{\varepsilon}_0$) във всяка точка $\mathbf{x}$, т.е., ако тензорът $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\varepsilon}_0$ е положително (отрицателно) полуопреден за всяко $\mathbf{x}$ в смисъл, че квадратичната форма $\mathbf{v}\cdot(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})-\boldsymbol{\varepsilon}_0)\cdot\mathbf{v}$ има съответната определеност.

Този вариационен принцип става известен със знаменитите граници на Хашин и Щрикман [1] за *N*-фазна статистически изотропна среда с изотропни компоненти, тъй като тези граници се изразяват единствено с обемните концентрации и проницаемостите на тези компоненти; при това, тези граници са оптимални в смисъл, че има хетерогенни среди, за които те се достигат. За *N*-фазна статистически анизотропна среда с анизотропни компоненти тези граници са обобщени от Уилис [2]. Тогава, обаче, те зависят явно от двуточковите корелационни функции за средата. Те могат да бъдат изразени в явна форма за двуфазна среда [3]. Тук ще се спрем на приложението на принципа на Хашин-Щрикман за един клас случайни дисперсии от елипсоидални включвания.

2. Статистическо описание на дисперсията

На всеки елипсоид с център $\mathbf{x}_j$ да съпоставим неговата ориентация $\boldsymbol{\omega}_j$ и проницаемост $\boldsymbol{\varepsilon}_j$. Така получаваме системата $\{\mathbf{x}_j, \boldsymbol{\omega}_j, \boldsymbol{\varepsilon}_j\}$ от маркирани случайни точки $\mathbf{x}_j$, която може да се разглежда като система от точки, случайно разпределени в областта $\mathbb{R}^d \times \Omega \times \Upsilon$, където Ω е областта на изменение на ориентациите $\boldsymbol{\omega}_j$, а Υ − на двувалентните симетрични тензори $\boldsymbol{\varepsilon}_j$. (Лесно се съобразява, че $\Omega \subset \mathbb{R}^{2d-3}$ и $\Upsilon \subset \mathbb{R}^{3d-3}$, $d = 2,3$.)

Да дефинираме случайното поле на плътността

$$\psi(\mathbf{x};\boldsymbol{\omega},\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \sum_j \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_j)\,\delta(\boldsymbol{\omega}-\boldsymbol{\omega}_j)\,\delta(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}-\boldsymbol{\varepsilon}_j), \tag{9}$$

породено от системата $\{\mathbf{x}_j, \boldsymbol{\omega}_j, \boldsymbol{\varepsilon}_j\}$. Тази функция е въведена от Стратонович [4] за немаркирана система от точки $\mathbf{x}_j$, случайно разпределени върху права. Нейното обобщение за маркирани случайни точки $\mathbf{x}_j$ с маркер радиуса a_j на сферата с център $\mathbf{x}_j$ при дисперсии от сфери със случайни радиуси се въвежда от Христов и Марков [5]. За дисперсии от сфери със случайни проводимости $\boldsymbol{\varepsilon}_j$ тази функция е въведена от Цвятков [6], а за дисперсии от сфероидални включвания със случайни ориентации $\boldsymbol{\omega}_j$ − от Марков [7]. (За да се разграничим от означението $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$ за тензора на диелектрическата проницаемост в средата, тук и по-долу променливите свързани със случайната диелектрическа проницаемост $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{i}}$ на елипсоидалните включвания ще означаваме с $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$.) С помощта на функцията $\psi(\mathbf{x};\boldsymbol{\omega},\hat{\boldsymbol{\varepsilon}})$ случайното тензорно поле $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$ на може да се представи във вида

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{m}} + \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\Omega}\int_{\Upsilon} (\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}-\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{m}})\,h(\mathbf{x}-\mathbf{y},\boldsymbol{\omega})\,\psi(\mathbf{y};\boldsymbol{\omega},\hat{\boldsymbol{\varepsilon}})\,\mathrm{d}\mathbf{y}\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}, \tag{10}$$

където $h(\mathbf{x},\boldsymbol{\omega})$ е характеристична функция на елипсоид с ориентация $\boldsymbol{\omega}$ и с център в координатното начало.

Случайната функция на плътността $\psi(\mathbf{x};\boldsymbol{\omega},\hat{\boldsymbol{\varepsilon}})$ напълно определя дисперсията. Нейните моменти могат да се изразят чрез съвместните многоточкови вероятностни плътности $F_n(\mathbf{y}_1,\ldots,\mathbf{y}_n;\boldsymbol{\omega}_1,\ldots,\boldsymbol{\omega}_n,\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_1,\ldots,\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_n)$ на разпределение на центровете $\mathbf{x}_j$ на елипсоидите, техните ориентации $\boldsymbol{\omega}_j$ и диелектрически проницаемости $\boldsymbol{\varepsilon}_j$. По-долу ще ни бъдат необходими изразите само за първите два момента, които се дават от формулите

$$\begin{gathered}\langle \psi(\mathbf{y};\boldsymbol{\omega},\hat{\boldsymbol{\varepsilon}})\rangle = F_1(\mathbf{y};\boldsymbol{\omega},\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}),\\ \langle \psi(\mathbf{y}_1;\boldsymbol{\omega}_1,\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_1),\psi(\mathbf{y}_2;\boldsymbol{\omega}_2,\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_2)\rangle = F_1(\mathbf{y}_1;\boldsymbol{\omega}_1,\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_1)\delta(\mathbf{y}_{1,2})\delta(\boldsymbol{\omega}_{1,2})\delta(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{1,2}) + F_2(\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2;\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2,\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_1,\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_2),\end{gathered} \tag{11}$$

където $\mathbf{y}_{i,j} = \mathbf{y}_j - \mathbf{y}_i$, $\boldsymbol{\omega}_{i,j} = \boldsymbol{\omega}_j - \boldsymbol{\omega}_i$ и $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{i,j} = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_j - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_i$, вж. [5, 6, 7].

Приемаме, че в диелектрическите проницаемости на елипсоидите в дисперсията не зависят от положенията на техните центрове и ориентации. Това означава, че

$$F_n(\mathbf{y}_1,\ldots,\mathbf{y}_n;\boldsymbol{\omega}_1,\ldots,\boldsymbol{\omega}_n,\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_1,\ldots,\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_n) = f_n(\mathbf{y}_1,\ldots,\mathbf{y}_n;\boldsymbol{\omega}_1,\ldots,\boldsymbol{\omega}_n)P_n(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_1,\ldots,\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_n), \tag{12}$$

където $f_n(\mathbf{y}_1,\ldots,\mathbf{y}_n;\boldsymbol{\omega}_1,\ldots,\boldsymbol{\omega}_n)$ са съвместните многоточкови вероятностни плътности на разпределение на системата $\{\mathbf{x}_j,\boldsymbol{\omega}_j\}$ от центровете $\mathbf{x}_j$ на елипсоидите и съответните им ориентации $\boldsymbol{\omega}_j$, а $P_n(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_1,\ldots,\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_n)$ са съответните вероятностни плътности на разпределение на техните проницаемости $\boldsymbol{\varepsilon}_j$. Ще приемем също, че тези проницаемости са статистически независими, т. е.

(13) $$P_n(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_1,\ldots,\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_n)=P(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_1)\ldots P(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_n),$$

където $P(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}})=P_\varepsilon(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}})$ е вероятностната плътност на проницаемостта $\boldsymbol{\varepsilon}_j$ на елипсоид от дисперсията. За едноточковата функция на разпределение $f_1(\mathbf{y}_1;\boldsymbol{\omega})$ ще предположим, че

(14) $$f_1(\mathbf{y}_1;\boldsymbol{\omega})=f_1(\mathbf{y})P_\omega(\boldsymbol{\omega}),$$

където $P_\omega(\boldsymbol{\omega})$ е вероятностната плътност на ориентацията на елипсоид от дисперсията, а $f_1(\mathbf{y})$ е едноточковата вероятностна плътност на системата от немаркирани случайни точки $\mathbf{x}_j$. За статистически хомогенна дисперсия $f_1(\mathbf{y})=n$, където n е средният брой центрове на елипсоиди в единица обем. Предположението (14) означава, че в дисперсията няма пространствени положения, които да имат избирателност към елипсоиди с определени ориентации. За двуточковата функция на разпределение $f_2(\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2;\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2)$, обаче, предположение аналогично на (14) не е правдоподобно, тъй като условието за непресичане на елипсоидите води до сложна зависимост между аргументите на тази функция (вж., например, [7]).

Нека сега двувалентният тензор $\pi(\boldsymbol{\varepsilon})$ е неслучайна функция на случайната проницаемост $\boldsymbol{\varepsilon}$, а $\Pi(\mathbf{x})=\pi(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}))$ е съответното му случайно тензорно поле. Тогава, аналогично на (10), това поле можем да представим във вида

(15а) $$\Pi(\mathbf{x})=\pi(\boldsymbol{\varepsilon}_\mathrm{m})+\tilde{\Pi}(\mathbf{x}),$$

където

(15б) $$\tilde{\Pi}(\mathbf{x})=\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Upsilon}\big[\pi(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}})-\pi(\boldsymbol{\varepsilon}_\mathrm{m})\big]h(\mathbf{x}-\mathbf{y},\boldsymbol{\omega})\psi(\mathbf{y};\boldsymbol{\omega},\hat{\boldsymbol{\varepsilon}})\,\mathrm{d}\mathbf{y}\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}.$$

Позовавайки се на това представяне, за едноточковия момент на полето $\Pi(\mathbf{x})$ ще получим

(16а) $$\langle\Pi(\mathbf{x})\rangle=\pi(\boldsymbol{\varepsilon}_\mathrm{m})+\langle\tilde{\Pi}(\mathbf{x})\rangle,\quad \langle\tilde{\Pi}(\mathbf{x})\rangle=\langle\tilde{\pi}\rangle\phi_\mathrm{i},$$

или

(16б) $$\langle\Pi(\mathbf{x})\rangle=\langle\pi(\boldsymbol{\varepsilon}_\mathrm{i})\rangle\phi_\mathrm{i}+\pi(\boldsymbol{\varepsilon}_\mathrm{m})\phi_\mathrm{m},$$

където $\tilde{\pi}=\pi(\boldsymbol{\varepsilon}_\mathrm{i})-\pi(\boldsymbol{\varepsilon}_\mathrm{m})$, $\phi_\mathrm{i}=nV_1$ и $\phi_\mathrm{m}=1-\phi_\mathrm{i}$ са обемните концентрации съответно на геометричната фаза от включванията и на матрицата, а V_1 е обемът на елипсоид от дисперсията. Значително по-сложно за двуточковия момент намираме

(17а) $$\langle\Pi(\mathbf{x})\otimes\Pi(\mathbf{y})\rangle=\pi(\boldsymbol{\varepsilon}_\mathrm{m})\otimes\pi(\boldsymbol{\varepsilon}_\mathrm{m})+\pi(\boldsymbol{\varepsilon}_\mathrm{m})\otimes\langle\tilde{\Pi}\rangle+\langle\tilde{\Pi}\rangle\otimes\pi(\boldsymbol{\varepsilon}_\mathrm{m})+\langle\tilde{\Pi}(\mathbf{x})\otimes\tilde{\Pi}(\mathbf{y})\rangle,$$

(17б) $$\langle\tilde{\Pi}(\mathbf{x})\otimes\tilde{\Pi}(\mathbf{y})\rangle=\langle\tilde{\pi}\rangle\otimes\langle\tilde{\pi}\rangle S_2(\mathbf{x}-\mathbf{y})+n\,\mathrm{Var}[\pi(\boldsymbol{\varepsilon}_\mathrm{i})]\{V_2(\mathbf{x}-\mathbf{y},\boldsymbol{\omega})\}_\omega,$$

където $S_2(\mathbf{x}-\mathbf{y})=\langle\Theta(\mathbf{x})\otimes\Theta(\mathbf{y})\rangle$ е двуточковата вероятностна функция, даваща вероятността и двете точки $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ да лежат във фазата на включванията; тук $\Theta(\mathbf{x})$ е индикаторната функция на тази фаза: $\Theta(\mathbf{x})=1$, ако $\mathbf{x}$ лежи във включване, и $\Theta(\mathbf{x})=0$, ако $\mathbf{x}$ лежи в матрицата. Освен това

(18) $$\mathrm{Var}[\pi(\boldsymbol{\varepsilon}_\mathrm{i})]=\langle\pi(\boldsymbol{\varepsilon}_\mathrm{i})\otimes\pi(\boldsymbol{\varepsilon}_\mathrm{i})\rangle-\langle\pi(\boldsymbol{\varepsilon}_\mathrm{i})\rangle\otimes\langle\pi(\boldsymbol{\varepsilon}_\mathrm{i})\rangle$$

е "тензорната" вариация на функцията $\pi(\boldsymbol{\varepsilon}_\mathrm{i})$ от случайната проницаемост $\boldsymbol{\varepsilon}_\mathrm{i}$ на включванията, е $V_2(\mathbf{x}-\mathbf{y},\boldsymbol{\omega})$ обемът на сечението на два елипсоида с центрове $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, имащи една и съща ориентация $\boldsymbol{\omega}$, символът $\otimes$ означава диадно произведение, а скобите $\{\ \}_\omega$ − усреднение по всевъзможните ориентации $\boldsymbol{\omega}$ с вероятностна плътност $P_\omega(\boldsymbol{\omega})$. Отчитайки формули (16) − (18), за "тензорната" вариация на полето $\Pi(\mathbf{x}) = \pi(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}))$ намираме

$$\begin{aligned}\langle\Pi(\mathbf{x})\otimes\Pi(\mathbf{y})\rangle - \langle\Pi(\mathbf{x})\rangle\otimes\langle\Pi(\mathbf{y})\rangle &= \left(\langle\pi(\boldsymbol{\varepsilon}_\mathrm{i})\rangle - \pi(\boldsymbol{\varepsilon}_\mathrm{m})\right)\otimes\left(\langle\pi(\boldsymbol{\varepsilon}_\mathrm{i})\rangle - \pi(\boldsymbol{\varepsilon}_\mathrm{m})\right)\left[S_2(\mathbf{x}-\mathbf{y}) - \phi_\mathrm{i}^2\right] \\ &\quad + n\,\mathrm{Var}[\pi(\boldsymbol{\varepsilon}_\mathrm{i})]\left\{V_2(\mathbf{x}-\mathbf{y},\boldsymbol{\omega})\right\}_\omega.\end{aligned} \tag{19}$$

3. Граници и оценки от типа на Хашин-Штрикман за дисперсията

Хашин и Штрикман [1] разглеждат *N*-фазна среда, приемайки, че поляризацията $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ във всяка от фазите е постоянна. Тази тяхна идея може лесно да се обобщи за произволна, не непременно дискретна, среда, ако за вариационния им принцип се използват пробни полета от вида

$$\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{x}) = \chi(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})), \tag{20}$$

където $\chi(\boldsymbol{\varepsilon})$ е неслучайна функция на диелектрическата проницаемост $\boldsymbol{\varepsilon}$. Този избор на пробни полета беше предложен от автора [8] в случая на статистически изотропна среда с изотропни компоненти и беше получено обобщение на границите на Хашин-Штрикман за такава среда. На автора не е известно аналогично обобщение в литературата за общия случай на среда, която не е статистически изотропна и има анизотропни компоненти. Ще отбележим само, че тогава за уравнението на Ойлер-Лагранж за рестрикцията на функционала (8) върху пробните полета (20) получаваме

$$\mathbf{I} - \chi(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}))\cdot(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\varepsilon}_0)^{-1} - \int\left[\chi(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}-\mathbf{y})) - \langle\chi(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}))\rangle\right]\cdot\boldsymbol{\Gamma}^\infty(\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y} = 0, \tag{21}$$

където $\mathbf{I}$ е единичният тензор, а интегрирането е върху цялото пространство $\mathbb{R}^d$. Поне за автора, то представлява сложно стохастично интегрално уравнение за намиране на оптималната функция $\chi(\boldsymbol{\varepsilon})$. Ето защо ще разгледаме вариационния принцип на Хашин-Щрикман върху класа (20) при условие, че $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$ е полето на диелектрическата проницаемост за разглежданата дисперсия, т.е. може да се представи във вида (10). Тогава, позовавайки се на формули (16) и (19), за рестрикцията на функционала (8) получаваме

$$\begin{aligned}\mathrm{H}[\hat{\mathbf{P}}] = \mathrm{H}[\chi] &= 2\langle\mathbf{E}\rangle\cdot\left[\langle\chi(\boldsymbol{\varepsilon}_\mathrm{i})\rangle\phi_\mathrm{i} + \chi(\boldsymbol{\varepsilon}_\mathrm{m})\phi_\mathrm{m}\right]\cdot\langle\mathbf{E}\rangle \\ &\quad - \langle\mathbf{E}\rangle\cdot\left[\langle\chi(\boldsymbol{\varepsilon}_\mathrm{i})\cdot(\boldsymbol{\varepsilon}_\mathrm{i} - \boldsymbol{\varepsilon}_0)^{-1}\cdot\chi(\boldsymbol{\varepsilon}_\mathrm{i})\rangle\phi_\mathrm{i} + \chi(\boldsymbol{\varepsilon}_\mathrm{m})\cdot(\boldsymbol{\varepsilon}_\mathrm{m} - \boldsymbol{\varepsilon}_0)^{-1}\cdot\chi(\boldsymbol{\varepsilon}_\mathrm{m})\phi_\mathrm{m}\right]\cdot\langle\mathbf{E}\rangle \\ &\quad - \phi_\mathrm{i}\phi_\mathrm{m}\langle\mathbf{E}\rangle\cdot\left[\langle\chi(\boldsymbol{\varepsilon}_\mathrm{i})\rangle - \chi(\boldsymbol{\varepsilon}_\mathrm{m})\right]\cdot\mathbf{R}\cdot\left[\langle\chi(\boldsymbol{\varepsilon}_\mathrm{i})\rangle - \chi(\boldsymbol{\varepsilon}_\mathrm{m})\right]\cdot\langle\mathbf{E}\rangle \\ &\quad - \phi_\mathrm{i}\langle\mathbf{E}\rangle\cdot\left[\langle\chi(\boldsymbol{\varepsilon}_\mathrm{i})\cdot\mathbf{Q}\cdot\chi(\boldsymbol{\varepsilon}_\mathrm{i})\rangle - \langle\chi(\boldsymbol{\varepsilon}_\mathrm{i})\rangle\cdot\mathbf{Q}\cdot\langle\chi(\boldsymbol{\varepsilon}_\mathrm{i})\rangle\right]\cdot\langle\mathbf{E}\rangle,\end{aligned} \tag{22}$$

където въведохме тензорите

$$\mathbf{R} = \frac{1}{\phi_\mathrm{i}\phi_\mathrm{m}}\int\boldsymbol{\Gamma}^\infty(\mathbf{y})\left[S_2(\mathbf{y}) - \phi_\mathrm{i}^2\right]\mathrm{d}\mathbf{y} \quad \text{и} \quad \mathbf{Q} = \frac{1}{V_1}\left\{\int\boldsymbol{\Gamma}^\infty(\mathbf{y})V_2(\mathbf{y},\boldsymbol{\omega})\,\mathrm{d}\mathbf{y}\right\}_\omega, \tag{23}$$

зависещи единствено от статистиката на разпределение на елипсоидалните включвания. Ще отбележим, че същият тензор $\mathbf{R}$, но означен с $\mathbf{P}$, е въведен от Уилис [3] за изразяване на границите си за двуфазна среда. Условието за стационарност на функционала $\mathrm{H}[\chi]$ води до следните уравнения за намиране на функцията $\chi(\boldsymbol{\varepsilon})$:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{I}-\phi_{\mathrm{m}}\mathbf{R}\cdot\left[\langle\chi(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{i}})\rangle-\chi(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{m}})\right]-(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{i}}-\boldsymbol{\varepsilon}_0)^{-1}\cdot\chi(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{i}})-\mathbf{Q}\cdot\left[\chi(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{i}})-\langle\chi(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{i}})\rangle\right]=0,\\
&\mathbf{I}+\phi_{\mathrm{i}}\mathbf{R}\cdot\left[\langle\chi(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{i}})\rangle-\chi(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{m}})\right]-(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{m}}-\boldsymbol{\varepsilon}_0)^{-1}\cdot\chi(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{m}})=0,
\end{aligned}
\tag{24}
$$

Имайки предвид тези уравнения, за стационарната стойност H_{st} на функционала $\mathrm{H}[\chi]$ получаваме

$$
\mathrm{H}_{\mathrm{st}}=\langle\mathbf{E}\rangle\cdot\left[\langle\chi(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{i}})\rangle\phi_{\mathrm{i}}+\chi(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{m}})\phi_{\mathrm{m}}\right]\cdot\langle\mathbf{E}\rangle=\langle\mathbf{E}\rangle\cdot\langle\chi(\boldsymbol{\varepsilon})\rangle\cdot\langle\mathbf{E}\rangle
\tag{25}
$$

където функцията χ решението на системата (24). Използвайки равенствата

$$
\phi_{\mathrm{m}}\left[\langle\chi(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{i}})\rangle-\chi(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{m}})\right]=-\langle\chi(\boldsymbol{\varepsilon})\rangle+\chi(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{i}}),\quad \phi_{\mathrm{i}}\left[\langle\chi(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{i}})\rangle-\chi(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{m}})\right]=\langle\chi(\boldsymbol{\varepsilon})\rangle-\chi(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{m}}),
$$

тази система записваме във вида

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{I}+\mathbf{R}\cdot\left[\langle\chi(\boldsymbol{\varepsilon})\rangle-\chi(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{i}})\right]-(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{i}}-\boldsymbol{\varepsilon}_0)^{-1}\cdot\chi(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{i}})-\mathbf{Q}\cdot\left[\chi(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{i}})-\langle\chi(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{i}})\rangle\right]=0,\\
&\mathbf{I}+\mathbf{R}\cdot\left[\langle\chi(\boldsymbol{\varepsilon})\rangle-\chi(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{m}})\right]-(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{m}}-\boldsymbol{\varepsilon}_0)^{-1}\cdot\chi(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{m}})=0.
\end{aligned}
\tag{26}
$$

Нейното решение намираме по следния начин. От първото уравнение изразяваме $\chi(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{i}})$ и усредняваме получения израз. Така получаваме

$$
\langle\chi(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{i}})\rangle=\langle\boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{i}0}(\mathbf{Q})\rangle\cdot\left[\mathbf{I}+\mathbf{R}\cdot\left(\langle\chi(\boldsymbol{\varepsilon})\rangle-\chi(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{i}})\right)+\mathbf{Q}\cdot\langle\chi(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{i}})\rangle\right],
\tag{27}
$$

където в диелектрическата теория

$$
\boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{i}0}(\mathbf{Q})=\left[(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{i}}-\boldsymbol{\varepsilon}_0)^{-1}+\mathbf{Q}\right]^{-1}=\left[\mathbf{I}+(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{i}}-\boldsymbol{\varepsilon}_0)\cdot\mathbf{Q}\right]^{-1}\cdot(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{i}}-\boldsymbol{\varepsilon}_0)
\tag{28}
$$

може да се тълкува като тензорът на поляризуемост (или възприемчивост) на диелектрично тяло с проницаемост $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{i}}$ и тензор на деполяризацията $\mathbf{N}_{\mathrm{i}}=\boldsymbol{\varepsilon}_0\cdot\mathbf{Q}$. Да отбележим, че за изоптропна среда за сравнение тензорът на деполяризацията $\mathbf{N}_{\mathrm{i}}$ на елипсоид е чисто геометрична негова характеристика (вж., например, [9]). От уравнение (27) намираме

$$
\langle\chi(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{i}})\rangle=\boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{i}0}^{\dagger}(\mathbf{R};\mathbf{Q})\cdot\left[\mathbf{I}+\mathbf{R}\cdot\langle\chi(\boldsymbol{\varepsilon})\rangle\right],
\tag{29}
$$

където

$$
\boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{i}0}^{\dagger}(\mathbf{R};\mathbf{Q})=\left[(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{i}}^{\dagger}-\boldsymbol{\varepsilon}_0)^{-1}+\mathbf{R}\right]^{-1}=\left[\mathbf{I}+(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{i}}^{\dagger}-\boldsymbol{\varepsilon}_0)\cdot\mathbf{R}\right]^{-1}\cdot(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{i}}^{\dagger}-\boldsymbol{\varepsilon}_0)
\tag{30}
$$

представлява тензорът на поляризуемост на диелектрично тяло с тензор на деполяризацията $\mathbf{N}_{\mathrm{d}}=\boldsymbol{\varepsilon}_0\cdot\mathbf{R}$ и диелектрическа проницаемост $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{i}}^{\dagger}$, която определяме от равенството

$$
\langle\boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{i}0}(\mathbf{Q})\rangle=\left[(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{i}}^{\dagger}-\boldsymbol{\varepsilon}_0)^{-1}+\mathbf{Q}\right]^{-1},
\tag{31}
$$

което показва, че $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{i}}^{\dagger}$ може да се тълкува като диелектрическата проницаемост на тяло с тензор на деполяризацията $\mathbf{N}_{\mathrm{i}}=\boldsymbol{\varepsilon}_0\cdot\mathbf{Q}$, чийто тензор на поляризуемост е усредненият тензор на поляризуемост на тяло със случайна проницаемост $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{i}}$ и същия тензор на деполяризацията $\mathbf{N}_{\mathrm{i}}$. От второто уравнение на системата (26) веднага намираме

(32) $$\chi(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{m}}) = \boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{m}0}(\mathbf{R}) \cdot \left[\mathbf{I} + \mathbf{R} \cdot \langle \chi(\boldsymbol{\varepsilon}) \rangle \right],$$

където сега

(33) $$\boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{m}0}(\mathbf{R}) = \left[(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{m}} - \boldsymbol{\varepsilon}_0)^{-1} + \mathbf{R} \right]^{-1}$$

представлява тензорът на поляризуемост на диелектрично тяло с тензор на деполяризацията $\mathbf{N}_{\mathrm{d}} = \boldsymbol{\varepsilon}_0 \cdot \mathbf{R}$ и диелектрическа проницаемост $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{m}}$. Имайки предвид равенството $\langle \chi(\boldsymbol{\varepsilon}) \rangle = \langle \chi(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{i}}) \rangle \phi_{\mathrm{i}} + \chi(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{m}}) \phi_{\mathrm{m}}$ и отчитайки (29) и (32), за $\langle \chi(\boldsymbol{\varepsilon}) \rangle$ получаваме уравнението

(34) $$\langle \chi(\boldsymbol{\varepsilon}) \rangle = \boldsymbol{\alpha}_0^{\dagger}(\mathbf{R};\mathbf{Q}) \cdot \left[\mathbf{I} + \mathbf{R} \cdot \langle \chi(\boldsymbol{\varepsilon}) \rangle \right].,$$

където

(35) $$\boldsymbol{\alpha}_0^{\dagger}(\mathbf{R};\mathbf{Q}) = \boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{i}0}^{\dagger}(\mathbf{R};\mathbf{Q}) \phi_{\mathrm{i}} + \boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{m}0}(\mathbf{R}) \phi_{\mathrm{m}}.$$

Според равенството (25) и вариационния принцип на Хашин и Щрикман решението на уравнение (34) води до намирането на тензора

(36) $$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_e = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_e(\boldsymbol{\varepsilon}_0) = \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \left[\mathbf{I} - \boldsymbol{\alpha}_0^{\dagger}(\mathbf{R};\mathbf{Q}) \cdot \mathbf{R} \right]^{-1} \cdot \boldsymbol{\alpha}_0^{\dagger}(\mathbf{R};\mathbf{Q}),$$

за който имаме $\boldsymbol{\varepsilon}_e \le \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_e$ ($\boldsymbol{\varepsilon}_e \ge \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_e$), ако тензорът $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\varepsilon}_0$ е положително (отрицателно) полуопределен за всяка точка $\mathbf{x}$. В останалите случаи, формулата (36) може да даде разумна оценка за тензора на ефективната диелектрическа проницаемост $\boldsymbol{\varepsilon}_e$, ако е направен подходящ избор на $\boldsymbol{\varepsilon}_0$. Да напомним, че в тази формула тензорът $\boldsymbol{\alpha}_0^{\dagger}(\mathbf{R};\mathbf{Q})$ се дефинира чрез равенствата (35), (30), (28), (33) и (31).

Да разгледаме появяващите се статистически параметри $\mathbf{R}$ и $\mathbf{Q}$, дефинирани в (23). Нека $\Omega_t(\rho) = \left\{ \mathbf{x} \,|\, |\mathbf{Z}_t \cdot \mathbf{x}|^2 < \rho \right\}$ е елипсоидът, чиято форма и ориентация се определя от симетричния двувалентен тензор $\mathbf{Z}_t$, а неговият размер − от положителния параметър ρ. Тогава за тензора на Грийн $\boldsymbol{\Gamma}^{\infty}(\mathbf{x})$ е в сила представянето

(37) $$\boldsymbol{\Gamma}^{\infty}(\mathbf{x}) = \mathbf{D}_0 \, \delta(\mathbf{x}) - \mathbf{H}_0(\mathbf{x}),$$

където $\mathbf{D}_0 = \boldsymbol{\varepsilon}_0^{-1} \cdot \mathbf{N}_t$, $\mathbf{H}_0(\mathbf{x}) = -\nabla\nabla G^{\infty}(\mathbf{x})$ (при $\mathbf{x} \ne \mathbf{0}$) е регулярната част на $\boldsymbol{\Gamma}^{\infty}(\mathbf{x})$, а $\mathbf{N}_t$ е тензорът на деполяризация на елипсоида Ω_t относно среда с проницаемост $\boldsymbol{\varepsilon}_0$. Например за интеграла, дефиниращ параметъра $\mathbf{Q}$, това означава, че

(38) $$\int \boldsymbol{\Gamma}^{\infty}(\mathbf{y}) V_2(\mathbf{y},\boldsymbol{\omega}) \,\mathrm{d}\mathbf{y} = \mathbf{D}_0 V_2(\mathbf{0},\boldsymbol{\omega}) - \mathbf{M}_t, \quad \text{където} \quad \mathbf{M}_t = \lim_{\rho\to 0} \int_{\bar{\Omega}_t(\rho)} \mathbf{H}_0(\mathbf{y}) V_2(\mathbf{y},\boldsymbol{\omega}) \,\mathrm{d}\mathbf{y},$$

където $\bar{\Omega}_t(\rho)$ е външността на $\Omega_t(\rho)$. Ако два еднакви елипсоида с една и съща ориентация $\boldsymbol{\omega}$ се задават с тензор $\mathbf{Z}_{\mathrm{i}}$, може да се покаже, че обемът на тяхното сечение $V_2(\mathbf{y},\boldsymbol{\omega})$ зависи от $\mathbf{y}$ само чрез израза $|\mathbf{Z}_{\mathrm{i}} \cdot \mathbf{y}|$. Но тогава интегралът $\mathbf{M}_t$ се анулира и, тъй като $V_2(\mathbf{y},\boldsymbol{\omega}) = V_1$, първият интегралът в (38) е равен на $\mathbf{D}_0 V_1$, където $\mathbf{D}_0 = \boldsymbol{\varepsilon}_0^{-1} \cdot \mathbf{N}_{\mathrm{i}}(\boldsymbol{\omega})$. Следователно

$\mathbf{Q} = \boldsymbol{\varepsilon}_0^{-1} \cdot \{\mathbf{N}_{\rm i}(\boldsymbol{\omega})\}_\omega$. В частност, ако дисперсията се състои от еднакво ориентирани елипсоиди, то $\mathbf{N}_{\rm i}(\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{N}_{\rm i}$ не зависи от $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{Q} = \boldsymbol{\varepsilon}_0^{-1} \cdot \mathbf{N}_{\rm i}$.

Аналогично разглеждане може да се направи и за статистическия параметър $\mathbf{R}$. Той може да се представи във вида $\mathbf{R} = \mathbf{D}_0 - \mathbf{M}_{\rm d}$, където $\mathbf{D}_0 = \boldsymbol{\varepsilon}_0^{-1} \cdot \mathbf{N}_{\mathbf{d}}$ и

(39)
$$\mathbf{M}_{\mathbf{d}} = \frac{1}{\phi_{\rm i}\phi_{\rm m}} \lim_{\rho\to 0} \int_{\bar{\Omega}_{\rm d}(\rho)} \mathbf{H}_0(\mathbf{y})\left[S_2(\mathbf{y}) - \phi_{\rm i}^2\right] \mathrm{d}\mathbf{y}$$

за някакъв елипсоид $\Omega_{\rm d}$. Ако средата има "елипсоидална" симетрия в смисъл, че функцията $S_2(\mathbf{y})$ зависи от $\mathbf{y}$ само чрез израза $|\mathbf{Z}_{\rm d} \cdot \mathbf{y}|$, то $\mathbf{M}_{\mathbf{d}}$ се анулира. Понте Кастанеда и Уилис [10] разглеждат дисперсия, състояща се от $N-1$ вида включвания, като тези от един и същ вид имат една и съща форма, ориентация и материални (еластични) свойства, а техните случайни разпределения в матрицата имат елипсоидални симетрии. За дисперсия от еднакво ориентирани елипсоидални включвания с тензор $\mathbf{Z}_{\rm i}$, чието разпределение в матрицата е с елипсоидална симетрия с тензор $\mathbf{Z}_{\rm d}$, те получават оценки в явна форма при $\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \boldsymbol{\varepsilon}_{\rm m}$. За такава дисперсия при този избор на $\boldsymbol{\varepsilon}_0$, но за произволна функция $S_2(\mathbf{y})$, нашата формула (36) приема вида

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_e = \boldsymbol{\varepsilon}_{\rm m} + \left[\mathbf{I} - \langle \boldsymbol{\alpha}_{\rm im} \rangle \cdot \mathbf{K}\phi_{\rm i}\right]^{-1} \cdot \langle \boldsymbol{\alpha}_{\rm im} \rangle \phi_{\rm i},$$

където $\boldsymbol{\alpha}_{\rm im} = \left[(\boldsymbol{\varepsilon}_{\rm i} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\rm m})^{-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_{\rm m}^{-1} \cdot \mathbf{N}_{\rm i}\right]^{-1}$ е тензорът на поляризуемост на елипсоид от дисперсията, а $\mathbf{K} = \boldsymbol{\varepsilon}_{\rm m}^{-1} \cdot \left(\mathbf{N}_{\rm i} - \mathbf{N}_{\mathbf{d}}\phi_{\rm m}\right) + \mathbf{M}_{\mathbf{d}}\phi_{\rm m}$. В частност, при $\mathbf{M}_{\mathbf{d}} = 0$ и $\mathbf{N}_{\mathbf{d}} = \mathbf{N}_{\rm i}$, т.е. за разпределение, имащо елипсоидална симетрия с тензор $\mathbf{Z}_{\rm d} = \mathbf{Z}_{\rm i}$, имаме $\mathbf{K} = \boldsymbol{\varepsilon}_{\rm m}^{-1} \cdot \mathbf{N}_{\rm i}\phi_{\rm i}$. Тогава получаваме добре известната формула

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_e = \boldsymbol{\varepsilon}_{\rm m} + \left[\mathbf{I} - \langle \boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{im}} \rangle \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{\rm m}^{-1} \cdot \mathbf{N}_{\rm i}\phi_{\rm i}\right]^{-1} \cdot \langle \boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{im}} \rangle \phi_{\rm i},$$

представляваща обобщение на формулата на Клаузиус-Мосоти (вж., например, [9]).

Настоящата разработка е частично финансирана от фонд „Научни изследвания" на Шуменския университет „Епископ К. Преславски" по проект РД-08-237/2014.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hashin, Z., S. Shtrikman, A variational approach to the theory of the effective magnetic permeability of multiphase materials, *J. Appl. Phys.,* **33**, 3125 (1962)
2. Willis, J. R., Bounds and self-consistent estimates for the overall properties of anisotropic composites, *J. Mech. Phys. Solids,* **25**,185 (1977)
3. Willis, J. R., "Lectures on mechanics of random media", *Mechanics of Random and Multiscale Structures*, CISM Lecture Notes, edited by D. Jeulin and M. Ostoja-Starzewski, 221-267. Springer, Wein/New York (2002).
4. Stratonovich, R. L., *Topics in theory of random noises*, Vol. 1, New York, Gordon and Breach (1967)
5. Christov, C. I., K. Z. Markov, Stochastic functional expansion for heat conductivity of polydisperse perfectly disordered suspensions, *Annuaire Univ. Sofia, Fac. Math. Mec., Livre 2*, **79**, 191 (1988)
6. Zvyatkov, Kr. D., On the effective conductivity of a class of random dispersions, *Annuaire Univ. Sofia, Fac. Math. Inf., Livre 2*, **89**, 217 (1995)
7. Markov, K. Z., On the cluster bounds on the effective properties of microcracked solids, *J. Mech. Phys. Solids,* **46**, 357 (1998)
8. Tsvyatkov, Kr. D., PhD Thesis, Sofia, 1983 (In Bulgarian)
9. Sihvola, A., Electromagnetic mixing formulas and applications, *IEE Publishing, Electromagnetic wave series*, London, 1999
10. Ponte Castañeda, P., P. Ponte, J. R. Willis, The effect of particle distribution on the effective behavior of composite materials and cracked media, *J. Mech. Phys. Solids,* **43,** 1919 (1995)