ЕДНО НЕРАВЕНСТВО ЗА АБЕЛЕВ ИНТЕГРАЛ

АНА Д. МИХАЙЛОВА

INEQUALITY INVOLVING A CERTAIN ABELIAN INTEGRAL

ANA D. MIHAYLOVA

ABSTRACT: *In the present paper we prove that the value of a certain Abelian integral in one of its singular points is not zero. The behavior of this integral is quite important in the investigation of the infinitesimal 16-th Hilbert problem (the problem for limit cycles) for a Hamiltonian of cubic type with two centers and two saddle points.*

KEYWORDS: *limit cycles, zeros of Abelian integrals*

1. Увод. Формулировка на основния резултат.

Нека $H(x,y)$ е кубичният полином с реални коефициенти:

$$H(x,y) = \frac{x^2+y^2}{2} + Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 \quad , \quad (x,y) \in \mathbf{R}^2 \quad . \tag{1.1}$$

Ще го наричаме Хамилтониан. Нека $\Sigma \subset \mathbb{R}$ е множеството от реални числа, за които съществува затворена ограничена компонента $\delta(h)$ на линията на ниво $\Gamma_h = \{H(x,y) = h\}$, неминаваща през критични точки. Нека $f(x,y)$, $g(x,y)$ са два реални полинома от степен ненадвишаваща n. Дефинираме пълния Абелев интеграл

$$I(h) = \int\limits_{\delta(h)} [g(x,y)dx - f(x,y)dy] \quad , \qquad h \in \Sigma .$$

Инфинитезималният Хилбертов проблем изисква да се намери оценка отгоре $Z(3,n)$ за броя на нулите на Абелевия интеграл $I(h)$ за $h \in \Sigma$ зависеща само от степените на полиномите $H(x,y)$, $f(x,y)$, $g(x,y)$.

Ние предполагаме,че Хамилтонианите от (1.1) удовлетворяват следните две предположения:

- **(A1)** Съответната непертурбирана Хамилтонова система

$$\begin{aligned} \dot{x} &= H_y \; ; \\ \dot{y} &= -H_x \; . \end{aligned} \tag{1.2}$$

Разработката е частично финансирана от Договор ДДВУ 02/91/2010г. с ФНИ и от Договор за научна работа РД-08-237/2014г. с Шуменския университет "Еп. К. Преславски".

притежава четири критични точки, като две от тях са седлови точки, а другите две са центрове.

- (**A2**) Съответните критични стойности на $H(x,y)$ са различни помежду си.

Забележка 1.1. От предположението (**A2**) следва, че $BC \neq 0$. Освен това, можем да приемем, че $B^2 - 4AC < 0$. Ако $B^2 - 4AC = 0$, $H(x,y)$ няма да притежава четири различни критични точки.

Известно е, че Хамилтоновите функции $H(x,y)$, които притежават свойствата (**A1**) и (**A2**), образуват отворено подмножество в пространството на всички реални кубични Хамилтониани.

От [5], [2] знаем,че за критичните стойности h_1, h_2, h_3, h_4 на H, при направените предположения, са валидни следните неравенства:

$$0 = h_1 < h_2 < h_3 < h_4 \quad .$$

Критичните стойности h_1 и h_4 отговарят на двата центъра, а критичните стойности h_2 и h_3 - на двете седлови точки. За тези Хамилтониани, също така, е в сила: $\Sigma = (h_1, h_2) \cup (h_3, h_4)$ (Σ - максималният интервал на съществуване на непрекъсната фамилия от овали на $\{H(x,y) = h\}$, неминаващи през критични точки).

Нека означим изчезващия цикъл в точката h_j с $\gamma_j(h)$, $j = 1,2,3,4$. Ясно е, че $\delta(h) \equiv \gamma_1(h)$ за $h \in (h_1, h_2)$ и $\delta(h) \equiv \gamma_4(h)$ за $h \in (h_3, h_4)$.

Извършваме последователно следните смени на променливите:

$$z = y(1 + 2Cx) + Bx^2 \quad ; \tag{1.3}$$

$$\begin{cases} x \to mx + n \quad , \\ m = \frac{\sqrt{D}}{8AC - 2B^2}, \quad n = -\frac{A+C}{8AC-2B^2} \quad , \\ D = (A-C)^2 + 2(A^2 + B^2 + C^2) \quad ; \end{cases} \tag{1.4}$$

$$z \to \frac{D}{\sqrt{8|B^2 - 4AC|^3}} z \quad . \tag{1.5}$$

Тези смени привеждат Γ_h в нормалната форма:

$$\Gamma_h = \left\{ \pm \frac{1}{2} z^2 = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \alpha x + \beta \right\} \quad , \tag{1.6}$$

където

$$\alpha = \frac{2\sqrt{D}\left[(A+C)((A-C)^2 + B^2) - 4Ch(B^2 - 4AC)^2\right]}{D^2} \quad ,$$

$$\beta = \frac{32(B^2 + C^2 - 3AC)(B^2 - 4AC)^2 h - (3A^2 - 10AC + 4B^2 + 3C^2)(A+C)^2}{4D^2} \quad .$$

Знакът в (1.6) съвпада със знака на $B^2 - 4AC$. Извършвайки линейна смяна на h:

$$h \to -\frac{D^{\frac{3}{2}}}{8C(B^2 - 4AC)^2} h \quad , \tag{1.7}$$

получаваме, че $\alpha = h + \alpha_1$ and $\beta = \beta_1 h + \beta_2$.
Смените (1.3), (1.4), (1.5), (1.7) и нормалната форма (1.6) са заимствувани от [2].

Нека означим образите на $I(h)$, $\gamma_j(h)$, $(j = 1,2,3,4)$, след горните смени на променливите съответно с $\widetilde{I}(h)$, $\widetilde{\gamma}_j(h)$, $j = 1,2,3,4$. Нека въведем числата μ, ν, ρ, които ще използуваме многократно като степени на полиноми:

$$\mu = \left[\frac{n-2}{3}\right] \; ; \quad \nu = \left[\frac{n-3}{3}\right] \; ; \quad \rho = \left[\frac{n-1}{3}\right] \; . \tag{1.8}$$

за всяко $n \in \mathbf{N}$.

В сила е следната лема ([3]):

Лема 1.2. *За $\widetilde{I}(h)$ са в сила следните декомпозиции:*

$$\begin{aligned}
&\widetilde{I}(h) = \widetilde{u}_\mu(h) \int\limits_{\widetilde{\gamma}_1(h)} z dx + \widetilde{v}_\mu(h) \int\limits_{\widetilde{\gamma}_1(h)} \tfrac{z dx}{(x+\beta_1)^2} + \\
&\widetilde{w}_\nu(h) \int\limits_{\widetilde{\gamma}_1(h)} (x+\beta_1) z dx + \widetilde{s}_\rho(h) \int\limits_{\widetilde{\gamma}_1(h)} \tfrac{z dx}{x+\beta_1} \quad , \text{за} \quad h \in (h_1, h_2) \; ; \\
&\widetilde{I}(h) = \widetilde{u}_\mu(h) \int\limits_{\widetilde{\gamma}_4(h)} z dx + \widetilde{v}_\mu(h) \int\limits_{\widetilde{\gamma}_4(h)} \tfrac{z dx}{(x+\beta_1)^2} + \\
&\widetilde{w}_\nu(h) \int\limits_{\widetilde{\gamma}_4(h)} (x+\beta_1) z dx + \widetilde{s}_\rho(h) \int\limits_{\widetilde{\gamma}_4(h)} \tfrac{z dx}{x+\beta_1} \quad , \text{за} \quad h \in (h_3, h_4) \; ;
\end{aligned} \tag{1.9}$$

където $\widetilde{u}_\mu(h)$, $\widetilde{v}_\mu(h)$, $\widetilde{w}_\nu(h)$, $\widetilde{s}_\rho(h)$ са полиноми на h от степени: $deg\, \widetilde{u}_\mu(h) = deg\, \widetilde{v}_\mu(h) = \mu$; $deg\, \widetilde{w}_\nu(h) = \nu$; $deg\, \widetilde{s}_\rho(h) = \rho$. Тези полиноми са едни и същи и както когато $h \in (h_1, h_2)$, така и когато $h \in (h_3, h_4)$. (Ако степента е отрицателна, съответният полином се взема да бъде тъждествено равен на нула).

До края на настоящата работа ще използуваме диференциалните едно - форми ω_j, $j = 0,1,2,3$, дефинирани с равенствата:

$$\begin{cases} \omega_0 = \frac{dx}{z} \quad ; & \omega_1 = \frac{x+\beta_1}{z} dx \quad ; \\ \omega_2 = \frac{dx}{z(x+\beta_1)} \quad ; & \omega_3 = \frac{(x+\beta_1)^2}{z} dx \quad . \end{cases} \tag{1.10}$$

Тези 1- форми възникват по следния начин:

$$\begin{aligned}
&\left[\int\limits_{\widetilde{\gamma}_j} \tfrac{z}{(x+\beta_1)} dx\right]' = \int\limits_{\widetilde{\gamma}_j} \omega_0 \; ; \qquad \left[\int\limits_{\widetilde{\gamma}_j} z dx\right]' = \int\limits_{\widetilde{\gamma}_j} \omega_1 \; ; \\
&\left[\int\limits_{\widetilde{\gamma}_j} \tfrac{z}{(x+\beta_1)^2} dx\right]' = \int\limits_{\widetilde{\gamma}_j} \omega_2 \; ; \qquad \left[\int\limits_{\widetilde{\gamma}_j} (x+\beta_1) z dx\right]' = \int\limits_{\widetilde{\gamma}_j} \omega_3 \; .
\end{aligned} \tag{1.11}$$

В статията [7] е доказано, че $\left.\left(\int\limits_{\widetilde{\gamma}_1} \omega_0\right)\right|_{h=h_1} \neq 0$.

Основният резултат от настоящата работа е следната теорема:

Теорема 1.3. *В сила е следното неравенство:*

$$\left.\left(\int\limits_{\widetilde{\gamma}_4} \omega_0\right)\right|_{h=h_4} \neq 0 \quad . \tag{1.12}$$

2. Доказателство на теорема 1.3.

Разглеждаме Хамилтониана, който се получава след смените: (1.3), (1.4), (1.5), (1.7) Да го означим с $\widetilde{H}(x,z)$. За да опростим записа, ще бележим с $P_4(x)$ следния полином: $P_4(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \alpha_1 x + \beta_2$. Разглеждаме линиите на ниво на $\widetilde{H}(x,z)$:

$$\widetilde{H}(x,z) = -\frac{1}{2}\left(\frac{z^2}{x+\beta_1}\right) - \frac{P_4(x)}{x+\beta_1} = h\ ,\ h \in \mathbf{R}.$$

Да означим с $(x_1,0)$, $(x_2,0)$, $(x_3,0)$, $(x_4,0)$ четирите критични точки на $\widetilde{H}(x,z)$. Съответните им критични стойности са $0 = h_1 < h_2 < h_3 < h_4$. Числата x_1, x_2, x_3, x_4 съвпадат с четирите реални и различни корена на уравнението:

$$P_4'(x)(x+\beta_1) - P_4(x) = 0\ . \tag{2.1}$$

Освен това, в точката $(x_j,0)$ е изпълнено:

$$\widetilde{H}(x_j,0) - h_j = -\frac{P_4(x_j)}{x_j+\beta_1} - h_j = 0\ , \tag{2.2}$$

тоест,

$$P_4(x_j) + h_j(x_j+\beta_1) = 0\ . \tag{2.3}$$

Ще докажем, че $x = x_j$ е двукратен, но не и трикратен корен на последния полином. Наистина, от (2.1) за $x = x_j$ имаме:

$$P_4'(x_j) = \frac{P_4(x_j)}{x_j+\beta_1}\ .$$

Използувайки това равенство и (2.2), получаваме последователно:

$$[P_4(x) + h_j(x+\beta_1)]'\Big|_{x=x_j} = \left[P_4'(x) + h_j\right]\Big|_{x=x_j} = \frac{P_4(x_j)}{x_j+\beta_{1.}} + h_j = 0\ .$$

Ще докажем, че $[P_4(x) + h_j(x+\beta_1)]''\Big|_{x=x_j} = P_4''(x_j) = 3x_j^2 - 1 \neq 0$ като използуваме, че особените точки $(x_1,0)$, $(x_4,0)$ са центрове, а особените точки $(x_2,0)$, $(x_3,0)$ са седлови точки на Хамилтоновата система:

$$\begin{cases} \dot{x} = \widetilde{H}_z\ ; \\ \dot{z} = -\widetilde{H}_x\ . \end{cases}$$

Линеаризацията на тази система, отговаряща на критичната точка $(x_j,0)$, има матрица $M(x_j)$, равна на:

$$M(x_j) = \begin{pmatrix} \widetilde{H}_{zx}(x_j,0) & \widetilde{H}_{zz}(x_j,0) \\ -\widetilde{H}_{xx}(x_j,0) & -\widetilde{H}_{xz}(x_j,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{x_j+\beta_1} \\ \frac{P_4''(x_j)}{x_j+\beta_1} & 0 \end{pmatrix}\ .$$

Собствените числа $\lambda_1(x_j)$, $\lambda_2(x_j)$ на $M(x_j)$ са корени на квадратното уравнение $\lambda^2 = -\frac{P_4''(x_j)}{(x_j+\beta_1)^2}$. Обаче, знаем, че когато особената точка е център, тогава $\lambda_1(x_j)$ и $\lambda_2(x_j)$ са чисто имагинерни числа, тоест, $P_4''(x_j) > 0$ за $j = 1$ и за $j = 4$. Когато особената точка е седлова, тогава $\lambda_1(x_j)$ и $\lambda_2(x_j)$ са реални и $\lambda_1(x_j)\lambda_2(x_j) < 0$. Следователно, $P_4''(x_j) < 0$ за $j = 2$ и за $j = 3$.

Забележка 2.1. Критичната точка, отговаряща на първия център преди смените (1.3), (1.4), (1.5), (1.7), е $(0,0)$. Следователно, $x_1 = -\frac{n}{m} = \frac{(A+C)}{D^{\frac{1}{2}}}$. Тоест, можем да пресметнем явно, че

$$P_4''(x_1) = 3x_1^2 - 1 = -\frac{2(B^2 - 4AC)}{D} > 0\,. \tag{2.4}$$

За пълнота ще пресметнем и $x_1 + \beta_1$:

$$x_1 + \beta_1 = \frac{A+C}{D^{\frac{1}{2}}} - \frac{(B^2 + C^2 - 3AC)}{CD^{\frac{1}{2}}} = -\frac{B^2 - 4AC}{CD^{\frac{1}{2}}}\,. \tag{2.5}$$

От направените разсъждения следва, че за всяко $j = 1,2,3,4$, можем да запишем уравненията на линиите на ниво на $\widetilde{H}(x,z)$ по следния начин:

$$\begin{aligned}&\widetilde{H}(x,z) - h_j = -\frac{1}{2}\left(\frac{z^2}{x+\beta_1}\right) - \frac{P_4(x) + h_j(x+\beta_1)}{x+\beta_1} = \\ &-\frac{1}{2}\left(\frac{z^2}{x+\beta_1}\right) - \frac{(x-x_j)^2 Q_j(x)}{x+\beta_1} = h - h_j\,,\end{aligned} \tag{2.6}$$

където $Q_j(x)$ са полиноми на x от втора степен. За тях е изпълнено $Q_j(x_j) \neq 0$. В частност, за $j = 1$, $Q_1(x)$ може да се пресметне явно и за него се получава: $Q_1(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{A+C}{2D^{\frac{1}{2}}}x + \frac{3}{4}\frac{(A+C)^2}{D} - \frac{1}{2}$.

- Ще докажем неравенството (1.12). Линията на ниво $\{\widetilde{H}(x,z) = h\}$ притежава реална компактна затворена компонента (овал) за $h \in (h_3, h_4)$. Въпросният овал е реален представител на $\widetilde{\gamma}_4$ - изчезващия цикъл в точката $h = h_4$.

  Нека $h \in (h_3, h_4)$**.** Вместо (2.6) разглеждаме:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{z^2}{x+\beta_1}\right) + \frac{(x-x_4)^2 Q_4(x)}{x+\beta_1} = h_4 - h\,. \tag{2.7}$$

  Реален овал съществува, когато са изпълнени условията:

$$\left|\begin{array}{l} x + \beta_1 > 0\,; \\ Q_4(x) > 0\,. \end{array}\right.$$

  Нека тези условия са налице. Тогава в (2.7) правим следната смяна на променливите:

$$\left\{\begin{array}{l} z\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{x+\beta_1}} = u\,; \\ (x - x_4)\sqrt{\frac{Q_4(x)}{x+\beta_1}} = v\,. \end{array}\right.$$

  В новите променливи (2.7) приема вида: $u^2 + v^2 = h_4 - h$.

  От втората връзка между старите и новите променливи ще изразим x като неявна функция на v в околност на точката с координати $x = x_4, v = 0$. За целта разглеждаме помощната функция $\Theta(x,v) = (x - x_4)\sqrt{\frac{Q_4(x)}{x+\beta_1}} - v$. За нея е изпълнено:

$$\left\{\begin{array}{l} \Theta(x_4, 0) = 0\,; \\ \Theta_x(x_4, 0) = \sqrt{\frac{Q_4(x_4)}{x_4+\beta_1}} \neq 0\,. \end{array}\right.$$

От теоремата за неявните функции следва, че в околност на точката $(x = x_4, v = 0)$, можем да изразим от уравнението $\Theta(x, v) = 0$, x, и то по единствен начин, като неявна функция $x = x(v)$ на v . При това, получената неявна функция е аналитична в околност на $(x = x_4, v = 0)$. Ще пресметнем първите два члена от развитието на $x(v)$ в ред на Тейлър в околност на $v = 0$. От дефиницията на $\Theta(x, v)$ веднага се вижда, че $x(0) = x_4$. Да пресметнем $x^{'}(0)$. Диференцираме спрямо v тъждеството:

$$(x(v) - x_4)\sqrt{\frac{Q_4(x(v))}{x(v) + \beta_1}} - v \equiv 0 \ .$$

Получаваме:

$$x^{'}(v)\sqrt{\frac{Q_4(x(v))}{x(v) + \beta_1}} + (x(v) - x_4)\left(\sqrt{\frac{Q_4(x(v))}{x(v) + \beta_1}}\right)^{'} \equiv 1 \ .$$

Заместваме в това тъждество v с 0 и изразяваме $x^{'}(0)$. Получава се $x^{'}(0) = \sqrt{\frac{x_4+\beta_1}{Q_4(x_4)}} \neq 0$. Следователно, $x(v)$ има следното развитие в околност на $v = 0$:

$$x(v) = x_4 + \sqrt{\frac{x_4 + \beta_1}{Q_4(x_4)}}v + O(v^2) \ .$$

От тук веднага следва, че

$$dx(v) = \left(\sqrt{\frac{x_4 + \beta_1}{Q_4(x_4)}} + O(v)\right) dv \ .$$

Като заместим $x(v)$ с полученото развитие във връзката между z и u, намираме:

$$z = \sqrt{2}u\sqrt{x_4 + \sqrt{\frac{x_4 + \beta_1}{Q_4(x_4)}}v + O(v^2) + \beta_1} \ .$$

Правим нова смяна на променливите:

$$\begin{cases} u = \sqrt{h_4 - h}\cos\varphi \ ; \\ v = \sqrt{h_4 - h}\sin\varphi \ . \end{cases}$$

Веднага пресмятаме $dv = \sqrt{h_4 - h}\cos\varphi d\varphi$. Преминаваме към пресмятането на $\int\limits_{\widetilde{\gamma}_4} \omega_0$. Получаваме последователно:

$$\int\limits_{\widetilde{\gamma}_4} \omega_0 = \int\limits_{\widetilde{\gamma}_4} \frac{dx}{z} = \int\limits_{u^2+v^2=h_4-h} \frac{\left(\sqrt{\frac{x_4+\beta_1}{Q_4(x_4)}} + O(v)\right) dv}{\sqrt{2}u\sqrt{x_4 + \sqrt{\frac{x_4+\beta_1}{Q_4(x_4)}}v + O(v^2) + \beta_1}} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\left(\sqrt{\frac{x_4+\beta_1}{Q_4(x_4)}} + O(\sqrt{h_4-h}\sin\varphi)\right)\sqrt{h_4-h}\cos\varphi d\varphi}{\sqrt{2}\sqrt{h_4-h}\cos\varphi\sqrt{x_4+\sqrt{\frac{x_4+\beta_1}{Q_4(x_4)}}\sqrt{h_4-h}\sin\varphi + O((\sqrt{h_4-h}\sin\varphi)^2)+\beta_1}}$$

$$\overset{h\to h_4}{\longrightarrow} = \sqrt{\frac{x_4+\beta_1}{Q_4(x_4)}}\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{x_4+\beta_1}}\int_0^{2\pi} d\varphi = \sqrt{2}\pi\sqrt{\frac{1}{Q_4(x_4)}} \neq 0\,.$$

С това неравенството (2.1) е доказано.

3. Благодарности.

Авторката изказва своята благодарност към член - кор. проф. дмн Емил Хорозов от Софийския университет "Св. Кл. Охридски"за постановката на задачата и за оказаната помощ при нейното решаване.

Литература

[1] V. I. Arnold, S. M. Gusein-Zade, A. N. Varchenko, Singularities of Differentiable Maps. Vol II. Monodromy and Asymptotics of Integrals, Monographs in Mathematics, vol. 83, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1988.

[2] L. Gavrilov and E. Horozov, Limit cycles of perturbations of quadratic Hamiltonian vector fields, *J. Math. Pures Appl.* (9) **72** (1993), No 2, 213 - 238.

[3] E. Horozov and I. D. Iliev, Linear estimate for the number of zeros of Abelian integrals with cubic Hamiltonians, *Nonlinearity* **11** (1998), 1521 - 1537 .

[4] E. Horozov and I. D. Iliev, On the number of limit cycles in perturbations of quadratic Hamiltonian systems, *Proc. Lond. Math. Soc.* **69** (1994) No 1, 198 - 224 .

[5] E. Horozov and I. D. Iliev, Perturbations of quadratic Hamiltonian systems with symmetry, *Annales de l'I. H. P., Section C*, **tome 13**, No 1 (**1996**), 198 - 224 .

[6] E. Horozov and A. Mihajlova, An improved estimate for the number of zeros of Abelian integrals for cubic Hamiltonians, *Nonlinearity* **23** (2010) , 3053 - 3069 .

[7] А. Михайлова, Върху един Абелев интеграл, *МАТТЕХ 2012 Сборник научни трудове*, **том 1** (2012), 108 - 114 .