Annual of Konstantin Preslavsky University of Shumen
vol. XXI C, 2020, pp. 91 - 102

TRIGONOMETRIC SUBSTITUTIONS IN SOME IRRATIONAL EQUATIONS

DIANA R. STEFANOVA

ABSTRACT: *The article is dedicated to the application of trigonometric substitutions in solving some irrational equations.*

KEYWORDS: *trigonometric substitutions, irrational equations*

2020 Math. Subject Classification: 97D50, 97H30

ТРИГОНОМЕТРИЧНИ СУБСТИТУЦИИ ПРИ НЯКОИ ИРАЦИОНАЛНИ УРАВНЕНИЯ

ДИАНА Р. СТЕФАНОВА

През настоящия XXI век образователната система се намира в пространството на нови предизвикателства. „Тя има за задача да осигури не само необходимата подготовка на всички подрастващи, но и да направи тяхното поколение адаптивно към изменящата се среда. Решаването на тези проблеми трябва да се осъществи не само на тактическо, но и на стратегическо равнище“ [1].

В училищния курс по математика се използват тригонометрични функции при решаване на задачи по планиметрия и стереометрия. Различните курсове по висша математика прилагат тригонометрични субституции за решаване на много групи интеграли и диференциални уравнения. В настоящата статия разглеждаме приложението на тригонометрични субституции при решаване на някои ирационални уравнения. Предложените задачи са подходящи за ученици и студенти, проявяващи интерес към математиката, и спомагат за повишаване нивото на подготовка за различни математически конкурси, олимпиади и други. За да се решат тези задачи е необходимо много добро владеене на решаването на различните групи ирационални уравнения, свойствата на тригонометричните функции и уравнения. [7, 10, 15, 16]. Разгледаните задачи допринасят за усъвършенстване уменията на учениците и студентите; усвояване от тях на различни математически дейности в различни ситуации; повишаване на математическата култура и интелектуалното им развитие. Целта е обвързване на знанията за ирационални уравнения и тригонометрични функции. Формират се умения за пренос на знания и обратно. Освен това, за да открият различните връзки, учениците и студентите упражняват методи на научно познание, убеждават се в тяхното значение и у тях се поражда стремеж за овладяването им. Всичко това е необходимо на творческата личност в условията на съвременния живот, когато трябва умело да се използват знанията от една област на науката в друга [3, 4, 5, 6, 13, 15]. Сред ирационални уравнения има такива, които трудно биха се решили от учениците със знанията, които имат, а използването на субституции с тригонометрични функции води до по-рационално решение. Трудно се открива връзката между алгебричните изрази и тригонометричните формули. Това, което обединява задачите от този вид е, че в уравнението се срещат изрази от вида $\sqrt{1-x^2}$ или $\sqrt{x^2-1}$ или $\sqrt{x^2+1}$. Тогава може да въведем ново неизвестно φ, като положим $x=\sin\varphi$ или $x=\cos\varphi$ или $x=tg\varphi$. Когато използваме този метод се получават кратки и лесни решения и идейни по-ясни. Друго важно съображение е, че те водят до удобни тригонометрични преобразования понижаващи степента на уравнението [11, 14, 17].

Тук предлагаме примери, които илюстрират конкретни приложения на разгледаните идеи.

Задача 1. Да се реши уравнението $\sqrt{1-x}=2x^2-1+2x\sqrt{1-x^2}$.

Решение: Допустимите стойности в даденото уравнение са $|x| \le 1$, тогава нека положим $x = \cos\varphi$, където $\varphi \in [0;\pi]$, получаваме уравнението $\sqrt{2}\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right| = \cos 2\varphi + 2\cos\varphi|\sin\varphi|$. Тъй като $\sin\frac{\varphi}{2} \ge 0$ и $\sin\varphi \ge 0$, то имаме $\sqrt{2}\sin\frac{\varphi}{2} = \cos 2\varphi + 2\cos\varphi\sin\varphi$, а след това и $\sqrt{2}\sin\frac{\varphi}{2} = \cos 2\varphi + \sin 2\varphi \Leftrightarrow$ $\sin\left(\frac{3\varphi}{4} + \frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{5\varphi}{4} + \frac{\pi}{8}\right) = 0$, откъдето намираме, че $\varphi_1 = -\frac{\pi}{6} + \frac{4k\pi}{3}, k \in Z, \varphi_2 = \frac{3\pi}{10} + \frac{4n\pi}{5}, n \in Z$. В интервала $[0;\pi]$ принадлежи само $\varphi = \frac{3\pi}{10}$. Тогава даденото уравнение има корен $x = \cos\frac{3\pi}{10}$.

Задача 2. Да се реши уравнението
$\sqrt{1-x^2}\left(1-4x^2\right) + x\left(3-4x^2\right) = \sqrt{2}$.

Решение: Допустимите стойности в даденото уравнение са $|x| \le 1$, тогава ще положим $x = \sin\varphi$, където $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Като заместим достигаме до уравнението
$\cos\varphi\left(4\cos^2\varphi - 3\right) + \sin\varphi\left(3 - 4\sin^2\varphi\right) = \sqrt{2} \Leftrightarrow$
$\cos 3\varphi + \sin 3\varphi = \sqrt{2} / : \sqrt{2} \Leftrightarrow$ $\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 3\varphi + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 3\varphi = 1$

$\Leftrightarrow \cos 3\varphi \sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}\sin 3\varphi = 1 \Leftrightarrow \quad \sin\left(3\varphi + \frac{\pi}{4}\right) = 1.$ Откъдето намираме, че $\varphi = \frac{\pi}{12} + \frac{2n\pi}{3}, n \in Z,$ но $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{12},$ тогава даденото уравнение има корен $x = \sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$

Задача 3. Да се реши уравнението $(x+1)\sqrt{1-x^2} + x = \sqrt{2} + \frac{1}{2}.$

Решение: Допустимите стойности в даденото уравнение са $|x| \le 1,$ тогава ще положим $x = \sin\varphi,$ където $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$ и достигаме до уравнението $(1+\sin\varphi)\cos\varphi + \sin\varphi = \sqrt{2} + \frac{1}{2}$ или $\sin\varphi + \sin\varphi\cos\varphi + \sin\varphi = \sqrt{2} + \frac{1}{2}.$ Полагаме $\sin\varphi + \cos\varphi = t, t \in \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right],$ после повдигаме на втора степен, т.е. $(\sin\varphi + \cos\varphi)^2 = t^2,$ откъдето получаваме $\sin\varphi\cos\varphi = \frac{t^2 - 1}{2}.$ Разглеждаме уравнението $\frac{t^2-1}{2} + t = \sqrt{2} + \frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow t^2 + 2t - 2 - 2\sqrt{2} = 0,$ което има корени $t_1 = \sqrt{2}$ и $t_2 = -2 - \sqrt{2},$ но $t_2 \notin \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$ и само $t_1 = \sqrt{2}$ удовлетворява това условие, тогава $\sin\varphi+\cos\varphi=\sqrt{2}$, откъдето $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$, т.е. $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Задача 4. Да се реши уравнението $x^2\sqrt{1-x^2}=|x|^3-|x|+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение: Лявата и дясната страна на даденото уравнение се явяват четни функции, тогава ще положим $|x|=\sin\varphi$, където $\varphi\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$. Тогава уравнението приема вида $\sin^2\varphi\cos\varphi=\sin^3\varphi-\sin\varphi+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ или $\sin\varphi\cos\varphi(\sin\varphi+\cos\varphi)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow$ $\sin 2\varphi\sin\left(\varphi+\dfrac{\pi}{4}\right)=1$.

Поради $|\sin\varphi|\le 1$ последното равенство е изпълнено когато $\left|\begin{array}{l}\sin 2\varphi=1\\ \sin\left(\varphi+\dfrac{\pi}{4}\right)=1\end{array}\right.$ или $\left|\begin{array}{l}\sin 2\varphi=-1\\ \sin\left(\varphi+\dfrac{\pi}{4}\right)=-1\end{array}\right.$. В интервала $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ първата система има решение $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$, а втората няма решение. Тогава за даденото уравнение имаме $|x|=\sin\dfrac{\pi}{4}$, т.е. $x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Задача 5. Да се реши уравнението
$6x\sqrt{1-9x^2}+18x^2-3\sqrt{2}x-1=0$.

Решение: В условието на задачата имаме $\sqrt{1-9x^2}$, което налага да се въведе ново неизвестно, а именно полагаме $y=3x$, тогава даденото уравнение добива вида $2y\sqrt{1-y^2}+2y^2-\sqrt{2}y-1=0, y\in[-1,1]$ (1). След което ще положим $y=\sin\varphi$, където $\varphi\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Заместваме в (1) и получаваме $2\sin\varphi\cos\varphi+2\sin^2\varphi-\sqrt{2}\sin\varphi-1=0\Leftrightarrow$ $\sin 2\varphi-\cos 2\varphi-\sqrt{2}\sin\varphi=0\Leftrightarrow$ $\sin\left(2\varphi-\frac{\pi}{4}\right)-\sin\varphi=0$ $\Leftrightarrow 2\sin\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{3\varphi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)=0,$ но $\varphi\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, тогава намираме $\varphi_1=\frac{\pi}{4},\varphi_2=\frac{5\pi}{12},\varphi_3=-\frac{\pi}{4}$, тогава даденото уравнение има корени $x_1=\frac{1}{3}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{6},x_2=\frac{1}{3}\sin\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{12}$, и $x_3=\frac{1}{3}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{6}$.

Задача 6. Да се реши уравнението $\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+x}}}=x$.

Решение: Допустимите стойности в даденото уравнение са $x\in\left[\sqrt{2},2\right]$, тогава ще положим $x=2\cos\varphi$, където $\varphi\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, след като заместим в даденото уравнение достигаме до $\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+\cos\varphi}}}=2\cos\varphi\Leftrightarrow$

$$\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{4\cos^2\frac{\varphi}{2}}}}=2\cos\varphi \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{2+\sqrt{2-2\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|}}=2\cos\varphi \Leftrightarrow \qquad \sqrt{2+\sqrt{2-2\cos\frac{\varphi}{2}}}=2\cos\varphi \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{2+\sqrt{4\sin^2\frac{\varphi}{4}}}=2\cos\varphi \Leftrightarrow \qquad \sqrt{2+2\left|\sin\frac{\varphi}{4}\right|}=2\cos\varphi \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{2+2\sin\frac{\varphi}{4}}=2\cos\varphi \Leftrightarrow \qquad \sqrt{2}\left|\sin\frac{\varphi}{8}+\cos\frac{\varphi}{8}\right|=2\cos\varphi \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{2}\left(\sin\frac{\varphi}{8}+\cos\frac{\varphi}{8}\right)=2\cos\varphi \Leftrightarrow \qquad 2\cos\left(\frac{\varphi}{8}-\frac{\pi}{4}\right)=2\cos\varphi \Rightarrow$$

$\varphi=\pm\left(\frac{\varphi}{8}-\frac{\pi}{4}\right)+2n\pi, n\in Z.$ От $\varphi\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\Rightarrow\varphi=\frac{2\pi}{9}$, тогава то има корен $x=2\cos\frac{2\pi}{9}$. Използвахме, че $\varphi\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ известно е, че за тези стойности на φ са верни неравенствата $\cos\frac{\varphi}{2}\geq 0, \sin\frac{\varphi}{4}\geq 0, \sin\frac{\varphi}{8}+\cos\frac{\varphi}{8}\geq 0.$

Задача 7. Да се реши уравнението $\sqrt{x^2+1}-x=\frac{5}{2\sqrt{x^2+1}}$.

Решение: В условието на задачата имаме $\sqrt{x^2+1}$, което води до полагане $x=tg\varphi$, където $\varphi\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Като заместим в даденото уравнение, то има вида $\frac{1}{\cos\varphi}-tg\varphi=\frac{5}{2}\cos\varphi$, защото

$\cos\varphi \neq 0,$ получаваме $2-2\sin\varphi = 5\left(1-\sin^2\varphi\right),$ откъдето намираме, че $\sin\varphi = 1$ и $\sin\varphi = -\frac{3}{5},$ но $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ тогава само $\sin\varphi = -\frac{3}{5}$ е решение. След което намираме, че $tg\varphi = -\frac{3}{4},$ а оттам и $x = -\frac{3}{4}.$

Задача 8. Да се реши уравнението $\sqrt{1+x^2} + x = \frac{1}{\left(1+x^2\right)\sqrt{1+x^2}}.$

Решение: В условието на задачата имаме $\sqrt{x^2+1},$ което води до полагане $x = tg\varphi,$ където $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$ Като заместим в даденото уравнение, то има вида $\frac{1+\sin\varphi}{\cos\varphi} = \cos^3\varphi$ или $\frac{1+\sin\varphi}{\cos\varphi} - \left(1-\sin^2\varphi\right)\cos\varphi = 0.$ Умножаваме двете страни на последното уравнение с $\frac{\cos\varphi}{1+\sin\varphi}$ (защото $1+\sin\varphi \neq 0, \cos\varphi \neq 0,$ от $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$) и след това получаваме $1-\left(1-\sin\varphi\right)\left(1-\sin^2\varphi\right) = 0$ или $\sin^3\varphi - \sin^2\varphi - \sin\varphi = 0.$ Откъдето намираме $\sin\varphi = 0$ и $\sin\varphi = \frac{1-\sqrt{5}}{2},$ а след това намираме и $\cos\varphi=\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$, а оттам и $tg\varphi=-\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$. Тогава и с непосредствена проверка установяваме, че даденото уравнение има корени $x=0$ и $x=-\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

Задача 9. Да се реши уравнението

$$\sqrt{1+\frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2}}+\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}=3.$$

Решение: Допустимите стойности в даденото уравнение са $|x|\le 2$, тогава ще положим $x=2\cos\varphi$, където $\varphi\in[0,\pi]$, достигаме до уравнението $\sqrt{1+\sin 2\varphi}+\sqrt{2}\left(\sqrt{1-\cos\varphi}+\sqrt{1+\cos\varphi}\right)=3$, а след това

$$\sqrt{1-\cos\left(\frac{\pi}{4}+2\varphi\right)}+\sqrt{2}\left(\sqrt{2}\sin\frac{\varphi}{2}+\sqrt{2}\cos\frac{\varphi}{2}\right)=3$$

$\Leftrightarrow\sqrt{2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)}+2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)=3.$ От това, че $\varphi\in[0,\pi]$ намираме $\frac{\pi}{4}\le\frac{\pi}{4}+\varphi\le\frac{5\pi}{4}$, но в този интервал $\sin\varphi$ приема както положителни, така и отрицателни стойности. Нека $\frac{\pi}{4}\le\frac{\pi}{4}+\varphi\le\pi$, тогава $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)+2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)=3$ или $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ и от $0\le\varphi\le\frac{3\pi}{4}$, то $\varphi=0,\varphi=\frac{\pi}{2}$ и $x_1=2\cos 0=2, x_2=2\cos\frac{\pi}{2}=0.$ Когато разгледаме

$\pi \le \frac{\pi}{4} + \varphi \le \frac{5\pi}{4}$, т.е. $\frac{3\pi}{4} \le \varphi \le \pi$, то

$$-\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)+2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)=3 \Rightarrow \quad \sin\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)=\frac{3\sqrt{2}}{2},$$

което няма корени. От двата намерени корена $x_1 = 0$ и $x_2 = 2$ непосредствената проверка показва, че само $x = 2$ е корен на даденото уравнение.

Интегрирането между различни учебни дялове по математика повишава интереса на учениците, мотивира ги и развива тяхното логическо мислене и води до повишаване на техния успех и ангажираност във и извън часовете по предмета. [2, 8, 9, 12, 15]. Използваната методиката съдейства за задълбочаване на знанията им, развива уменията им по математика, поставя учениците в реални ситуации, спомага за изграждане умения за мислене на високо ниво и за изследване, а след това те ще показват голяма ангажираност, по-задълбочени знания и много по-високи резултати на различните математически конкурси, олимпиади и други.

ЛИТЕРАТУРА:

[1] Василев, В. (2006). Рефлексията в познанието, самопознанието и практиката. Пловдив: Макрос. (ISBN 978-954-561-195-7)

[2] Георгиева, М., Гроздев, (2016). С. Морфодинамика за развитието на ноосферния интелект, 4-то преработено издание, изд. „Изток – Запад“, ISBN 978-619-90522-0-4

[3] Гроздев, С., В. Ненков. Бележка върху теоремата за степенните средни и обучаващия характер на олимпиадите, Математика и информатика, 2, 2017, 202-206, ISSN 1310-2230

[4] Гроздев, С., В. Ненков. (2017). Алгебрични уравнения без производни, Математика плюс, 3-4, 2017, 55-57, ISSN 0861-8321.

[5] Гроздев, С., В. Ненков, Св. Дойчев. За високи постижения в математиката (в помощ на учителя) (2012). София: „Фондация Миню Балкански“ & „Фондация Америка за България“, ISBN 978-954-92830-3-7.

[6] Гроздев, С., В. Ненков, И. Шаркова. (2015). В помощ на учителя по математика. Сборник от методически разработки. София: „Фондация Миню Балкански“ & „Фондация Америка за България“, ISBN 978-954-92830-5-1

[7] Гроздев, С., В. Ненков. (2012). Около ортоцентъра в равнината и пространството. София: Архимед.

[8] Гроздев, С., В., Ненков. (2012). Три забележителни точки върху медианите на триъгълника. София: Архимед 2000.

[9] Гроздев, С., В. Ненков. За простите числа, Математика и информатика, 4, 2018, 327-337, ISSN 1310-2230.

[10] Запрянов, З., Н. Райков. (2012). Как да решаваме лесно трудни задачи, Просвета, София, ISBN 978-954-01-2714-9

[11] Мерзляк, А. & В. Полонски, М. Якир. (1994). Неочаквана стъпка или сто и тринадесет красиви задачи. Академично издателство „Марин Дринов“, София, ISBN 954-430-289-1

[12] Ненков, В. (2020). Повишаване на математически компетенции с динамична геометрия. София: Архимед 2000, ISBN 978-954-779-291-3

[13] Павлова, Н., Харизанов, Кр., (2015). Технологии за описание на урок в обучението по математика, информатика и информационни технологии, УИ "Епископ Константин Преславски", ISBN 978-619-201-052-2, Шумен

[14] Савова, Б. (1988). Решаване на някои алгебрични задачи с помощта на тригонометрия или вектори, Обучението по математика и информатика, 5, 39 – 42

[15] Павлова, Н., (2016). Методическа и технологична реализация на дидактическо проектиране в обучението по математика, Математика и информатика, 59, 2, 204-214

[16] Севрюков, П., А. Смоляков, (2008), Тригонометрические, показательные и логарифмические уравнения и неравенства, Москва, ISBN 978-5-93078-567-8

[17] Чочева, С. & Д. Николов. Тригонометрични субституции, Математика, 8, 1988

Диана Р. Стефанова
ОУ „Никола Вапцаров“, гр. Асеновград
E-mail: dianastefanova13@gmail.com