ФОРМИРОВАНИЕ ПОНЯТИЯ ОБЪЕМА ТЕЛА В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ СТЕРЕОМЕТРИИ*

Василий А. Швец, Татьяна А. Снигур

FORMING OF THE CONCEPT OF VOLUME OF THE BODY IN THE SCHOOL COURSE OF STEREOMETRY

Vasiliy A. Shvets, Tetiana A. Snihur

ABSTRACT: *This paper proposes an approach to the interpretation of the concept of "spatial geometric body." The formation of the concept of volume as a function on the set of spatial geometric bodies.*

KEYWORDS: *Geometric shapes, classification of points in space; spatial geometric body; the volume of spatial geometric body.*

Введение. Геометрия учит учеников правильному восприятию окружающего мира. По сравнению с планиметрией стереометрия имеет для этого больше возможностей. Согласно Государственного стандарта базового и полного общего среднего образования в школьном курсе стереометрии выделены две основные содержательные линии: 1) геометрические фигуры и их свойства; 2) геометрические величины, их измерения и вычисления [9]. Основными объектами изучения в пространстве есть точка, прямая, плоскость, двугранный угол, призма, цилиндр, конус, пирамида, многогранник, шар, сфера.

В 11 классе при изучении темы «Объемы и площади поверхностей геометрических тел» учащиеся знакомятся с понятием «объем тела» и основными свойствами объемов [7]. В частности, уточняется, что такое свойство геометрических фигур, как объем, присущее пространственным геометрическим

* Тази статия е финансирана по проект от фонд Научни изследвания на ШУ “Епископ Константин Преславски” РД-08-98/05.02.2016

телам. Хотя в учебниках по геометрии понятие пространственного геометрического тела четко не дается. Вместо определения этого понятия в школьном курсе математики чаще всего приводятся различные объяснения описательного характера.

В данной статье предлагается определение понятия пространственного геометрического тела, которое можно включить в школьный курс стереометрии средней школы на углубленном уровне изучения данного предмета. А также рассмотрено формирование понятия объема тела как функции на множестве пространственных геометрических тел.

Пространственное геометрическое тело.

Рассмотрим некоторые предварительные понятия, которые необходимы для определения понятия пространственного геометрического тела.

1. Понятие геометрической фигуры, сферы, шара и окрестности точки. В геометрии под *геометрической фигурой*, или просто фигурой, понимают любое множество (совокупность) Ф точек. Наипростейшей геометрической фигурой является точка. Из точек состоят все остальные геометрические фигуры, например, отрезок, прямая, плоскость, призма, цилиндр и т.д.

Из школьного курса планиметрии ученикам известно, что *расстояние* между двумя точками прямой или плоскости – это длина отрезка, соединяющего эти точки.

Если точки пространства обозначать большими латинскими буквами A, B, C, ..., а расстояние между двумя данными точками A и B этого пространства обозначать $|AB|$, то отрезком AB можно назвать множество всех точек X данного пространства, для которых
$|AX|+|XB|=|AB|$.

К важнейшим фигурам пространства, в частности, относятся: 1) сфера; 2) шар; 3) открытый шар с центром в данной точке O и заданным радиусом $r>0$. Так называют множества точек пространства, для каждой из которых расстояние от точки O соответственно: 1) равна r; 2) не превышает r; 3) меньше r.

При этом можно обозначать:

– *S(O; r)* – сфера с центром в точке *O* и радиусом *r*;

– *K(O; r)* – шар с центром в точке *O* и радиусом *r*, который также называют замкнутым шаром;

– *U(O; r)* – открытый шар с центром в точке *O* и радиусом *r*, который также называют *окрестностью* (или *r* – окрестностью) точки *O* (рис. 1).

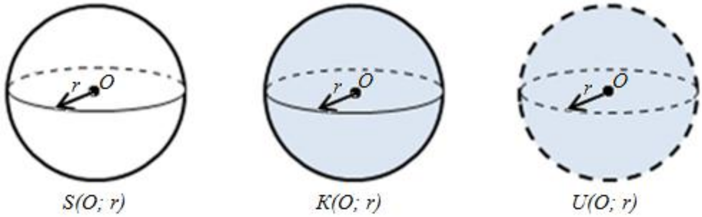


Рис. 1

На рисунке 2 изображена фигура Ф, которая состоит из всех точек шара $K(O;r)$, кроме точки D, которая является точкой соприкосновения шара и плоскости π, всех точек плоскости π (кроме точки D) и точки C, которая не принадлежит ни шару $К(O;r)$, ни плоскости π.

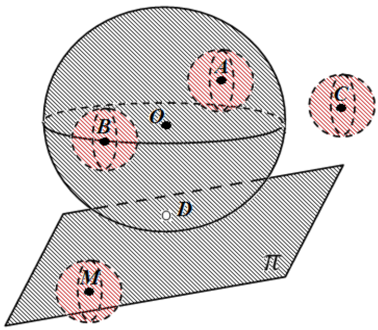


Рис. 2

Пространственную фигуру Ф называют *ограниченной*, если она является частью некоторого шара.

<u>Примеры</u>: 1. Фигуры, представленные на рисунках 1, ограничены.

2. Фигура Ф (рис. 2) – не ограничена.

2. Классификация точек пространства относительно данной фигуры. Пусть в пространстве задана некоторая фигура Ф. Тогда произвольную фиксированную точку пространства называют:

1) внутренней точкой фигуры Ф, когда существует окрестность этой точки, все точки которой принадлежат фигуре Ф;

2) внешней точкой фигуры Ф, когда существует окрестность этой точки, в которой нет ни одной точки фигуры Ф;

3) граничной точкой фигуры Ф, когда любая окрестность этой точки содержит в себе как точки фигуры Ф, так и точки, не принадлежащие фигуре Ф;

4) предельной точкой фигуры Ф, когда любая окрестность этой точки содержит в себе бесконечное количество точек фигуры Ф;

5) изолированной точкой фигуры Ф, когда существует окрестность этой точки, в которой только эта точка принадлежит фигуре Ф.

<u>Примеры</u>: Если Ф – фигура, изображенная на рис. 2, то:

1) каждая точка открытого шара $U(O,r)$ и никакая другая является внутренней точкой фигуры Ф;

2) каждая точка, которая не принадлежит ни шару $K(O,r)$, ни плоскости π и отличная от точки *C*, является внешней точкой фигуры Ф;

3) каждая точка, принадлежащая сфере *S(O; r)* или плоскости π, а также точка *C* является граничной точкой фигуры Ф;

4) каждая точка, принадлежащая шару *K(O; r)* или плоскости π, в том числе и точка *D*, является предельной точкой фигуры Ф;

5) единственной изолированной точкой фигуры Ф является точка *C*.

Из приведенных выше определений следует, что:

1) внутренняя точка и изолированная точка фигуры Ф всегда принадлежат этой фигуре;

2) внешняя точка фигуры Ф не принадлежит ей;

3) граничная точка и предельная точка фигуры Ф могут принадлежать, а могут и не принадлежать фигуре Ф.

Легко убедиться, что для любой точки пространства и для заданной в нем фигуры Ф возможен один и только один из трех случаев:

1) эта точка является внутренней точкой фигуры Ф;

2) эта точка является внешней точкой фигуры Ф;

3) эта точка является граничной точкой фигуры Ф.

Кроме этого для точки, которая не является внешней по отношению к данной фигуре Ф, возможен один и только один из двух случаев:

4) данная точка является предельной точкой фигуры Ф;

5) данная точка является изолированной точкой фигуры Ф.

Относительно произвольной точки данной фигуры Ф возможен один и только один из двух случаев:

6) данная точка является внутренней точкой фигуры Ф;

7) данная точка является граничной точкой фигуры Ф.

Множество *G(Ф)* всех внутренних точек фигуры Ф называют *внутренностью* фигуры Ф, а множество *S(Ф)* всех граничных точек фигуры Ф называют *границей* фигуры Ф.

Объединение фигуры Ф с ее границей называют *замыканием* данной фигуры и обозначают $\overline{\Phi}$.

<u>Примеры</u>:

1. Если $\Phi = K(O;r)$ или $\Phi = U(O;r)$, то внутренность каждой из этих фигур $G(\Phi) = U(O;r)$, граница $S(\Phi) = S(O;r)$, а замыкание каждой из этих фигур $\overline{\Phi} = K(O;r)$.

2. Если $\Phi = S(O; r)$, то $S(\Phi) = \Phi = \overline{\Phi}$, а $G(\Phi) = \varnothing$.

3. Открытые и замкнутые фигуры, области и замкнутые области. Относительно границы *S(Ф)* данной фигуры Ф возможен один и только один из трех случаев:

1) $S(\Phi) \subset \Phi$, то есть каждая точка границы S(Ф) является также точкой фигуры Ф, и тогда фигуру Ф называют *замкнутой*;

2) $S(\Phi) \cap \Phi = \varnothing$, то есть каждая точка границы S(Ф) не является точкой фигуры Ф, и тогда фигуру Ф называют *открытой*;

3) $S(\Phi) \cap \Phi \neq \varnothing$ и $S(\Phi) \not\subset \Phi$, то есть некоторые точки границы S(Ф) являются точками фигуры Ф, а некоторые нет, и тогда фигура Ф не является замкнутой, а также не является открытой.

Примеры:

1. Замкнутыми фигурами являются: каждое пространство и пустая фигура; каждая фигура, которая состоит из конечного множества точек; объединение конечного числа замкнутых фигур, в частности объединение конечного числа прямых или плоскостей; каждый шар и сфера и каждый многогранник; замыкание каждой фигуры.

2. Открытыми фигурами являются: каждое пространство и пустая фигура; открытый шар; объединение конечного и счетного количества открытых фигур (в частности открытых шаров); внутренность любой фигуры, в частности внутренность любого многогранника.

3. Ни замкнутыми, ни открытыми фигурами являются: обычный шар, с которого изъято одну граничную точку; обычный открытый шар, к которому добавлено одну граничную точку; многогранник, из которого изъято одну вершину; совокупность точек координатного пространства с рациональными координатами.

Открытую фигуру Ф называют *областью*, когда любые две точки этой фигуры можно соединить ломаной, что вполне содержится в этой фигуре. При этом открытую фигуру Ф называют также *линейно связной*.

Примеры:

1. Любой открытый шар является областью, а объединение двух открытых шаров без общих точек является открытой фигурой, однако не является областью, поскольку не является линейно связным.

2. Внутренность любого многогранника является областью.

3. Шар не является областью, поскольку не является открытой фигурой.

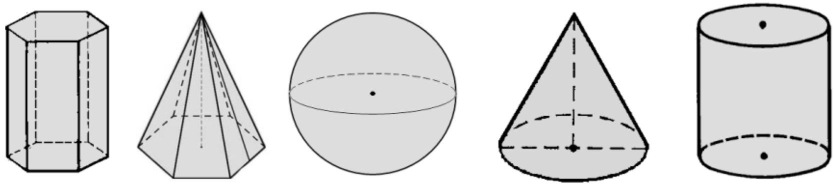
4. Пространственное геометрическое тело и его поверхность. Геометрическую фигуру Ф пространства называют *пространственным геометрическим телом*, если она является замыканием некоторой области *G*, то есть $\Phi = \overline{G} = G \cup S(G)$. При этом обязательно внутренность Ф совпадает с *G*, граница *S (Ф) = S (G)* и этот границу называют *поверхностью тела* Ф.

Примеры:

1. Шар является телом, а сфера и открытый шар не являются телом.

2. Каждый многогранник является телом, а объединение двух многогранников может быть телом, а может и не быть.

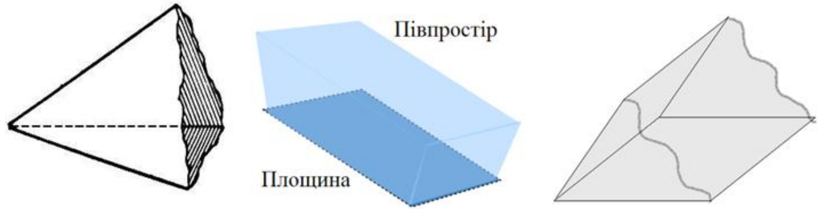
Геометрические тела могут быть *ограниченными* и *неограниченными*. Примерами ограниченных геометрических тел в трехмерном пространстве являются призма, пирамида, шар, конус, цилиндр и т.д. (рис. 3),



a) b) c) d) e)

Рис. 3

а неограниченными – телесный многогранный угол, полупространство, часть пространства, ограниченная двугранным углом (включая этот угол) и т.д. (рис. 4).

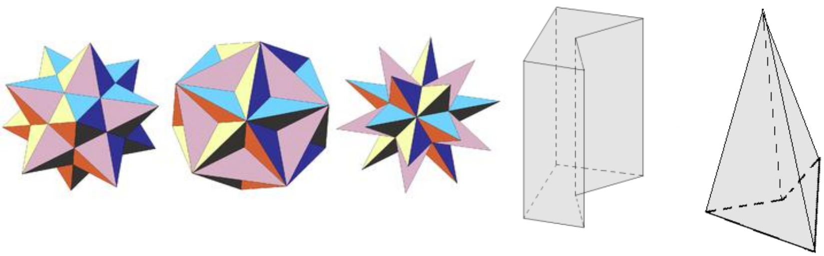


a) b) c)

Рис. 4

Пространственная фигура (в частности тело) называется *выпуклой*, если любые две ее точки можно соединить отрезком, который полностью содержится в этой фигуре.

Выпуклыми геометрическими телами в пространстве будут призма, пирамида, цилиндр, конус, шар, изображены на рис. 3. Примеры невыпуклых тел (звездчатых) изображено на рис. 5 (a, b, c). Призма и пирамида, основаниями которых являются невыпуклые многоугольники, также являются не выпуклыми телами (рис. 5, d, e).



a) b) c) d) e)

Рис. 5

Объем пространственного геометрического тела.

С объемами различных физических предметов, то есть объемами тел, ученики встречаются в повседневной жизни. Например, когда говорят, что ведро вмещает 10 литров воды (рис. 6). Это означает, что объем ведра – 10 литров. Еще один пример: на строительство садового домика понадобилось 15 кубометров древесины. Здесь 15 кубометров (или 15 кубических метров) – это и есть объем древесины, который необходим для строительства. Видим, что в этих примерах объемы выражаются определенными числами, но в разных единицах – в литрах и кубических метрах соответственно [1, с. 82]. В разных единицах объем одного и того же тела выражается разными числами.

Рис. 6

Теорию объемов разрабатывали еще в V-IV вв. до н.э. греческие ученые, в частности, Демокрит и Евдокс. Евклид в XI книге своих «Начал» изложил теоремы о сравнении объемов, поскольку считал непосредственное измерение объемов делом более практичным, чем теоретическим. Герон Александрийский описал правила для вычисления объема куба, призмы, параллелепипеда и других пространственных фигур [2, с. 100-101].

Египтяне, вавилоняне, китайцы и индийцы вычисляли объемы зерновых амбаров и других сооружений, которые имели форму куба, призмы или цилиндра, умножая площадь их основания на высоту. Наряду с этим ученым Древнего Востока были известны в основном только отдельные правила для вычисления объемов, которые были найдены практическим способом.

Украинские крестьяне очень удачно определяли на глаз объем дома, сарая, закрома. Для вычисления объема закрома в амбаре, который имел вид куба, измеряли одну сторону и три раза перемножали, а для определения объема закрома другой формы измеряли различные три стороны и результаты перемножали между собой [3, с. 65].

Стоит также вспомнить с учениками о народных способах измерения объемов урожая, сыпучих тел и жидкостей. В частности, «в XVIII-XIX вв. в Украине урожай хлеба измеряли на фуру (воз). На двуконную фуру можно было положить 3-4 стога сена... Копна составляла примерно 1/25 скирды» [3, с. 48].

С развитием обмена продуктов возникла необходимость в их измерении с помощью мер объема. Сыпучие тела и жидкости мерили, наполняя ими сосуд определенной емкости. Так появились единицы измерения сыпучих тел и жидкостей. Но в этих мерах был большой разнобой.

Как же на практике находят объем тела в наше время? В случае ведра (или небольшой емкости) это сделать гораздо просто – можно наполнить его водой с помощью литровой банки и подсчитать, сколько литров вмещается в ведре (рис. 7).

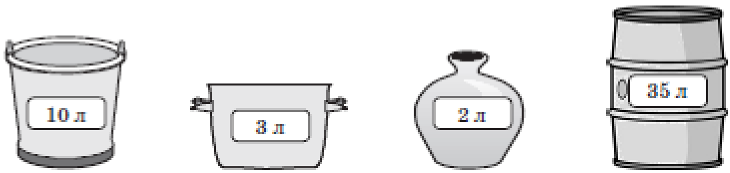
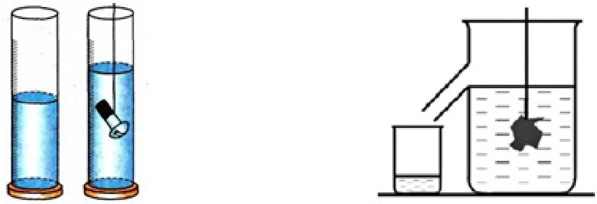


Рис. 7

Объем небольшого тела можно измерить с помощью измерительного цилиндра (мензурки) (рис. 8, а). Для этого сначала определяют цену деления мензурки. Затем наливают в мензурку такое количество воды, чтобы тело полностью погрузилось в жидкость. Определяют объем воды. Тело, объем которого нужно измерить, опускают в воду и определяют общий объем воды и тела. Находят объем исследуемого тела как разницу этих двух объемов.



а) Рис. 8 б)

Если тело неправильной формы не входит в мензурку, то его объем определяют с помощью отливного стакана (рис. 8, б). Перед измерением стакан наполняют водой до уровня отверстия отливной трубки. При погружении тела часть воды, что по объему равна объему тела, выливается. Определив с помощью мензурки ее объем, находят объем погруженного в воду тела. Если проводить опыт над одинаковыми телами, то объемы вытесненной воды будут совпадать. Когда тело разбить на части и провести опыт для каждой, то в сумме объемы будут давать объем первоначального тела.

а) Рис. 9 б)

Описанные способы определения объемов не всегда удобны или их не всегда можно использовать. Если, например, нужно найти объем цистерны (рис. 9, а), то совсем неуместно заполнять ее водой и считать количество литров. А для больших сооружений, таких как многоэтажки или пирамида царя Хеопса (рис. 9, б), способ вычисления объемов путем погружения их в воду совсем невозможен. Кроме того, на практике обычно еще до строительства того или иного сооружения необходимо знать, какие размеры оно должно иметь, чтобы иметь определенный объем. Таким образом, важно уметь вычислять объемы тел, зная их размеры [1, с. 84].

Начальные сведения об объеме ученики получают на пропедевтическом уровне еще в 1-4 классах при изучении содержательной линии «Величины». В 1 классе знакомятся с массой и емкостью, учатся взвешивать предметы и измерять емкость сосуда с помощью литровой мерки. В 2-4 классах эти знания расширяются и углубляются [6].

Первое представление об объеме тела и его вычислении ученики получают в курсе математики 5 класса при изучении прямоугольного параллелепипеда.

Позже, на уроках физики, их знакомят с физическими телами, учат опытным путем находить объем, измерять массу, вычислять плотность вещества, из которого тело сделано. В конце 9 класса рассматривают начальные сведения стереометрии, без доказательства изучают геометрические величины. И только в 11 классе, в курсе стереометрии, учащиеся получают систематические знания об объемах геометрических тел, способы их вычисления [7].

Практика показывает, что даже после изучения данной темы мало кто из учеников может объяснить, что такое объем геометрического тела, какими свойствами обладает это понятие, в чем заключается необходимость изучения данной геометрической величины. Это указывает на то, что должен быть другой, более эффективный подход для изучения темы «Объемы и площади поверхностей геометрических тел».

Раскрытие понятия объема пространственного геометрического тела стоит начать с практических упражнений на измерение объема с помощью мензурки, отливного стакана (для небольших по размеру геометрических тел), а также задач на нахождение и сравнение объемов спичечного коробка, различных сосудов, классной комнаты и тому подобное. На основе таких упражнений учащиеся могут сделать ряд важных *выводов*:

а) для каждого из рассмотренных пространственных физических объектов ставится в соответствие положительное число, которое называется его объемом;

б) чтобы получить это число, необходимо установить единицу измерения;

в) одинаковые физические объекты имеют равные объемы;

г) если пространственное тело состоит из нескольких частей, то его объем равен сумме объемов этих частей.

После обсуждения и обобщения результатов рассмотренных задач от физических пространственных объектов следует перейти к рассмотрению пространственных геометрических тел: куба, призмы, пирамиды, усеченной пирамиды, цилиндра, конуса, усеченного конуса, шара и др., которые являются математическими моделями пространственных физических объектов. Только теперь можно выяснять, что понимать под объемом пространственного геометрического тела.

Ученикам можно предложить следующее определение.

Определение. ***Объемом пространственного геометрического тела*** *называется положительная функция, которая обладает следующими свойствами:*

1) определена на множестве пространственных геометрических тел;

2) равным пространственным телам ставит в соответствие равные значения;

3) аддитивная (если пространственное тело разбить на несколько частей, то его объем равен сумме объемов этих частей)

4) для куба, длина ребра которого равна единице длины, значение функции равно единице.

Таким образом, в учащихся формируется представление о том, что *объем пространственного геометрического тела* – функция $V\colon M\rightarrow R+$, где M – множество пространственных геометрических тел; $R+$ – множество положительных чисел [8].

Как известно, основными способами задания функции является аналитический, графический, табличный и описательный. Как может быть задана введена функция? Ответ на данный вопрос учащиеся могут получить только частично, изучив указанную тему и тему «Первообразная и интеграл» в курсе алгебры и начал анализа.

Если классифицировать пространственные геометрические тела на ***простые*** и ***непростые***, а затем выделить другие классы – призмы, пирамиды, цилиндры и т.п., то такую функцию можно задать аналитически. К примеру:

(1) $V = S_{осн} \cdot H$ – для призм, где $S_{осн}$ – площадь основания, H – высота призмы;

(2) $V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot H$ – для пирамиды, где $S_{осн}$ – площадь основания, H – высота пирамиды;

(3) $V = \frac{1}{3} h\left(S_1 + \sqrt{S_1 \cdot S_2} + S_2\right)$ – для усеченных пирамид, где S_1 и S_2 – соответственно площади верхней и нижней оснований, h – высота пирамиды;

(4) $V = \sum_{i=1}^{n} V_i$ – для многогранников, где V_i – объем пирамид, на которые разбивается многогранник;

(5) $V = \pi R^2 H$ – для цилиндров, где R – радиус основания, H – высота цилиндра;

(6) $V = \frac{1}{3} \pi R^2 H$ – для конусов, где R – радиус основания, H – высота конуса;

(7) $V = \frac{\pi}{3} h\left(r^2 + r \cdot R + R^2\right)$ – для усеченных конусов, где r и R – соответственно радиусы верхней и нижней оснований, h – высота конуса;

(8) $V = \frac{4}{3} \pi R^3$ – для шаров, где R – радиус шара;

(9) $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$ – объем тела вращения, полученного в результате вращения криволинейной трапеции вокруг оси OX.

Ученики должны понять, что общей формулы нет и для конкретного класса пространственных тел она своя. Рассмотрение других геометрических тел, вероятно, даст другие формулы.

Выводы. Предложенный нами способ введения понятия пространственного геометрического тела и его объема предлагаем включать в школьный учебник по геометрии для классов академического, профильного и углубленного уровней изучения.

Дальнейшие перспективы развития нашего исследования видим в выводе формул объема многогранников и тел вращения на основе приведенного выше определения объема пространственного геометрического тела и с учетом всех его свойств.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Математика – 11**. Учебник для гуман. / В.Ф. Бутузов, Ю.М. Колягин, Э.Г. Позняк и др. – М.: Ин-т общего образ. Министерства образования РСФСР, 1991. – 105 с.
2. **Глейзер** Г.И. История математики в школе VII-VIII кл. Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1982. – 240 с.
3. **Граціанська** Л.М. Нариси з народної математики України. – К.: Вид-во Київського університету, 1968. – 100 с.
4. **Каленюк** С.П. Краєзнавцю про вимірювання / Л.Л. Потапенко. — Лисичанськ: ПП «Прінтекспрес», 2011. — С. 63-80.
5. **Швець** В.О., Снігур Т.О. Поняття просторового геометричного тіла в шкільному курсі стереометрії // Science and Education a New Dimension. Pedagogy and Psychology, III (25), Issue: 49, 2015. – С. 67-71.
6. **Навчальна програма** з математики для 1-3 класів загальноосвітніх навчальних закладів (нова редакція). Режим доступу: http://osvita.ua/doc/files/news/87/8793/matematika-1-3-klas.pdf. Дата звернення: 14.03.2016.
7. **Навчальна програма** з математики для учнів 10-11 кл. загальноосвітніх навч. закладів (профільний рівень). Режим доступу: http://mon.gov.ua/content/%D0%9E%D1%81%D0%B2%D1%96%D1%82%D0%B0/matem-pr.pdf. Дата звернення: 14.03.2016.
8. **Швец** В.А. Использование новых информационных технологий при формировании у старшеклассников понятия объема тела. //

Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математики и естественнонаучного знания» (Коряжма, 15-18 сентября 2014 г.) / Сост. И.В. Кузнецова, С.А. Тихомиров, И.В. Харитонова: Сев. (Арктич.) федер. ун-т им. М.В. Ломоносова. – Коряжма: ООО «Редакция газеты "Успешная"», 2014. – 231 с. – С. 186-189.

9. **Державний стандарт** базової і повної загальної середньої освіти. Затверджений постановою Кабінету Міністрів України від 23 листопада 2011 р. № 1392.