# ГОДИШНИК

**НА ШУМЕНСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ**

**„ЕПИСКОП КОНСТАНТИН ПРЕСЛАВСКИ“**

**Том XIX C**

**ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА**

---

# ANNUAL

**OF KONSTANTIN PRESLAVSKY UNIVERSITY OF SHUMEN**

**Vol. XIX C**

**FACULTY OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE**

**ШУМЕН**
**2018**

**ISSN 1311-834X**

Annual of Konstantin Preslavsky University of Shumen
Faculty of Mathematics and Informatics , vol. XIX C, 2018, pp. 3- 20

# ERROR ESTIMATES OF BEST PROXIMITY POINTS FOR REICH MAPS IN UNIFORMLY CONVEX BANACH SPACES*

ATANAS V. ILCHEV, BOYAN G. ZLATANOV

***ABSTRACT:*** *We find a priori and a posteriori error estimates of the best proximity point, obtained with the Picard iteration associated to a cyclic Reich contraction map, which is defined on a uniformly convex Banach space with modulus of convexity of power type.*

***KEYWORDS:*** *Coupled fixed points, Coupled best proximity points, Modular function space*

## 1 Introduction

In mathematical modeling of real world processes an approach for solving the arising problems is the Banach Contraction Principle, which is the fundamental result in fixed point theory. The theory of fixed points serves for solving of equations $Tx = x$ for mappings $T$ defined on subsets of metric spaces or normed spaces. A generalization of the Banach Contraction Principle is the notion of cyclical maps [8], i.e. $T(A) \subseteq B$ and $T(B) \subseteq A$. Since a non-self mapping $T : A \to B$ does not necessarily have a fixed point, one often attempts to find an element $x$ which is in some sense closest to $Tx$. Best proximity point theorems are relevant in this perspective. The notion of best proximity point is introduced in [4]. A sufficient condition for existence and the uniqueness of best proximity points in uniformly convex Banach spaces is given in [4]. Since publication [4] the problem for existence and uniqueness of best proximity point has been widely investigated and the research on this problem continues. Interesting examples of cyclic maps can be found in [7]. The results of [4] were generalized for modular function spaces

*The first author is partially supported by fund MU17-FMI-007 of University of Plovdiv Paisii Hilendarski.

in [14]. A connection between best proximity points and variational principles was found in [11].

There are many problems about fixed points and best proximity points that are not easy to be solved or could not be solved exactly. One of the advantages of Banach fixed point theorem is the error estimates of the successive iterations and the rate of convergence. That is why an estimation of the error when an iterative process is used is of interest. An extensive study about approximations of fixed points can be found in [2].

A first result in the approximation of the sequence of successive iterations, which converges to the best proximity point for cyclic contractions is obtained in [15]. The above mention results was expanded for coupled best proximity points [9], where ”a priori error estimates“ and ”a posteriori error estimates“ for the coupled best proximity points and for the coupled fixed points, which are obtained through a sequence of successive iterations were obtained.

We tried to generalize the results from [15] for cyclic Reich maps.

## 2 Preliminaries

In this section we give some basic definitions and concepts which are useful and related to the best proximity points. Let $(X,\rho)$ be a metric space. Define a distance between two subset $A,B\subset X$ by $\mathrm{dist}(A,B)=\inf\{\rho(x,y):x\in A,y\in B\}$. Just to simplify the notations we will denote $\mathrm{dist}(A,B)$ with $d$.

Let $A$ and $B$ be nonempty subsets of a metric space $(X,\rho)$. The map $T:A\bigcup B\to A\bigcup B$ is called a cyclic map if $T(A)\subseteq B$ and $T(B)\subseteq A$. A point $\xi\in A$ is called a best proximity point of the cyclic map $T$ in $A$ if $\rho(\xi,T\xi)=\mathrm{dist}(A,B)$.

Let $A$ and $B$ be nonempty subsets of a metric space $(X,\rho)$. The map $T:A\bigcup B\to A\bigcup B$ is called a Kannan cyclic contraction map if $T$ is a cyclic map and for some $k\in(0,1/2)$ there holds the inequality $\rho(Tx,Ty)\le k(\rho(Tx,x)+\rho(Ty,y))+(1-2k)d$ for any $x\in A$, $y\in B$. The definition for cyclic Kannan contraction is introduced and investigated in [13].

Following [6] we will define a generalization of cyclic Reich contraction maps.

**Definition 1.** *Let $(X,\rho)$ be a metric space and $A,B \subset X$. A cyclic map $T : A \to B$ and $T : B \to A$ is called cyclic Reich contraction maps if there exist nonegative constants $k_i$, $i = 1,2,3,4,5$, satisfying $0 < \sum_{i=1}^{5} k_i < 1$ such that for each $x \in A$ and $y \in B$ the inequality*

$$\rho(Tx,Ty) \le k_1\rho(x,y) + k_2\rho(x,Tx) + k_3\rho(y,Ty) + k_4\rho(x,Ty) + \\ + k_5\rho(y,Tx) + \left(1 - \sum_{i=1}^{5} k_i\right) d$$

*holds.*

As pointed in [6] from the symmetry of the function $\rho$ it follows that $k_2 = k_3$ and $k_4 = k_5$. Therefore if $T$ is a cyclic Reich contraction maps then there exist $a_1,a_2,a_3 \ge 0$, such that $0 < a_1 + 2a_2 + 2a_3 < 1$ and there holds the inequality

$$\rho(Tx,Ty) \le a_1\rho(x,y) + a_2(\rho(x,Tx) + \rho(y,Ty)) + \\ + a_3(\rho(x,Ty) + \rho(y,Tx)) + (1-a))d,$$

where $a = a_1 + 2a_2 + 2a_3$.

The best proximity results need norm-structure of the space $X$. When we investigate a Banach space $(X,\|\cdot\|)$ we will always consider the distance between the elements to be generated by the norm $\|\cdot\|$ i.e. $\rho(x,y) = \|x-y\|$. We will denote the unit sphere and the unit ball of a Banach space $(X,\|\cdot\|)$ by $S_X$ and $B_X$ respectively.

The assumption that the Banach space $(X,\|\cdot\|)$ is uniformly convex plays a crucial role in the investigation of best proximity points [4].

**Definition 2.** *Let $(X, \|\cdot\|)$ be a Banach space. For every $\varepsilon \in (0,2]$ we define the modulus of convexity of $\|\cdot\|$ by*

$$\delta_{\|\cdot\|}(\varepsilon) = \inf\left\{1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| : x, y \in B_X, \|x-y\| \geq \varepsilon\right\}.$$

*The norm is called uniformly convex if $\delta_X(\varepsilon) > 0$ for all $\varepsilon \in (0,2]$. The space $(X, \|\cdot\|)$ is then called uniformly convex space.*

The main result from [13] is the next theorem.

**Theorem 3.** *([13]) Let $A$ and $B$ be nonempty closed and convex subsets of a uniformly convex Banach space and $T : A \cup B \to A \cup B$ be a cyclic Kannan contraction map. Then there is a unique best proximity point $\xi$ of $T$ in $A$, $T\xi$ is a unique best proximity point of $T$ in $B$ and $\xi = T^2\xi = T^{2n}\xi$. Further if $x_0 \in A$ and $x_{n+1} = Tx_n$, then $\{x_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ converges to $\xi$ and $\{x_{2n+1}\}_{n=0}^{\infty}$ converges to $T\xi$.*

We will use the following two lemmas, established in [4], for proving the uniqueness of the best proximity points.

**Lemma 4.** ([4]) Let $A$ be a nonempty, closed, convex subset, and $B$ be a nonempty, closed subset of a uniformly convex Banach space. Let $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ and $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ be sequences in $A$ and $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ be a sequence in $B$ satisfying:
1) $\lim\limits_{n\to\infty} \|z_n - y_n\| = \operatorname{dist}(A,B)$;
2) for every $\varepsilon > 0$ there exists $N_0 \in \mathbb{N}$, such that for all $m > n \geq N_0$, $\|x_n - y_n\| \leq \operatorname{dist}(A,B) + \varepsilon$.

Then for every $\varepsilon > 0$, there exists $N_1 \in \mathbb{N}$, such that for all $m > n > N_1$, holds $\|x_m - z_n\| \leq \varepsilon$.

**Lemma 5.** ([4]) Let $A$ be a nonempty, closed, convex subset, and $B$ be a nonempty, closed subset of a uniformly convex Banach space. Let $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ and $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ be sequences in $A$ and $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ be a sequence in $B$ satisfying: $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = \operatorname{dist}(A,B)$ and $\lim\limits_{n\to\infty} \|z_n - y_n\| = \operatorname{dist}(A,B)$, then $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - z_n\| = 0$.

The idea of best proximity points was further generalized in modular function spaces for cyclic contractions in [14] and for cyclic Kannan contraction maps in [10]

We will need the following technical lemma:

**Lemma 6.** *([13]) Let $(X, \|\cdot\|)$ be a uniformly convex Banach space, $A$ and $B$ be nonempty closed and convex subsets of $X$. Let $T : A\cup B \to A\cup B$ be a cyclic map satisfying*

$$\|Tx - T^2x\| - d \leq \alpha\left(\|x - Tx\| - d\right)$$

*for all $x \in A\cup B$, for some $\alpha \in [0,1)$. Then*

*(i)* $\|T^nx - T^{n+1}\| - d \leq \alpha^n\left(\|x - Tx\| - d\right)$ *for all $x \in A\cup B$;*

*(ii)* $\lim_{n\to\infty}\|T^nx - T^{n+1}x\| = d$ *for all $x \in A\cup B$;*

*(iii)* $\lim_{n\to\infty}\|T^{2n}x - T^{2n\pm 2}x\| = 0$ *for all $x \in A\cup B$;*

*(iv) $z$ is a best proximity point of $T$ if and only if $z$ is a fixed point for $T^2$.*

Let us point out that the inequality in (i) holds not only for uniformly convex Banach spaces but also for any metric space.

For any uniformly convex Banach space $X$ there holds the inequality

(1) $$\left\|\frac{x+y}{2} - z\right\| \leq \left(1 - \delta_X\left(\frac{r}{R}\right)\right)R$$

for any $x, y, z \in X$, $R > 0$, $r \in [0, 2R]$, $\|x - z\| \leq R$, $\|y - z\| \leq R$ and $\|x - y\| \geq r$.

If $(X, \|\cdot\|)$ is a uniformly convex Banach space, then $\delta_X(\varepsilon)$ is strictly increasing function. Therefore if $(X, \|\cdot\|)$ is a uniformly convex Banach space then there exists the inverse function $\delta^{-1}$ of the modulus of convexity. If there exist constants $C>0$ and $q>0$, such that the inequality $\delta_{\|\cdot\|}(\varepsilon)\geq C\varepsilon^q$ holds for every $\varepsilon\in(0,2]$ we say that the modulus of convexity is of power type $q$. It is well known that for any Banach space and for any norm there holds the inequality $\delta(\varepsilon)\leq K\varepsilon^2$. The modulus of convexity with respect to the canonical norm $\|\cdot\|_p$ in $\ell_p$ or $L_p$ is $\delta_{\|\cdot\|_p}(\varepsilon)=1-\sqrt[p]{1-\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p}$ for $p\geq 2$ and the modulus of convexity $\delta_{\|\cdot\|_p}(\varepsilon)$ is the solution of the equation $\left(1-\delta+\frac{\varepsilon}{2}\right)^p+\left|1-\delta-\frac{\varepsilon}{2}\right|^p=2$ for $1<p<2$. It is well known that the modulus of convexity with respect to the canonical norm in $\ell_p$ or $L_p$ is of power type and there holds the inequalities $\delta_{\|\cdot\|_p}(\varepsilon)\geq\frac{\varepsilon^p}{p2^p}$ for $p\geq 2$ and $\delta_{\|\cdot\|_p}(\varepsilon)\geq\frac{(p-1)\varepsilon^2}{8}$ for $p\in(1,2)$ [12].

An extensive study of the Geometry of Banach spaces can be found in [1, 3, 5].

## 3 Error Estiamtes for Best Proximity Points

We will need the following lemma.

**Lemma 7.** *Let $A$ and $B$ be nonempty subsets of a metric space $(X,\rho)$ and let $T:A\cup B\to A\cup B$ be a cyclic Reich contraction map. Then for every $x\in A\cup B$ there holds the inequalities $\rho(T^nx,T^{n+1}x)-d\leq\alpha^n\left(\rho(x,Tx)-d\right)$ and $\rho(T^nx,T^{n+1}x)-d\leq\alpha\left(\rho(T^{n-1}x,T^nx)-d\right)$, where $\alpha=\frac{a_1+a_2+a_3}{1-a_2-a_3}\in[0,1)$.*

*Proof.* From the inequality

$$\begin{array}{rcl}\rho(T^nx,T^{n+1}x) & \leq & a_1\rho(T^{n-1}x,T^nx)+a_2(\rho(T^nx,T^{n-1}x)+\\ & & +\rho(T^{n+1}x,T^nx))+a_3\rho(T^{n+1}x,T^{n-1}x)+\\ & & +(1-a_1-2(a_2+a_3))d\end{array}$$

we get the inequality

$$\begin{array}{rcl}(1-a_2)\rho(T^nx,T^{n+1}x) & \leq & (a_1+a_2)(\rho(T^{n-1}x,T^nx)+\\ & & +a_3(\rho(T^{n+1}x,T^nx)+\rho(T^nx,T^{n-1}x)+\\ & & +(1-a_1-2(a_2-a_3))d.\end{array}$$

Fro the above inequality we get

$$\begin{aligned}(1-a_2-a_3)\rho(T^n x, T^{n+1}x) \le (a_1+a_2+a_3)(\rho(T^{n-1}x, T^n x)+\\ +(1-a_1-2(a_2-a_3))d,\end{aligned}$$

$$\rho(T^n x, T^{n+1}x) \le \frac{a_1+a_2+a_3}{1-a_2-a_3}\rho(T^{n-1}x, T^n x) + \frac{1-a_1-2(a_2-a_3)}{1-a_2-a_3}d$$

and

$$\rho(T^n x, T^{n+1}x) \le \frac{a_1+a_2+a_3}{1-a_2-a_3}\rho(T^{n-1}x, T^n x) + \left(1-\frac{a_1+a_2+a_3}{1-a_2-a_3}\right)d.$$

Let us put $\alpha = \frac{a_1+a_2+a_3}{1-a_2-a_3}$. It is easy to check that $\alpha \in [0,1)$ for every $a_1, a_2, a_3 \in [0,1)$, such that $a_1+2(a_2+a_3) \in [0,1)$. Consequently there holds

$$\rho(T^n x, T^{n+1}x) \le \alpha\rho(T^{n-1}x, T^n x) + (1-\alpha)d$$

and therefore

$$\rho(T^n x, T^{n+1}x) - d \le \alpha\left(\rho(T^{n-1}x, T^n x) - d\right).$$

Applying Lemma 6 we get

$$\rho(T^n x, T^{n+1}x) - d \le \alpha^n\left(\rho(x, Tx) - d\right).$$

□

We will use in the sequel $\alpha = \frac{a_1+a_2+a_3}{1-a_2-a_3}$.

It seems that the technique applied in [13] for cyclic Kannan contraction maps can be applied and for a wide classes of cyclic Reich maps namely cyclic maps that satisfy the inequality

(2)

$$\begin{aligned}\|Tx-Ty\| \le\ & a_1\|x-y\| + a_2(\|x-Tx\| + \|y-Ty\|)\\ & + a_3(\|x-Ty\| + \|y-Tx\|) + (1-a_1-2a_2-4a_3))d\end{aligned}$$

for any $x \in A$ and $y \in B$.

Let us point out that any cyclic Reich map with $a_3 = 0$ satisfies (2).

**Lemma 8.** *Let $A$ and $B$ be nonempty subsets of a metric space $(X,\rho)$ and let $T : A\cup B \to A\cup B$ be a cyclic map, that satisfies (2). Then for every $x\in A\cup B$ there holds the inequalities $\rho(T^nx,T^{n+1}x)-d \le \alpha^n(\rho(x,Tx)-d)$ and $\rho(T^nx,T^{n+1}x)-d\le \alpha\big(\rho(T^{n-1}x,T^nx)-d\big)$.*

*Proof.* From the inequality

$$\begin{aligned}
\rho(T^nx,T^{n+1}x) &\le a_1\rho(T^{n-1}x,T^nx)+a_2(\rho(T^nx,T^{n-1}x)+\\
&\quad +\rho(T^{n+1}x,T^nx))+a_3\rho(T^{n+1}x,T^{n-1}x)+\\
&\quad +(1-a-2a_3)d\le\\
&\le a_1\rho(T^{n-1}x,T^nx)+a_2(\rho(T^nx,T^{n-1}x)+\\
&\quad +\rho(T^{n+1}x,T^nx))+a_3\rho(T^{n+1}x,T^{n-1}x)+(1-a)d
\end{aligned}$$

it follows that $T$ satisfies the condition of Lemma 7. □

**Lemma 9.** *Let $(X,\|\cdot\|)$ be a uniformly convex Banach space, $A$ and $B$ be nonempty subsets of $X$ and $T : A\cup B\to A\cup B$ be a cyclic Reich contraction map. Let $x\in A$ be such that there is a subsequence $\{T^{2n_i}x\}_{i=1}^{\infty}$ of $\{T^{2n}x\}_{n=1}^{\infty}$, which converges to $z\in A$. Then $z$ is a best proximity point of $T$ in $A$.*

*Proof.* Let $x\in A$. Let holds $\lim_{i\to\infty}T^{2n_i}x=z$ for some subsequence $\{T^{2n_i}x\}_{i=1}^{\infty}$ of $\{T^{2n}x\}_{n=1}^{\infty}$. From Lemma 7 it follows that we can apply

Lemma 6 and thus $\lim_{i\to\infty}\|T^{2n_i}x - T^{2n_i+1}x\| = d$. From the inequality

$$
\begin{aligned}
\|z - Tz\| &= \lim_{n\to\infty}\|T^{2n_i}x - Tz\| \\
&\le \lim_{n\to\infty}\left(a_1\|T^{2n_i-1}x - z\| + a_2\left(\|T^{2n_i}x - T^{2n_i-1}x\| + \|Tz - z\|\right)\right) \\
&+ \lim_{n\to\infty}\left(a_3\left(\|T^{2n_i}x - z\| + \|T^{2n_i-1}x - Tz\|\right)\right) + (1-a)d \\
&\le \lim_{n\to\infty}\left(a_1\|T^{2n_i-1}x - T^{2n_i}x\| + a_2\left(\|T^{2n_i}x - T^{2n_i-1}x\| + \|Tz - z\|\right)\right) \\
&+ \lim_{n\to\infty}\left(a_3\left(\|T^{2n_i}x - z\| + \|T^{2n_i-1}x - Tz\|\right)\right) + (1-a)d \\
&= a_1 d + a_2\left(d + \|Tz - z\|\right) + a_3\lim_{n\to\infty}\|T^{2n_i-1}x - Tz\| + (1-a)d \\
&= a_2\|Tz - z\| + a_3\lim_{n\to\infty}\|T^{2n_i-1}x - Tz\| + (1 - a_2 - 2a_3)d \\
&\le a_2\|Tz - z\| + a_3\lim_{n\to\infty}\left(\|T^{2n_i-1}x - z\| + \|z - Tz\|\right) + \\
&(1 - a_2 - 2a_3)d \\
&= a_2\|Tz - z\| + a_3\lim_{n\to\infty}\left(\|T^{2n_i-1}x - T^{2n_i}x\| + \|z - Tz\|\right) + \\
&(1 - a_2 - 2a_3)d = (a_2 + a_3)\|Tz - z\| + (1 - a_2 - a_3)d
\end{aligned}
$$

we get that $\|z - Tz\| \le d$, therefore $\|z - Tz\| = d$, i.e. $z$ is a best proximity point of $T$ in $A$. □

**Lemma 10.** *Let $(X, \|\cdot\|)$ be a uniformly convex Banach space, $A$ and $B$ be nonempty subsets of $X$ and $T : A\cup B \to A\cup B$ be a cyclic Reich contraction map, that satisfies (2). Let $x \in A$ be such that there is a subsequence $\{T^{2n_i}x\}_{i=1}^{\infty}$ of $\{T^{2n}x\}_{n=1}^{\infty}$, which converges to $z \in A$. Then $z$ is the unique best proximity point of $T$ in $A$.*

*Proof.* As far as any cyclic Reich map that satisfies (2) is a cylcic Reich map the proof that $z$ is a best proximity point of $T$ in $A$ follows from Lemma 9.

Let us suppose that there is another best proximity point $w \neq z$ of $T$ in $A$.

Case I) Let first $a_3 = 0$. By Lemma 6 it follows that $T^2w = w$ and we get the inequality

$$\begin{array}{rcl}
\|w - Tz\| & = & \|T^2w - Tz\| \\
& \leq & a_1\|Tw - z\| + a_2(\|T^2w - Tw\| + \|Tz - z\|)+ \\
& & (1 - a_1 - 2a_2)d \\
& \leq & a_1\|Tw - z\| + 2a_2d + (1 - a_1 - 2a_2)d = a_1\|Tw - z\|+ \\
& & (1 - a_1)d.
\end{array}$$

By similar arguments we get

$$\begin{array}{rcl}
\|Tw - z\| & = & \|Tw - T^2z\| \\
& \leq & a_1\|w - Tz\| + a_2(\|T^2z - Tz\| + \|Tw - w\|)+ \\
& & (1 - a_1 - 2a_2)d \\
& \leq & a_1\|w - Tz\| + 2a_2d + (1 - a_1 - 2a_2)d = a_1\|w - Tz\|+ \\
& & (1 - a_1)d.
\end{array}$$

After summing the last two inequalities we get

$$(1 - a_1)(\|Tw - z\| + \|w - Tz\|) \leq 2(1 - a_1)d$$

and therefore $\|Tw - z\| = \|w - Tz\| = d$. Applying Lemma 5 we get that $w = z$.

Case II) Let now $T$ satisfies (2). From the assumption that $T$ is a cyclic Reich contraction it follows from Lemma 7 that we can apply Lemma 6 and thus $T^2w = w$. We get the inequality

$$\begin{array}{rcl}
\|w - Tz\| & = & \|T^2w - Tz\| \\
& \leq & a_1\|Tw - z\| + a_2(\|T^2w - Tw\| + \|Tz - z\|)+ \\
& & a_3(\|T^2w - z\| + \|Tz - Tw\|) + (1 - a - 2a_3)d \\
& \leq & a_1\|Tw - z\| + a_2(\|w - Tw\| + \|Tz - z\|) \\
& & +a_3(\|T^2w - Tw\| + \|Tw - z\| + \|Tz - w\| + \|w - Tw\|) \\
& & +(1 - a - 2a_3)d \\
& \leq & a_1\|Tw - z\| + a_2(d + d)+ \\
& & a_3(d + \|Tw - z\| + \|Tz - w\| + d) + (1 - a - 2a_3)d \\
& = & (a_1 + a_3)\|Tw - z\| + a_3\|Tz - w\| + (1 - a_1 - 2a_3)d.
\end{array}$$

By similar arguments we get

$$
\begin{aligned}
\|Tw - z\| &= \|Tw - T^2 z\| \\
&\le a_1\|w - Tz\| + a_2(\|T^2 z - Tz\| + \|Tw - w\|) + \\
&\quad a_3(\|T^2 z - w\| + \|Tw - Tz\|) + (1 - a - 2a_3)d \\
&\le a_1\|w - Tz\| + a_2(\|z - Tz\| + \|Tw - w\|) \\
&\quad + a_3(\|T^2 z - Tz\| + \|Tz - w\| + \|Tw - z\| + \|z - Tz\|) + \\
&\quad (1 - a - 2a_3)d \\
&\le a_1\|w - Tz\| + a_2(d + d) + \\
&\quad a_3(d + \|Tz - w\| + \|Tw - z\| + d) + (1 - a - 2a_3)d \\
&= (a_1 + a_3)\|w - Tz\| + a_3\|Tw - z\| + (1 - a_1 - 2a_3)d.
\end{aligned}
$$

After summing the leat two inequalities we get

$$(1 - a_1 - 2a_3)\left(\|Tw - z\| + \|w - Tz\|\right) \le 2(1 - a_1 - a_3)d$$

and therefore $\|Tw - z\| = \|w - Tz\| = d$. Applying Lemma 5 we get that $w = z$. □

**Theorem 11.** *Let $A$ and $B$ be nonempty, closed and convex subsets of a uniformly convex Banach $(X, \|\cdot\|)$ space, such that $d = \operatorname{dist}(A, B) > 0$, and let there exist $C > 0$ and $q \ge 2$, such that $\delta_{\|\cdot\|}(\varepsilon) \ge C\varepsilon^q$. Let $T : A \cup B \to A \cup B$ be a cyclic Reich contraction map that satisfies (2). Then*

1. *there exists a unique best proximity point $\xi$ of $T$ in $A$, $T\xi$ is unique best proximity point of $T$ in $B$ and $\xi = T^2\xi = T^{2n}\xi$;*

2. *for any $x_0 \in A$ the sequence $\{x_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ converges to $\xi$ and $\{x_{2n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ converges to $T\xi$, where $x_{n+1} = Tx_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$;*

3. *a priori error estimate holds*

$$\|\xi - T^{2n}x\| \le \frac{\|x - Tx\|}{1 - \sqrt[q]{\alpha^2}} \sqrt[q]{\frac{\|x - Tx\| - d}{Cd}} \left(\sqrt[q]{\alpha}\right)^{2n}; \tag{3}$$

4. *a posteriori error estimate holds*
(4)
$$\|T^{2n}x-\xi\| \leq \frac{\|T^{2n-1}x-T^{2n}x\|}{1-\sqrt[q]{\alpha^2}}\sqrt[q]{\frac{\|T^{2n-1}x-T^{2n}x\|-d}{Cd}}\sqrt[q]{\alpha}.$$

*Proof.* (i) By Lemma 6 it follows that $\lim_{n\to\infty}\|T^{2n}x-T^{2n+1}x\|=d$. Let us suppose that there is $\varepsilon_0>0$ so that for every $k\in\mathbb{N}$ there are $m_k>n_k\geq k$ such that

$$\|T^{2m_k}x-T^{2n_k+1}x\|>d+\varepsilon_0.$$

Let $m_k$ be the smallest integer greater than $n_k$ to satisfy the above inequality, i.e.

$$\|T^{2(m_k-1)}x-T^{2n_k+1}x\|\leq d+\varepsilon_0.$$

By the inequality

$$d+\varepsilon_0<\|T^{2m_k}x-T^{2n_k+1}x\|\leq\|T^{2m_k}x-T^{2m_k-2}x\|+\|T^{2m_k-2}x-T^{2n_k+1}x\|$$

and Lemma 6 after taking a limit on $k\to\infty$ we get

$$d+\varepsilon_0\leq\|T^{2m_k}x-T^{2n_k+1}x\|\leq d+\varepsilon_0,$$

i.e. $\lim_{k\to\infty}\|T^{2m_k}x-T^{2n_k+1}x\|=d+\varepsilon_0$.

On the other hand by

$$\|T^{2m_k}x-T^{2n_k+1}x\|\leq\|T^{2m_k}x-T^{2m_k+2}x\|+\|T^{2m_k+2}x-T^{2n_k+3}x\|+ \|T^{2n_k+3}x-T^{2n_k+1}x\|$$

and Lemma 6 after taking a limit on $k\to\infty$ we get

$$d+\varepsilon_0\leq\lim_{k\to\infty}\|T^{2m_k}x-T^{2n_k+1}x\|\leq\lim_{k\to\infty}\|T^{2m_k+2}x-T^{2n_k+3}x\|.$$

From Lemma 6 we have that

$$\lim_{k\to\infty}\|T^{2m_k+1}x-T^{2n_k+2}x\|\leq\alpha\lim_{k\to\infty}\|T^{2m_k}x-T^{2n_k+1}x\|+(1-\alpha)d\leq d+\varepsilon_0.$$

using the last inequality we get the chain of inequalities

$$\begin{array}{rcl}
d+\varepsilon_0 & \leq & \lim_{k\to\infty}\|T^{2m_k+2}x-T^{2n_k+3}x\| \\
& \leq & \lim_{k\to\infty}\big(a_1\|T^{2m_k+1}x-T^{2n_k+2}x\|+a_2\big(\|T^{2m_k+2}x-T^{2m_k+1}x\|+ \\
& & \|T^{2n_k+3}x-T^{2n_k+2}x\|\big)\big)+a_3\lim_{k\to\infty}\big(\|T^{2m_k+2}x-T^{2n_k+2}x\|+ \\
& & \|T^{2n_k+3}x-T^{2m_k+1}x\|\big)+(1-a)d \\
& \leq & a_1(d+\varepsilon_0)+2a_2d+a_3\lim_{k\to\infty}\big(\|T^{2m_k+2}x-T^{2m_k+1}x\|+ \\
& & \|T^{2m_k+1}x-T^{2n_k+2}x\|\big)+a_3\lim_{k\to\infty}\big(\|T^{2n_k+3}x-T^{2n_k+2}x\|+ \\
& & \|T^{2n_k+2}x-T^{2m_k+1}x\|\big)+(1-a)d \\
& = & (a_1+2a_3)(d+\varepsilon_0)+2(a_2+a_3)d+(1-a)d
\end{array}$$

and thus we get

$$(1-a_1-2a_3)(d+\varepsilon_0)\leq(1-a_1-2a_3)d,$$

which is a contradiction and therefore for every $\varepsilon>0$ there is $N\in\mathbb{N}$ so that the inequality $\|T^{2m}x-T^{2n+1}x\|<d+\varepsilon$ holds for any $m>n\geq N$. From Lemma 4 it follows that $\{x_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ is a Cauchy sequence and hence convergent. Consequently there is $\xi\in A$ so that $\lim_{n\to\infty}x_{2n}=\xi$. By Lemma 10 it follows that $\xi$ is the unique best proximity point of $T$ in $A$. From Lamma 6 it follows that $\xi$ is a fixed point for $T^2$.

It remains to prove that $T\xi$ is a best proximity point of $T$ in $B$. From Lemma 6 we have the inequities

$$d\leq\|T^2\xi-T\xi\|\leq\alpha\|T\xi-\xi\|+(1-\alpha)d=d$$

and therefore $T\xi$ is a best proximity point of $T$ in $B$.

The proof that $T\xi$ is a unique best proximity point can be done similarly to the proof that $\xi$ is a unique best proximity point.

(ii) For any $x\in A$ we have that the sequence $\{T^{2n}x\}_{n=1}^{\infty}$ converges to a best proximity point of $T$ in $A$. By the uniqueness of the best proximity point of $T$ in $A$ it follows that $\{T^{2n}x\}_{n=1}^{\infty}$ converges to $\xi$.

From the inequalities

$$\begin{array}{rcl}\|T^{2n+1}x-\xi\| & = & \|T^{2n+1}x-T^2\xi\| \leq a_1\|T^{2n}x-\xi\|+ \\ & & a_2\left(\|T^{2n+1}x-T^{2n}x\|+\|T\xi-\xi\|\right)+ \\ & & a_3\left(\|T^{2n+1}x-\xi\|+\|T\xi-T^{2n}x\|\right)+(1-a-2a_3)d \\ & \leq & a_1\|T^{2n}x-\xi\|+a_2\left(\|T^{2n+1}x-T^{2n}x\|+\|T\xi-\xi\|\right) \\ & & +a_3\left(\|T^{2n+1}x-\xi\|+\|T\xi-T^{2n}x\|\right)+(1-a)d\end{array}$$

we get that $(1-a_3)\|T^{2n+1}x-T^2\xi\| \leq (1-a_3)d$. Using the equality $\|T\xi-T^2\xi\|=d$ and Lemma 5 it follows that $\{T^{2n+1}x\}_{n=1}^{\infty}$ converges to $T\xi$.

(iii) We will prove first that for any $x\in A$, $n\in\mathbb{N}$ and $l\leq 2n$ there holds the inequality

$$\delta_{\|\cdot\|}\left(\frac{\|T^{2n}x-T^{2n+2}x\|}{d+k^l(\|T^{2n-l}x-T^{2n+1-l}x\|-d)}\right)\leq \\ \frac{k^l(\|T^{2n-l}x-T^{2n+1-l}x\|-d)}{d+k^l(\|T^{2n-l}x-T^{2n+1-l}x\|-d)}.$$

Indeed let $x\in A$ be arbitrary chosen. From Lemma 7 we have the inequalities

$$\|T^{2n}x-T^{2n+1}x\|\leq d+\alpha^l(\|T^{2n-l}x-T^{2n+1-l}x\|-d),$$

$$\|T^{2n+2}x-T^{2n+1}x\|\leq d+\alpha^{l+1}(\|T^{2n-l}x-T^{2n+1-l}x\|-d)<d+ \\ \alpha^l(\|T^{2n-l}x-T^{2n+1-l}x\|-d)$$

and

$$\begin{array}{rcl}\|T^{2n+2}x-T^{2n}x\| & \leq & \|T^{2n+2}x-T^{2n+1}x\|+\|T^{2n+1}x-T^{2n}x\| \\ & \leq & 2\left(d+\alpha^l(\|T^{2n-l}x-T^{2n+1-l}x\|-d)\right).\end{array}$$

After a substitution in (1) with $x=T^{2n}x$, $y=T^{2n+2}x$, $z=T^{2n+1}x$, $r=\|T^{2n+2}x-T^{2n}x\|$ and $R=d+\alpha^l\left(\|T^{2n-l}x-T^{2n+1-l}x\|-d\right)$ and using the convexity of the set $A$ we get the chain of inequalities

$$\begin{array}{rcl} d & \leq & \left\| \frac{T^{2n}x+T^{2n+2}x}{2} - T^{2n+1}x \right\| \\ & \leq & \left(1 - \delta_{\|\cdot\|}\left(\frac{\|T^{2n}x-T^{2n+2}x\|}{d+\alpha^l(\|T^{2n-l}x-T^{2n+1-l}x\|-d)}\right)\right) \\ & & \left(d + \alpha^l(\|T^{2n-l}x - T^{2n+1-l}x\| - d)\right). \end{array} \tag{5}$$

From (5) we obtain the inequality

$$\delta_{\|\cdot\|}\left(\frac{\|T^{2n}x - T^{2n+2}x\|}{d + \alpha^l(\|T^{2n-l}x - T^{2n+1-l}x\| - d)}\right) \leq \frac{\alpha^l(\|T^{2n-l}x - T^{2n+1-l}x\| - d)}{d + \alpha^l(\|T^{2n-l}x - T^{2n+1-l}x\| - d)}. \tag{6}$$

From the uniform convexity of $X$ is follows that $\delta_{\|\cdot\|}$ is strictly increasing and therefore there exists its inverse function $\delta_{\|\cdot\|}^{-1}$, which is strictly increasing too.

Just to fit some of the next formulas in the text field let us put $S_{n,m}(x) = \|T^n x - T^m x\| - d$. From (6) we get

$$\|T^{2n}x - T^{2n+2}x\| \leq \left(d + \alpha^l S_{2n-l,2n+1-l}\right) \delta_{\|\cdot\|}^{-1}\left(\frac{\alpha^l S_{2n-l,2n+1-l}}{d + \alpha^l S_{2n-l,2n+1-l}}\right). \tag{7}$$

By the inequality $\delta_{\|\cdot\|}(t) \geq Ct^q$ it follows that $\delta_{\|\cdot\|}^{-1}(t) \leq \left(\frac{t}{C}\right)^{1/q}$. From (7) and the inequalities

$$d \leq d + \alpha^l(\|T^{2n-l}x - T^{2n+1-l}x\| - d) \leq \|T^{2n-l}x - T^{2n+1-l}x\|$$

we obtain

$$\begin{array}{rcl} \|T^{2n}x - T^{2n+2}x\| & \leq & \left(d + \alpha^l S_{2n-l,2n+1-l}\right) \sqrt[q]{\frac{\alpha^l S_{2n-l,2n+1-l}}{C.(d + \alpha^l S_{2n-l,2n+1-l})}} \\ & \leq & \|T^{2n-l}x - T^{2n+1-l}x\| \sqrt[q]{\frac{S_{2n-l,2n+1-l}}{Cd}} \left(\sqrt[q]{\alpha}\right)^l. \end{array} \tag{8}$$

From (i) and (ii) there exists a unique $\xi$, such that $\|\xi - T\xi\| = d$, $T^2\xi = \xi$ and $\xi$ is a limit of the sequence $\{T^{2n}x\}_{n=1}^{\infty}$ for any $x \in A$.

After a substitution with $l = 2n$ in (8) we get the inequality

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\|T^{2n}x - T^{2n+2}x\right\| \leq \|x - Tx\| \sqrt[q]{\frac{\|x-Tx\|-d}{Cd}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[q]{\alpha}\right)^{2n}$$
$$= \|x - Tx\| \sqrt[q]{\frac{\|x-Tx\|-d}{Cd}} \cdot \frac{\sqrt[q]{\alpha^2}}{1-\sqrt[q]{\alpha^2}}$$

and consequently the series $\sum_{n=1}^{\infty}(T^{2n}x - T^{2n+2}x)$ is absolutely convergent. Thus for any $m \in \mathbb{N}$ there holds $\xi = T^{2m}x - \sum_{n=m}^{\infty}\left(T^{2n}x - T^{2n+2}x\right)$ and therefore we get the inequality

$$\left\|\xi - T^{2m}x\right\| \leq \sum_{n=m}^{\infty} \left\|T^{2n}x - T^{2n+2}x\right\| \leq$$
$$\|x - Tx\| \sqrt[q]{\frac{\|x-Tx\|-d}{Cd}} \cdot \frac{\left(\sqrt[q]{\alpha}\right)^{2m}}{1-\sqrt[q]{\alpha^2}}.$$

(iv) After a substitution with $l = 1 + 2i$ in (8) we obtain

(9)
$$\|T^{2n+2i}x - T^{2n+2(i+1)}x\| \leq$$
$$\|T^{2n-1}x - T^{2n}x\| \sqrt[q]{\frac{\|T^{2n-1}x - T^{2n}x\| - d}{Cd}} \left(\sqrt[q]{\alpha}\right)^{1+2i}.$$

From (9) we get that there holds the inequality

(10)
$$\|T^{2n}x - T^{2(n+m)}x\| \leq \sum_{i=0}^{m-1} \|T^{2n+2i}x - T^{2n+2(i+1)}x\|$$
$$\leq \sum_{i=0}^{m-1} \|T^{2n-1}x - T^{2n}x\| \sqrt[q]{\frac{\|T^{2n-1}x - T^{2n}x\| - d}{Cd}} \left(\sqrt[q]{\alpha}\right)^{1+2i}$$
$$= \|T^{2n-1}x - T^{2n}x\| \sqrt[q]{\frac{\|T^{2n-1}x - T^{2n}x\| - d}{Cd}} \sum_{i=0}^{m-1} \left(\sqrt[q]{\alpha}\right)^{1+2i}$$
$$= \|T^{2n-1}x - T^{2n}x\| \sqrt[q]{\frac{\|T^{2n-1}x - T^{2n}x\| - d}{Cd}} \cdot \frac{1-\left(\sqrt[q]{\alpha}\right)^{2m}}{1-\sqrt[q]{\alpha^2}} \sqrt[q]{\alpha}$$

and after letting $m \to \infty$ in (10) we obtain the inequality

$$\left\|T^{2n}x - \xi\right\| \leq \|T^{2n-1}x - T^{2n}x\| \sqrt[q]{\frac{\|T^{2n-1}x - T^{2n}x\| - d}{Cd}} \frac{\sqrt[q]{\alpha}}{1 - \sqrt[q]{\alpha^2}}.$$

□

**REFERENCES:**


[1] Beauzamy, B., Introduction to Banach Spaces and their Geometry. North–Holland Publishing Company, Amsterdam (1979).

[2] Berinde, V., Iterative Approximation of Fixed Points. Springer, Berlin (2007).

[3] Deville, R., Godefroy, G., Zizler, V., Smothness and renormings in Banach spaces. Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics (1993).

[4] Eldred, A., Veeramani, P., Existence and convergence of best proximity points. J. Math. Anal. Appl., **323** (2) (2006), 1001–1006.

[5] Fabian, M., Habala, P., Hájek, P., Montesinos, V., Pelant, J., Zizler, V., Functional Analysis and Infinite–Dimensional Geometry. Springer-Verlag, New York (2011).

[6] Hardy, G.E., Rogers, T.D. A generalization of a fixed point theorem of Reich, Canad. Math. Bull. **16** (1973), 201–206.

[7] Horvat–Marc, A., Petric, M., Examples of cyclical operators. Carpathian J. Math., **32** (3) (2016), 331–338.

[8] Kirk, W., Srinivasan, P., Veeramani, P., Fixed points for mappings satisfying cyclical contractive conditions. Fixed Point Theory, **4** (1) (2003), 79–89.

[9] Ilchev, A., Zlatanov, B., Error estimates for approximation of coupled best proximity points for cyclic contractive maps. Appl. Math. Comput., **290** (2016), 412–425.

[10] Ilchev, A., Zlatanov, B., Fixed and Best Proximity Points for Kannan Cyclic Contractions in Modular Function Spaces. Journal of Fixed Point Theory Applications, **19** (4) (2017), 2873–2893.

[11] Ivanov, M., Zlatanov, B., Zlateva, N., A variational principle and best proximity points. Acta Math. Sin. (Engl. Ser.), **31** (8) (2015), 1315–1326.

[12] Meir, A., On the Uniform Convexity of $L_p$ Spaces, $1 < p < 2$. Illinois J. Math., **28** (3) (1984), 420–424.

[13] Petric, M., Best proximity point theorems for weak cyclic Kannan contractions, Filomat, **25** (2) (2011), 145–154.

[14] Zlatanov, B., Best proximity points in modular function spaces. Arab. J. Math., **4** (3) (2015), 215–227.

[15] B. Zlatanov *Error Estimates for Approximating of Best Proximity Points for Cyclic Contractive Maps*, Carpathian J. Math., **32** (2016) No. 2, 241–246.

**Boyan Zlatanov**
Plovdiv University "Paisii Hilendarski"
E-mail: bzlatanov@gmail.com

**Atanas Ilchev**
Plovdiv University "Paisii Hilendarski"
E-mail: atanasilchev1@gmail.com

Annual of Konstantin Preslavsky University of Shumen
Faculty of Mathematics and Informatics , vol. XIX C, 2018, pp. 21- 26

# ON $P$-GROUPS HAVING A NORMAL ELEMENTARY ABELIAN SUBGROUP OF INDEX $P$*

**IVO M. MICHAILOV, IVAN S. IVANOV**

***ABSTRACT:*** *In this article we prove a classification theorem for p-groups G having a normal elementary abelian group H of index p, under the assumption that the p-th lower central subgroup $G_{(p)}$ is trivial.*

***KEYWORDS:*** *nilpotent groups, p-groups.*

Let us first introduce some notations. The cyclic group of order $n$ we denote by $C_n$. Let $G$ be a group. The subgroups $G_{(0)} = G$ and $G_{(i)} = [G, G_{(i-1)}]$ for $i \geq 1$ are called the lower central series of $G$. Let $G = \langle H, \alpha \rangle$, where $H$ is a normal abelian subgroup of $G$ and $\alpha^p \in H$. Denote $H^p = \{h^p : h \in H\}$ and $H(p) = \{h \in H : h^p = 1, h \notin H^p\}$. For any $\beta \in H$ define $N_G(\beta) = \langle \alpha^{-x} \beta \alpha^x : 0 \leq x \leq p-1 \rangle$, the normalizer of $\langle \beta \rangle$ in $G$.

We are going to prove now some properties concerning the generators and relations in the $p$-groups $G$ having a normal abelian group $H$ of index $p$ under the assumption that $G_{(p)} = \{1\}$. Bender started the study of these groups in [1], and the first author investigated the related Noether's problem in [2, 3].

**Lemma 1.** *Let $p$ be a prime, let $n \geq 2$ and let $G$ be a group of order $p^n$ with a normal abelian subgroup $H$ of order $p^{n-1}$. Then $H$ is subject to the following conditions:*

1. *For any $\beta_1 \in H, \beta_1 \notin Z(G)$, there exist $\beta_2, \dots, \beta_k \in H$ for some $k \geq 2$ such that $[\beta_j, \alpha] = \beta_{j+1}$, where $1 \leq j \leq k-1$ and $\beta_k \neq 1$*

*Partially supported by Scientific Research Grant RD-08-86/30.01.2018 of Shumen University.

*is central. We call $k$ the length of the commutator chain, starting with $\beta_1$.*

2. *The normalizer $N_G(\beta_1)$ is generated by $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$.*

3. *$N_G(\beta_1) = N_G(\beta_1')$ for $\beta_1' \in N_G(\beta_1)$ if and only if $\beta_1' = \prod_{i=1}^{k} \beta_i^{x_i}$ for some integers $x_i$, where $\gcd(x_1, p) = 1$.*

4. *Let $\beta = \prod_{i=2}^{k} \beta_i^{x_i}$ for some integers $x_i$, such that $\gcd(x_{i_0}, p) = 1$, where $i_0 = \min\{i : x_i \neq 0\}$. Then $\beta$ appears in a commutator chain starting with a generator $\beta_1'$, i.e., there exist $\beta_1', \cdots, \beta_{i_0}' = \beta$ such that $[\beta_j', \alpha] = \beta_{j+1}'$, for $1 \leq j \leq i_0 - 1 \leq k-1$, and $N_G(\beta_1) = N_G(\beta_1')$. In particular, if $\beta_2^p = 1$, then every element $\beta \in \langle \beta_2, \ldots, \beta_k \rangle$ appears in a commutator chain starting with a generator $\beta_1'$ such that $N_G(\beta_1) = N_G(\beta_1')$.*

*Proof.* (1) Since $G$ is nilpotent, there exist $\beta_2, \ldots, \beta_k \in H$ for some $k \geq 2$ such that $[\beta_j, \alpha] = \beta_{j+1}$, where $1 \leq j \leq k-1$ and $\beta_k \neq 1$ is central.

(2) We have that $\beta_2 = [\beta_1, \alpha] = \alpha^{-0}\beta_1^{-1}\alpha^0 \cdot \alpha^{-1}\beta_1\alpha \in N_G(\beta_1)$, and for any $x : 3 \leq x \leq k$ we make the inductive assumption that $\beta_{x-1} = [\beta_1, \alpha^{x-2}]h$ for $h \in \langle \alpha^{-y}\beta_1\alpha^y : 0 \leq y \leq x-3 \rangle \leq N_G(\beta_1)$. Using the identity $[\beta_1, \alpha^{x-1}] = [\beta_1, \alpha^{x-2}][\beta_1, \alpha][[\beta_1, \alpha^{x-2}], \alpha]$ we see that
$[[\beta_1, \alpha^{x-2}], \alpha] = [\beta_{x-1}h^{-1}, \alpha] = \beta_x[h^{-1}, \alpha] =$
$= [\beta_1, \alpha^{x-1}][\beta_1, \alpha^{x-2}]^{-1}[\beta_1, \alpha]^{-1}$. Hence
$\beta_x = [\beta_1, \alpha^{x-1}]h_1 \in N_G(\beta_1)$, where $h_1 = [\beta_1, \alpha^{x-2}]^{-1}[\beta_1, \alpha]^{-1}[h, \alpha] \in \langle \alpha^{-y}\beta_1\alpha^y : 0 \leq y \leq x-2 \rangle \leq N_G(\beta_1)$. Since $N_G(\beta_1)$ is the minimal normal subgroup of $G$ containing $\beta_1$, we obtain that $N_G(\beta_1) = \langle \beta_1, \ldots, \beta_k \rangle$.

(3) Let $\beta_1' = \prod_{i=1}^{k} \beta_i^{x_i}$ for some integers $x_i$, where $\gcd(x_1, p) = 1$. From (2) it follows that $N_G(\beta_1) \geq N_G(\beta_1')$. On the other hand, $[\beta_1', \alpha^{k-1}] = \beta_k^{x_1} \in N_G(\beta_1'), [\beta_1', \alpha^{k-2}] = \beta_{k-1}^{x_1}\beta_k^{x_2} \in N_G(\beta_1'), \ldots,$
$[\beta_1', \alpha] = \prod_{i=2}^{k} \beta_i^{x_{i-1}} \in N_G(\beta_1')$ and $\beta_1' = \prod_{i=1}^{k} \beta_i^{x_i} \in N_G(\beta_1')$. Therefore, $\beta_1, \ldots, \beta_k \in N_G(\beta_1')$, i.e., $N_G(\beta_1) \leq N_G(\beta_1')$.

Conversely, if $N_G(\beta_1)=N_G(\beta_1')$, we have that $\beta_1'=\prod_{i=1}^k\beta_i^{x_i}$ and $\beta_1=\prod_{i=1}^k\beta_i'^{y_i}$ for $\beta_{i+1}'=[\beta_i',\alpha]$ and some integers $x_i,y_i$. Therefore, $\beta_1=\beta_1^{x_1y_1}\prod_{i=2}^k\beta_i^{x_iy_1}\prod_{i=2}^k\beta_i'^{y_i}$, which is possible only if
$x_1y_1\equiv 1 \pmod{\operatorname{ord}(\beta_1)}$, and hence $\gcd(x_1,p)=1$.

(4) We can write $\beta=\prod_{i=i_0}^k\beta_i^{x_i}=\prod_{i=i_0}^k[\beta_{i-1}^{x_i},\alpha]=[\prod_{i=i_0}^k\beta_{i-1}^{x_i},\alpha]$. Put $\beta_{i_0-1}'=\prod_{i=i_0}^k\beta_{i-1}^{x_i}$, so $[\beta_{i_0-1}',\alpha]=\beta$. If $i_0=2$ then $N_G(\beta_1)=N_G(\beta_1')$ (according to (3)) and $[\beta_1',\alpha]=\beta$. If $i_0>2$ then $\beta_{i_0-1}'=[\beta_{i_0-2}',\alpha]$ for $\beta_{i_0-2}'=\prod_{i=i_0}^k\beta_{i-2}^{x_i}$. It is clear now that proceeding in this way we will obtain at the end a generator $\beta_1'$ such that $N_G(\beta_1)=N_G(\beta_1')$ and $[\beta_j',\alpha]=\beta_{j+1}'$ for $1\le j\le i_0-1$ and $\beta_{i_0}'=\beta$.

Finally, if $\beta_2^p=1$, then from $[\beta_j^p,\alpha]=\beta_{j+1}^p$ it follows that $\beta_3^p=\cdots=\beta_k^p=1$. Clearly, every non-trivial element $\beta\in\langle\beta_2,\dots,\beta_k\rangle$ can be written as $\beta=\prod_{i=2}^k\beta_i^{x_i}$ for some integers $x_i$, such that $\gcd(x_i,p)=1$. $\square$

Next, we are going to consider the special case when $H$ is an elementary abelian group.

**Theorem 2.** *Let $p$ be prime, let $n\ge 2$ and let $G$ be a group of order $p^n$ with an abelian normal subgroup $H\simeq(C_p)^{n-1}$, the elementary abelian group of order $p^{n-1}$. Then $H$ is subject to the following conditions:*

1. *There exist elements $\gamma_1,\dots,\gamma_s\in H$ (for some $s\le n-1$) such that $H\simeq N_G(\gamma_1)\times\cdots\times N_G(\gamma_s)$;*

2. *For any $i:1\le i\le s$ there exists a natural number $k_i\le p$ such that $N_G(\gamma_i)\simeq(C_p)^{k_i}$, and generators $\beta_{i1},\dots,\beta_{ik_i}\in N_G(\gamma_i)$, such that $\beta_{i1}=\gamma_i,[\beta_{ij},\alpha]=\beta_{ij+1}$ for $1\le j\le k_i-1$ and $\beta_{ik_i}$ is central in $G$.*

*Proof.* First, let us decompose $H$ as a direct product of cyclic groups: $H=\langle\gamma_1\rangle\times\cdots\times\langle\gamma_{n-1}\rangle$. Then there exists a generator, say $\gamma_1$, such that $\gamma_1\notin[H,\alpha]$. Indeed, if we suppose that $\gamma_i\in[H,\alpha]$ for all $i$, from the commutation rule $[a,\alpha][b,\alpha]=[ab,\alpha]$ we get that any element $\gamma=\prod_i \gamma_i^{a_i}\in H$ is in $[H,\alpha]$. But then we will obtain infinite commutator series $[\alpha_{j+1},\alpha]=\alpha_j, \alpha_1=\gamma_1, j=1,2,\ldots$, which is a contradiction, since $G$ being a $p$-group is nilpotent.

Note that, since any group of order $p^2$ is abelian, $\langle\gamma_1\rangle$ is normal in $G$ if and only if $\gamma_1$ is central in $G$. Clearly, if $\gamma_1$ is central in $G$, then $N_G(\gamma_1)=\langle\gamma_1\rangle\simeq C_p$. If all elements of $H$ are central, then $G$ is abelian and $s=n-1$.

Now, for any $i: 1\leq i\leq n-1$ such that $\gamma_i$ is not central in $G$, put $\beta_{i1}=\gamma_i$. Since $G$ is nilpotent, there exist $\beta_{i2},\ldots,\beta_{ik_i}\in H$ for some $k_i\geq 2$ such that $[\beta_{ij},\alpha]=\beta_{ij+1}$, where $1\leq j\leq k_i-1$ and $\beta_{ik_i}\neq 1$ is central. Since $\alpha^p$ is in $H$, we have that

$$\beta_{i1}=\alpha^{-p}\beta_{i1}\alpha^p=\beta_{i1}\beta_{i2}^{\binom{p}{1}}\beta_{i3}^{\binom{p}{2}}\cdots\beta_{ip}^{\binom{p}{p-1}}\beta_{ip+1}=\beta_{i1}\beta_{ip+1},$$

therefore $\beta_{ip+1}=1$. Then $G_{(p)}=\{1\}, k_i\leq p$ and $\beta_{ik_i+1}=\cdots=\beta_{ip+1}=1$. According to Lemma 1 we get $N_G(\gamma_i)=\langle\beta_{i1},\ldots,\beta_{ik_i}\rangle$.

Next, without loss of generality we may assume that $\gamma_1$ has the maximal length of the commutator chain, i.e., $k_1\geq k_j$ for $2\leq j\leq n-1$. Put $\beta_1=\beta_{11}=\gamma_1, \beta_2=\beta_{12},\ldots,\beta_{k_1}=\beta_{1k_1}$. Observe that the elements $\beta_1,\ldots,\beta_{k_1}$ are independent generators of $N_G(\gamma_1)$. Indeed, if we suppose they are dependent, then $\beta_k=\prod_{i<k}\beta_i^{x_i}$ for some $0\leq x_i<p, 1\leq k\leq k_1$. Forming the commutator chain of $\beta_k$, we see that there exists a commutator that can be decomposed as a product of $\beta_k^{x_j}$ (for some $x_j\neq 0$) and powers of $\beta_i$ for $i\neq k$. Thus we will get an endless commutator chain, which is impossible, $G$ being nilpotent.

If $k_1<n-1$ then there exists another generator, say $\gamma_2\notin N_G(\gamma_1)$. We can also assume that $\gamma_2$ is not central, otherwise $H=N_G(\gamma_1)\times\langle\gamma_2\rangle\times\cdots\times\langle\gamma_s\rangle$ and we are done. Put $\beta_{k_1+1}=\beta_{21}=\gamma_2, \beta_{k_1+2}=\beta_{22},\ldots,\beta_{k_1+k_2}=\beta_{2k_2}$. Again, the elements $\beta_{k_1+1},\ldots,\beta_{k_1+k_2}$ are independent generators of $N_G(\gamma_2)$. However, it is possible that $\beta_{k_1+1},\ldots,\beta_{k_1+k_2}$ are dependent modulo $N_G(\gamma_1)$, i.e., $\prod_{i=1}^{k_1}\beta_i^{x_i}\prod_{i=k_1+1}^{k_2}\beta_i^{x_i}=1$ for $x_i: 0\leq x_i\leq p-1$ such that $x_{i_0}\neq 0, x_{j_0}\neq 0$ for some $i_0, j_0: 1\leq i_0\leq k_1, k_1+1\leq j_0\leq k_1+k_2$. If

we suppose that $x_{j_1} \neq 0$ for some $j_1 \neq j_0, k_1+1 \leq j_1 \leq k_1+k_2$ we will obtain that $\beta_{j_1} = \beta_{j_0}^{x} \cdots$ for $x \neq 0$ which leads to an endless commutator chain. Thus the only possibility is that there exists $\ell_2 \leq k_2$ such that $\beta_{k_1+1}, \dots, \beta_{k_1+\ell_2-1} \notin N_G(\gamma_1)$, but $\beta_{k_1+\ell_2} \in N_G(\gamma_1)$.

According to Lemma 1 (4), $\beta_{2\ell_2} = \beta_{k_1+\ell_2}$ appears in a commutator chain starting with a generator $\gamma_1'$ such that $N_G(\gamma_1) = N_G(\gamma_1')$, i.e., there exist $\beta_{11}', \dots, \beta_{1\ell_1}' \in N_G(\gamma_1')$, such that $\beta_{11}' = \gamma_1', [\beta_{1j}', \alpha] = \beta_{1j+1}'$ for $1 \leq j \leq \ell_1 - 1$ and $\beta_{1\ell_1}' = \beta_{2\ell_2}$ for some $\ell_1 \leq k_1$. Notice that $k_1 - \ell_1 = k_2 - \ell_2$, because after $\beta_{2\ell_2}$ the two commutator chains coincide. Since we assumed that $k_1 \geq k_2$, we get $\ell_1 \geq \ell_2$. Define $\gamma_2' = \beta_{1\ell_1-\ell_2+1}'^{-1}\gamma_2$ and $\beta_{21}' = \gamma_2', [\beta_{2j}', \alpha] = \beta_{2j+1}'$ for $1 \leq j \leq \ell_2 - 1$. Therefore, $\beta_{2\ell_2}' = 1$ and $\beta_1, \dots, \beta_{k_1}, \beta_{21}', \dots, \beta_{2\ell_2-1}'$ are independent generators of the whole subgroup $N_G(\gamma_1)N_G(\gamma_2')$.

If $k_1 + \ell_2 - 1 < n - 1$ then there exists another generator, say $\gamma_3 \notin N_G(\gamma_1)N_G(\gamma_2')$ and we may proceed in a similar manner. Namely, suppose that for some $t \geq 2$ there exist generators $\gamma_2', \dots, \gamma_t'$ such that $\beta_{i1}' = \gamma_i', [\beta_{ij}', \alpha] = \beta_{ij+1}'$ for $1 \leq j \leq \ell_i - 1, 2 \leq i \leq t$ and $\prod_{i=2}^{t}\prod_{j=1}^{\ell_j-1} \beta_{ij}'^{x_{ij}} \notin N_G(\gamma_1) \setminus \{1\}$ for any $0 \leq x_{ij} \leq p-1$. We proved this assertion for $t = 2$, and we will show that it holds for $t+1$.

Assume that $\gamma_{t+1} \notin N_G(\gamma_1)N_G(\gamma_2') \cdots N_G(\gamma_t')$ and $\prod_{i=2}^{t}\prod_{j=1}^{\ell_i-1} \beta_{ij}'^{x_{ij}} \cdot \prod_{j=1}^{k_{t+1}} \beta_{t+1j}^{x_{t+1j}} \in N_G(\gamma_1) \setminus \{1\}$. If we suppose that $x_{t+1j_0} \neq 0$ and $x_{t+1j_1} \neq 0$ for some $1 \leq j_0 < j_1 \leq k_{t+1}$ we will obtain a contradiction with the nilpotency of $G$. Thus the only possibility is that there exists $\ell_{t+1} \leq k_{t+1}$ such that $\beta_{t+1j} \notin N_G(\gamma_1)N_G(\gamma_2') \cdots N_G(\gamma_t')$ for $1 \leq j \leq \ell_{t+1} - 1$, where $\beta_{t+11} = \gamma_{t+1}, \beta_{t+1j+1} = [\beta_{t+1j}, \alpha]$, but $\beta_{t+1\ell_{t+1}} = \beta \prod_{i=2}^{t}\prod_{j=1}^{\ell_i-1} \beta_{ij}'^{y_{ij}}$, where $\beta \in N_G(\gamma_1) \setminus \{1\}$.

According to Lemma 1 (4), $\beta$ appears in a commutator chain starting with a generator $\gamma_1''$ such that $N_G(\gamma_1) = N_G(\gamma_1'')$, i.e., there exist $\beta_{11}'', \dots, \beta_{1\ell_1'}'' \in N_G(\gamma_1'')$, such that $\beta_{11}'' = \gamma_1'', [\beta_{1j}'', \alpha] = \beta_{1j+1}''$ for $1 \leq j \leq \ell_1' - 1$ and $\beta_{1\ell_1'}'' = \beta$ for some $\ell_1' \leq k_1$. Notice that $k_1 - \ell_1' \leq k_{t+1} - \ell_{t+1}$. (Here we might have an inequality, when $\beta_{t+1\ell_{t+1}+k_1-\ell_1'} \notin Z(G)$.)

Since we assumed that $k_1 \geq k_{t+1}$, we get $\ell'_1 \geq \ell_{t+1}$. Define $\gamma'_{t+1} = \beta''^{-1}_{1\ell'_1-\ell_{t+1}+1}\gamma_{t+1}$ and $\beta'_{t+11} = \gamma'_{t+1}, [\beta'_{t+1j}, \alpha] = \beta'_{t+1j+1}$ for $1 \leq j \leq \ell_{t+1} - 1$. Therefore, $\beta'_{t+1\ell_{t+1}} = \prod_{i=2}^{t}\prod_{j=1}^{\ell_i}\beta'^{y_{ij}}_{ij} \in N_G(\gamma'_2)\cdots N_G(\gamma'_t)$ and our assertion is proved.

We can continue this process until we finish the generators of $H$. Thus we will obtain finally that $H = N_G(\gamma_1)N_G(\gamma'_2)\cdots N_G(\gamma'_s)$ for some generators $\gamma_1, \gamma'_2, \ldots, \gamma'_s$ of direct cyclic factors such that $N_G(\gamma_1) \cap (N_G(\gamma'_2)\cdots N_G(\gamma'_s)) = \{1\}$. Therefore, $H = N_G(\gamma_1) \times (N_G(\gamma'_2)\cdots N_G(\gamma'_s))$, and we can apply induction on $N_G(\gamma'_2)\cdots N_G(\gamma'_s)$ (which, of course, is normal in $G$) to finish the proof. □

**REFERENCES:**


[1] H. A. Bender, On groups of order $p^m$, $p$ being an odd prime number, which contain an abelian subgroup of order $p^{m-1}$, *Ann. Math.*, **29** No. 1/4 (1927-1928), 88–94.

[2] I. Michailov, Noether's problem for abelian extensions of cyclic $p$-groups, *Pacific J. Math*, **270** (1), 2014, p. 167-189.

[3] I. Michailov, Noether's problem for $p$-groups with an abelian subgroup of index $p$, *Alg. Coll.*, Vol. 22, No. spec01, pp. 835-848 (2015).



**Ivo Michailov**
Faculty of Mathematics and Informatics, Konstantin Preslavsky University, Universitetska str. 115, 9700 Shumen, Bulgaria
E-mail: i.michailov@shu.bg

**Ivan Ivanov**
Faculty of Mathematics and Informatics, Konstantin Preslavsky University, Universitetska str. 115, 9700 Shumen, Bulgaria
E-mail: slaveicov@abv.bg

Годишник на Шуменски университет „Епископ Константин Преславски“
Факултет по математика и информатика, том XIX C, 2018, стр. 27 - 36

# EXTREMAL PROPERTIES OF TWO NOTABLE POINTS IN CONVEX QUADRILATERAL

**VESELIN N. NENKOV, STANISLAV T. STEFANOV**

***ABSTRACT:*** *In the paper some special convex quadrilaterals are considered, where remarkable points reach extreme properties.*

***KEYWORDS:*** *convex quadrilateral, circumcircle, area, epicenter, pseudocentre*

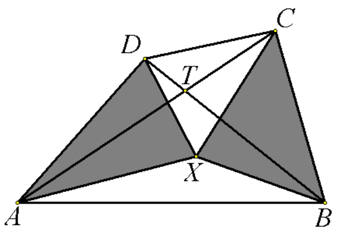
# ЕКСТРЕМАЛНИ СВОЙСТВА НА ДВЕ ЗАБЕЛЕЖИТЕЛНИ ТОЧКИ В ИЗПЪКНАЛ ЧЕТИРИЪГЪЛНИК

**ВЕСЕЛИН Н. НЕНКОВ, СТАНИСЛАВ Т. СТЕФАНОВ**

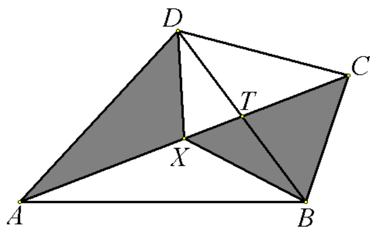
***АБСТРАКТ:*** *Разгледани са специални изпъкнали четириъгълници, в които забележителни точки достигат екстремални свойства.*

## Въведение

В редица публикации са описани свойства на различни забележителни точки в изпъкнал четириъгълник (вж. [1] – [6]). Тук ще разгледаме някои екстремални свойства на две от тях. Първата – *епицентърът* – е разгледана в [3]. Епицентър на четириъгълника $ABCD$ наричаме точката $E$, за която са изпълнени равенствата $S_{ABE} = S_{CDE}$ и $S_{ADE} = S_{BCE}$ (Фиг. 1). В [3] е изяснено, че четириъгълник, в който единият диагонал разполовява другия, за епицентъра $E$ са изпълнени по-силните равенства $S_{ABE} = S_{BCE} = S_{CDE} = S_{DAE}$. Обратно, лесно се доказва, че за епицентъра тези равенства са изпълнени само в четириъгълник, в който единият диагонал разполовява другия (Фиг. 2.).




**Фиг. 1**

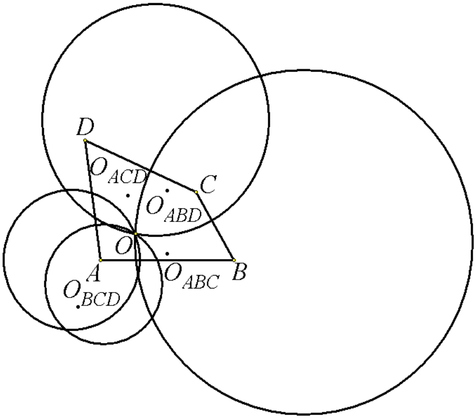



**Фиг. 2**

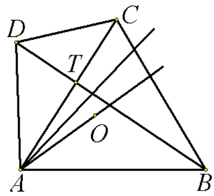
Втората точка – *псевдоцентърът* – е разгледана в [1]. Псевдоцентър на четириъгълник $ABCD$ се нарича точката $O$, за която са изпълнени равенствата

$$AO.R_{BCD} = BO.R_{CDA} = CO.R_{DAB} = DO.R_{ABC},$$

където $R_{BCD}$, $R_{CDA}$, $R_{DAB}$ и $R_{ABC}$ са радиусите на описаните окръжности съответно около триъгълниците $BCD$, $CDA$, $DAB$ и $ABC$ (Фиг.3) (Окръжностите на фиг. 3 са Аполониевите окръжности на отсечките $AB$, $BC$, $CD$ и $DA$, определени при съответните отношения на радиусите на описаните окръжности). В [5] е показано, че в четириъгълник с перпендикулярни диагонали псевдоцентърът $O$ и пресечната точка на диагоналите $T$ лежат на изогонални прави спрямо всеки от ъглите му (две прави в даден ъгъл се наричат изогонални спрямо него, ако образуват равни ъгли с ъглополовящата му, а следователно и с раменете му (Фиг. 4)).




**Фиг. 3**




**Фиг. 4**

## Екстремални свойства на епицентъра и псевдоцентъра в изпъкнал четириъгълник

Първо ще докажем следното екстремално свойство на епицентъра. За целта преди това ще разгледаме едно помощно твърдение, което се изразява със следната

**Лема 1.** *Ако $X$ е вътрешна точка за изпъкнал четириъгълник $ABCD$ с лице $S$, то е изпълнено неравенството $S_{ABX}.S_{BCX}.S_{CDX}.S_{DAX} \le \left(\frac{S}{4}\right)^4$, където $S_{ABX}$, $S_{BCX}$, $S_{CDX}$ и $S_{DAX}$ са лицата съответно на триъгълниците $ABX$, $BCX$, $CDX$ и $DAX$.*

**Доказателство.** Тъй като точката $X$ е вътрешна за $ABCD$, то е изпълнено равенството $S_{ABX} + S_{BCX} + S_{CDX} + S_{DAX} = S$. От това равенство и неравенството между средното аритметично и средното геометрично следва желаното неравенство.

Равенството в лемата се достига точно когато $S_{ABX} = S_{BCX} = S_{CDX} = S_{DAX} = \frac{S}{4}$. Следователно произведението $S_{ABX}.S_{BCX}.S_{CDX}.S_{DAX}$ приема най-голямата си стойност $\left(\frac{S}{4}\right)^4$ тогава и само тогава, когато $S_{ABX} = S_{BCX} = S_{CDX} = S_{DAX} = \frac{S}{4}$. Тези равенства, както беше споменато в началото, показват, че е изпълнена следващата теорема, която изяснява какъв е четириъгълникът $ABCD$ и коя е точката $X$ в случаите, в които тя съществува.

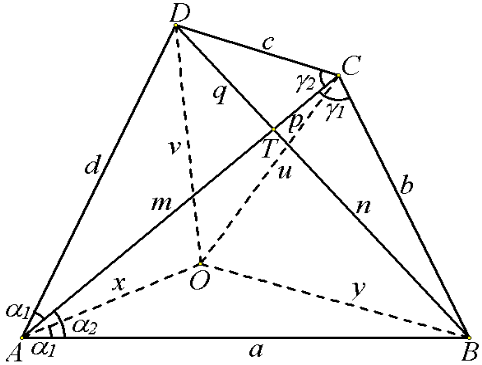
**Теорема 1.** *Ако $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник, който притежава вътрешна точка $X$, за която произведението от лицата на триъгълниците $ABX$, $BCX$, $CDX$ и $DAX$ е най-голямо, то единият диагонал на $ABCD$ разполовява другия, а точката $X$ е епицентърът на $ABCD$.*

Сега ще разгледаме едно екстремално свойство на псевдоцентъра в изпъкнал четириъгълник с перпендикулярни диагонали. Предварително ще докажем следната

**Лема 2.** *Диагоналите на изпъкнал четириъгълник $ABCD$ се пресичат в точка $T$, като $AT = m$, $BT = n$, $CT = p$ и $DT = q$. Ако диагоналите на $ABCD$ са перпендикулярни, а разстоянията от псевдоцентъра $O$ на $ABCD$ до върховете $A$, $B$, $C$ и $D$ са съответно $x$, $y$, $u$ и $v$, то са изпълнени равенствата:*

$$(1)\qquad x=\frac{p\sqrt{\left(m^2+n^2\right)\left(m^2+q^2\right)}}{mp+nq},\quad y=\frac{q\sqrt{\left(m^2+n^2\right)\left(n^2+p^2\right)}}{mp+nq},$$
$$u=\frac{m\sqrt{\left(n^2+p^2\right)\left(p^2+q^2\right)}}{mp+nq},\quad v=\frac{n\sqrt{\left(p^2+q^2\right)\left(m^2+q^2\right)}}{mp+nq}.$$

**Доказателство.** Без ограничение можем да считаме, че точката $O$ лежи в $\Delta ATB$. Въвеждаме означенията $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$, $\sphericalangle CAD=\alpha_1$, $\sphericalangle CAB=\alpha_2$, $\sphericalangle ACB=\gamma_1$ и $\sphericalangle ACD=\gamma_2$ (Фиг. 5).




**Фиг. 5**

Тъй като точките $T$ и $O$ лежат на изогонални прави относно $\sphericalangle BAD$ (според казаното в началото), то $\sphericalangle OAB=\sphericalangle CAD=\alpha_1$.

Тогава $\sphericalangle OAC=\sphericalangle BAC-\sphericalangle OAB=\alpha_2-\alpha_1$.

Аналогично $\sphericalangle OCA = \gamma_1 - \gamma_2$. Оттук определяме $\sphericalangle AOC = 180° - \sphericalangle OAC - \sphericalangle OCA = 180° - (\alpha_2 - \alpha_1) - (\gamma_1 - \gamma_2)$.
От синусовата теорема за $\Delta AOC$ намираме:

$$(2)\quad x = AO = \frac{AC}{\sin\sphericalangle AOC}\sin\sphericalangle OCA = \frac{(m+p)\sin(\gamma_1 - \gamma_2)}{\sin\left[(\alpha_2 - \alpha_1) + (\gamma_1 - \gamma_2)\right]}$$

Освен това от правоъгълните триъгълници $ADT$ и $ABT$ имаме равенствата $\sin\alpha_1 = \frac{q}{d}$, $\cos\alpha_1 = \frac{m}{d}$, $\sin\alpha_2 = \frac{n}{a}$ и $\cos\alpha_2 = \frac{m}{a}$. С помощта на последните равенства получаваме:

$$(3)\quad \begin{aligned} \sin(\alpha_2 - \alpha_1) &= \sin\alpha_2\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\sin\alpha_1 = \frac{m}{ad}(n-q), \\ \cos(\alpha_2 - \alpha_1) &= \cos\alpha_2\cos\alpha_1 + \sin\alpha_2\sin\alpha_1 = \frac{m^2 + nq}{ad}. \end{aligned}$$

Аналогично намираме:

$$(4)\quad \begin{aligned} \sin(\gamma_1 - \gamma_2) &= \frac{p}{bc}(n-q), \\ \cos(\gamma_1 - \gamma_2) &= \frac{p^2 + nq}{bc}. \end{aligned}$$

От $(3)$ и $(4)$ получаваме равенството:

(5) $$\sin\left[\left(\alpha_2-\alpha_1\right)+\left(\gamma_1-\gamma_2\right)\right]=$$
$$=\sin\left(\alpha_2-\alpha_1\right)\cos\left(\gamma_1-\gamma_2\right)+\cos\left(\alpha_2-\alpha_1\right)\sin\left(\gamma_1-\gamma_2\right)=\frac{(m+p)(n-q)(mp+nq)}{abcd}.$$

Сега от равенства $(2)$, $(4)$ и $(5)$ следва равенството $x=\dfrac{pad}{mp+nq}$. Като вземем предвид, че от Питагоровата теорема следват равенствата $a=\sqrt{m^2+n^2}$ и $d=\sqrt{m^2+q^2}$ (Фиг. 5), окончателно получаваме $x=\dfrac{p\sqrt{\left(m^2+n^2\right)\left(m^2+q^2\right)}}{mp+nq}$. Така доказахме първото от равенства $(1)$. Аналогично се доказват и останалите равенства $(1)$. Лемата е доказана.

Сега разглеждаме множеството $M$ на всички изпъкнали четириъгълници $ABCD$, диагоналите на които са перпендикулярни, а за пресечната им точка $T$ са изпълнени условията $AT=m$, $BT=n$, $CT=p$ и $DT\geq k=\max\left(\dfrac{mn}{p},\dfrac{np}{m}\right)$. За тези четириъгълници е в сила следващата

**Теорема 2.** *Сумата на разстоянията от псевдоцентровете на четириъгълниците от множеството $M$ до съответните им върхове достига минимална стойност, когато $DT=k$.*

**Доказателство.** Означаваме псевдоцентъра на четириъгълника $ABCD$ с $O$. Полагаме $DT=q$, $OA=x(q)$, $OB=y(q)$, $OC=u(q)$ и $OD=v(q)$. От лема 2 следват равенствата:

$$x(q)=\frac{p\sqrt{(m^2+n^2)(m^2+q^2)}}{mp+nq},$$
$$y(q)=\frac{q\sqrt{(m^2+n^2)(n^2+p^2)}}{mp+nq},$$

$$u(q)=\frac{m\sqrt{(n^2+p^2)(p^2+q^2)}}{mp+nq},$$
$$v(q)=\frac{n\sqrt{(p^2+q^2)(m^2+q^2)}}{mp+nq}.$$

Трябва да докажем, че минималната стойност на сумата $x(q)+y(q)+u(q)+v(q)$ в интервала $[k,+\infty)$ се достига при $q=k$. За това е достатъчно да докажем, че при $q\in(k,+\infty)$ са изпълнени неравенствата $x'(q)>0$, $y'(q)>0$, $u'(q)>0$ и $v'(q)>0$ (тъй като тогава разглежданата сума ще е растяща функция в интервала $(k,+\infty)$). За производната на $x(q)$ получаваме $x'(q)=\dfrac{mp^2(m^2+n^2)\left(q-\dfrac{mn}{p}\right)}{(mp+nq)^2\sqrt{(m^2+n^2)(m^2+q^2)}}$. Освен това при $q\in(k,+\infty)$ имаме $q>k=\max\left(\dfrac{mn}{p},\dfrac{np}{m}\right)\geq\dfrac{mn}{p}$, т.е. $q>\dfrac{mn}{p}$. Тогава от израза за $x'(q)$ следва, че $x'(q)>0$ при $q\in(k,+\infty)$.

За производната $y'(q)$ очевидно имаме $y'(q)=\dfrac{mp\sqrt{(m^2+n^2)(n^2+p^2)}}{(mp+nq)^2}>0$ за всяко $q>0$. По-нататък

от $u'(q)=\dfrac{pm^2(n^2+p^2)\left(q-\dfrac{np}{m}\right)}{(mp+nq)^2\sqrt{(n^2+p^2)(p^2+q^2)}}$

и $q>k=\max\left(\dfrac{mn}{p},\dfrac{np}{m}\right)\geq\dfrac{np}{m}$ следва, че $u'(q)>0$ при $q\in(k,+\infty)$. Накрая имаме $q>\dfrac{mn}{p}$ и

$$v'(q)=\frac{n}{(mp+nq)^2}\frac{nq^4+2mpq^3+m^3pq+mp^3(q-\dfrac{mn}{p})}{\sqrt{(p^2+q^2)(m^2+q^2)}}.$$

Откъдето $v'(q)>0$ при $q\in(k,+\infty)$. Така се убедихме, че при $q\in(k,+\infty)$ и четирите производни $x'(q)$, $y'(q)$, $u'(q)$ и $v'(q)$ са положителни. С това теоремата е доказана.

**ЛИТЕРАТУРА:**

[1] Ненков, В., Ст. Стефанов, Х. Хаимов. Псевдоцентър и ортоцентър – забележителни точки в четириъгълника, Математика и информатика, 6, 2016, 614-625.

[2] Стефанов, Ст. Втори псевдоцентър на четириъгълника, Математика и информатика, 3, 2017, 252-261.

[3] Хаимов, Х. Епицентърът – забележителна точка в четириъгълника, Математика, 1, 1997, 18-21.

[4] Хаимов, Х. Брокарианите – забележителни точки в четириъгълника, Математика и информатика, 6, 2001, 17-23.

[5] Хаимов, Х. Геометрия на четириъгълника. Псевдоцентър и ортоцентър, Математика плюс, 2, 2010, 28-51.

[6] Хаимов, Х. Точка на Лемоан, Математика, 6, 2011, 4-12.

**Веселин Ненков**
ВВМУ „Н. Вапцаров“
E-mail: vnenkov@mail. bg

**Станислав Стефанов**
ТУ-София
E-mail: stanislav.toshkov@abv.bg

Годишник на Шуменски университет „Епископ Константин Преславски“
Факултет по математика и информатика, том XIX C, 2018, стр. 37 - 47

# GLOBAL DEBT AND FINANCIAL STABILITY

**SVILEN G. TONEV**

***ABSTRACT:*** *The aim of the paper is to examine the growth of global indebtedness and the reasons for reaching unprecedentedly large debt levels. The peculiarities of indebtedness in the main spheres of the economy - companies, households and governments - are considered. It outlines the main risks to financial stability and analyzes the capabilities of existing institutional and capital mechanisms to address potential crisis processes.*

***KEYWORDS:*** *Global, economy, debt, financial, stability, institutions, capital, buffers, markets, risk, crisis*

# ГЛОБАЛНИЯТ ДЪЛГ И ФИНАНСОВАТА СТАБИЛНОСТ*

**СВИЛЕН Г. ТОНЕВ**

***АБСТРАКТ:*** *Целта на доклада е да се изследва нарастването на задлъжнялостта на глобално равнище и причините за достигането на безпрецедентно големи размери на дълга. Разглеждат се особеностите на задлъжнялостта в основните сфери на икономиката - фирмите, домакинствата и държавите. Посочват се основните рискове за финансовата стабилност и се анализират възможностите на съществуващите институционални и капиталови механизми за овладяване на евентуални кризисни процеси.*

## Въведение

Основните показатели за състоянието на световната икономика в продължение на няколко години отбелязват добри

* Настоящата статия е частично финансирана по проект № РД 08-126/07.02.2018

стойности – налице е икономически растеж, безработицата е ниска, инфлацията е близо до нулата, като все пак дефлация беше избягната, капиталовите пазари работят, банковият сектор е стабилен. Независимо от това, държавните органи и международните икономически организации, носещи отговорност за състоянието на икономиката, следят внимателно протичащите процеси, за да се избегне повторение на дълбоката криза от 2007-2009 г. Някои от белезите на икономическото възстановяване пораждат усещане за недостатъчна стабилност – например инвестициите остават слаби и темпът на повишаване на производителността е необичайно нисък, а същевременно задлъжнялостта на всички равнища е достигнала безпрецеденти размери. Висока задлъжнялост, съчетана с недостатъчно натрупване на реални активи, винаги представлява потенциална опасност от нова финансова и икономическа криза. Изследването на причините за нарастването на глобалния дълг и неговото влияние върху финансовата стабилност привлича отново вниманието на икономическата наука.

## 1 Нарастване на глобалния дълг

Глобалният дълг нараства с висок темп след 2012 г. и понастоящем достига исторически рекордно равнище. Ако изключим финансовия сектор, който дължи пари на домакинства фирми и държави, и същевременно предоставя тези пари като заеми на други домакинства, фирми и държави, глобалният дълг като сума от публичния и частния нефинансов дълг се формира по следния начин (Таблица 1).

**Таблица 1**

**Глобален дълг (в трилиони щатски долари)**

| | 2001 | 2007 | 2016 |
|---|---|---|---|
| Общо | 61.8 | 115.9 | 164.4 |
| Развити | 55.1 | 99.9 | 119.2 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| икономики | | | |
| САЩ | 20.3 | 33.6 | 48.1 |
| Япония | 13.2 | 15.7 | 18.2 |
| Развиващи се икономики | 6.4 | 15.6 | 43.9 |
| Китай | 1.7 | 4.9 | 25.5 |
| Страни с нисък доход | 0.3 | 0.5 | 1.3 |

Изт. Международен валутен фонд

Според данни на Института за международни финанси във Вашингтон, при отчитане и на дълга на финансовия сектор, глобалният дълг достига размер от 233 трилиона долара в края последното тримесечие на 2017 г. Най-голям размер от дълга се държи от нефинансовите предприятия. През 1997 г. тяхната задлъжнялост е била на стойност 22 трилиона долара и е представлявала 64% от световния брутен вътрешен продукт, през 2007 г. стойността е била 42 трилиона долара и 77% от брутния вътрешен продукт, а през 2017 г съответно 68 трилиона долара и 92% от брутния вътрешен продукт. Най-голямо е нарастването на дълга в частния нефинансов сектор на Канада, Франция, Хонг Конг, Корея, Швейцария и Турция.

Второ място заема държавният дълг. Неговата величина през 1997 г. е била 19 трилиона долара и 58% от брутния вътрешен продукт, през 2007 г. достига 33 трилиона долара и също 58% от брутния вътрешен продукт, а през 2017 г. е 63 трилиона долара и 87% от брутния вътрешен продукт.

На трето място като величина е дългът на финансовия сектор. През 1997 г. неговата стойност е 14 трилиона долара и 53% от брутния вътрешен продукт, през 2007 г. е 53 трилиона долара и 86% от брутния вътрешен продукт, през 2017 г. е 58 трилиона долара и 80% от брутния вътрешен продукт.

Четвърта е групата на домакинствата. Тяхната обща задлъжнялост през 1997 г. е 15 трилиона долара и 42% от брутният вътрешен продукт, през 2007 г. е 34 трилиона долара и 57% от брутния вътрешен продукт, през 2017 г. е 44 трилиона долара и 59% от брутния вътрешен продукт.

Причините за това голямо нарастване са няколко. След 2009 г. се прояви обичайното възстановяване на кредитната дейност, свързано с навлизането във възходяща фаза на икономическия цикъл. По – голямо значение обаче имат действията в сферата на паричната политика на икономически развитите държави. Това са изключително ниските лихвени проценти, които бяха държани от централните банки около нулата за необичайно дълъг период, стимулирането на кредитирането чрез програми за изкупуване на облигации, понижаването на нормата на задължителни резерви за търговските банки.

Най-голям дял от световния дълг принадлежи на САЩ с 48.1 трилиона долара и 29.26% от световния дълг, Китай с 25.5 трилиона долара и 15.51% и Япония с 18.2 трилиона долара и 11.07%, като техният дял в глобалния дълг значително надхвърля дела им в световния брутен вътрешен продукт. Пренасочването на капиталовите потоци в търсене на по-висока доходност доведе до повишаване на дела на групата на развиващите се икономики, като дългът достигна 43.9 трилиона долара. Най-голяма стойност имат входящите парични потоци в Колумбия, Мексико, Южна Африка, Турция. Това допринася за стабилизиране на доходността и цените на държавния и корпоративния дълг в тези страни. Но като цяло групата на развиващите се икономики се отличава с най-бързо нарастване на задлъжнялостта в сравнение с другите групи заемополучатели, което поражда и известни опасения от затруднения в обслужването на дълга. Страните с нисък доход също увеличиха емитирането на дълг, достигайки общ размер 1.3 трилиона долара, като разходите за обслужване на дълга в процент от брутния вътрешен продукт са значително над тези, познати от по-ранни периоди. През 2021 г. предстои пик в техните плащания по обслужване на дълга и това може да постави тази група страни в много сложно положение.

Ценните книжа с фиксиран доход, като основен сегмент на капиталовия пазар, претърпяха чувствителни промени в последните десет години, в резултат на променените условия след финансовата криза. Размерът на този сегмент нарастна от 19.5 трилиона долара през 2007 г. на 45.7 трилиона долара през 2017 г. Доходността на облигациите обаче спадна рязко. Докато през 2007 г. 80% от дълговите ценни книжа са осигурявали доходност над 4% годишно, през 2017 г. такива са само 5% от книжата. [3, p. 23] Ниската доходност промени посоките на движение на капиталовите потоци. Изостри се конкуренцията в търсене на доходност, като много от чуждестранните инвеститори, поддържащи в продължение на дълги години големи позиции в американски държавни ценни книжа, се пренасочиха към американски корпоративен дълг, предлагащ по-висока доходност, но и по-висок риск. Докато през 1990 г. инвеститори със седалище извън САЩ са държали 12% от американския корпоративен дълг, през 2017 г. те държат вече 30% от този дълг.

От началото на 21 век равнището на задлъжнялост или на финансов език ливъридж в развитите икономики показва нарастване поради благоприятните финансови условия. Съотношението между глобалния дълг и световния брутен вътрешен продукт при отчитане дела на финансовия сектор е 318%. То представлява намаление с 3 процентни пункта спрямо третото тримесечие на 2016 г., но остава много високо. Съотношението на общия дълг на нефинансовия сектор към брутния вътрешен продукт на развитите страни от Г-20 е 235%, което е по-високо равнище отколкото преди възникването на Глобалната финансова криза от 2007-2009 година.

Нараства задлъжнялостта на домакинствата във всички групи държави, макар че в отделни страни равнището на ливъридж се понижава. От 2008 до 2016 г. отношението на дълга на домакинствата спрямо брутния вътрешен продукт в групата на развитите страни се е увеличило от 52% на 63%. При групата на развиващите се икономики нарастването за същия период е от 15% на 21%. Това повишаване на равнището на задлъжнялост се извършва при ниска инфлация и слаб растеж на доходите, което е неблагоприятно от гледна точка на обслужването на дълга.

## 2 Рискове за финансовата стабилност

Един най-широк поглед върху световната икономика показва, че от 2009 година досега тя се намира в един от най-продължителните периоди на икономически растеж в историята. Има основания да се смята, че икономиката работи над границата на своите производствени възможности, тъй като безработицата в много страни е под своята естествена норма. Въпреки това не се наблюдават признаци на ускоряваща се инфлация. От друга страна, както беше посочено, инвестициите не са големи, а повишаването на производителността е слабо. Причините за съчетаването на тези явления не са напълно изяснени, но могат да се посочат важни демографски, технологични и финансови промени. Във финансов аспект, исторически безпрецедентната стимулираща парична политика и улесняването на достъпа до заем създадоха среда за поддържане на икономическия растеж чрез натрупване на дълг.

Нарастването на дълга в резултат от улесняването на вземането на заем и ниските лихвени проценти допринася за възстановяване на съвкупното тъсене след икономически кризи, но увеличава уязвимостта от промяна на лихвените проценти и евентуално ограничаване на възможностите за рефинансиране. Наблюденията на икономическите и финансовите цикли показват, че в кратък период повишаването на отношението на дълга към брутния вътрешен продукт обикновено е съпроводено с повишаване на икономическия растеж и понижаване на безработицата. Този ефект се наблюдава най-често в продължение на около 5 до 7 години, след което настъпва обратно движение.

В нефинансовия корпоративен сектор високата задлъжнялост е свързана не толкова с нови дългосрочни инвестиции, а с операции за преструктуриране на капитала. Налице е масирано емитиране на нов дълг от фирмите и изкупуване на собствени акции, което спекулативно тласка цените им нагоре. Борсовите индекси достигнаха исторически рекорди и това осигурява голямо нарастване на богатството на собствениците и висшия мениджънт. По този начин обаче цените на финансовите активи се откъсват от икономическия фундамент. [5, p. 11-12] Така става много висок рискът за инвеститори, които са купили акции на кредит, или са използвали акции като обезпечение на кредит. Освен това средата на ниски лихвени проценти повишава пазарния риск на облигациите. Ниските пазарни лихвени проценти понижават купонния лихвен процент на новоиздадените облигации. Това е благоприятно за заемополучателите, но повишава риска за заемодателите, тъй като цените на нисколихвените облигации са по-чувствителни към колебанията в лихвените проценти.

В областта на държавните дългове нарастването на техния размер до определен момент стимулира поддържането на съвкупното търсене, растежа и заетостта, но същевременно оказва натиск върху капиталовите пазари чрез ефекта на изтласкването и влияе отрицателно вурху частните инвестиции. Достигнатият размер на глобалния държавен дълг от 63 трилиона долара е тревожен не само сам по себе си, но и заради неговото неравномерно разпределение. Концентрацията на световния държавен дълг в три страни – САЩ, Китай и Япония, при което само САЩ държат приблизително една трета от него, означава, че тези държави имат голямо влияние върху търсенето и предлагането на капитал на световните финансови пазари и върху неговата цена – лихвения процент. Наличието на асинхронност в паричната политика на водещите държави, която се изразява в това, че САЩ първи започнаха нормализация на паричната политика с увеличаване на лихвените проценти и спиране на програмата за количествени улеснения, доведе до възникване на положителен лихвен диференциал и опасност от резки промени в движението на капиталовите потоци.

Финансовият сектор по подразбиране трябва да осигурява гладко движение на паричните потоци между търсещите и предлагащите парични фондове, но понякога това не се получава и възникват финансови кризи. Поуките от последната финансова криза са, че повечето от финансовите институции посрешнаха кризата с прекомерен и неправилно оценен ливъридж и недостатъчни източници на финансиране. Затова централните банки приеха споразумението Базел 3, което въвежда институционални и капиталови механизми за предотвратяване на системна криза, чрез допълнителни изисквания към банковия надзор и създаване на капиталови и ликвидни буфери. [1, p.43] Данните показват, че банките намалиха чувствително ливъриджа, измерен чрез съотношението активи към собствен капитал. Но в периода след кризата във финансовия сектор на някои държави се натрупа голямо напрежение от гледна точка на доходността на финансовите институции, тъй като ниските лихвени проценти свиха маржа на печалбата и възвращаемостта на собствения капитал.

Увеличаването на задлъжнялостта на домакинствата над растежа на доходите резултира в нарастване на дела на необслужваните кредити и като обща констатация, колкото по-висока задлъжнялост е достигната, толкова по-рязко е изпадането в неплатежоспособност. Освен това по-високият растеж на дълга на домакинствата увеличава вероятността от настъпване на банкова криза, тъй като задълженията на домакинствата са основно към банки. Най-чувствителното огнище за зараждане на риск, произхождащ от сектора на домакинствата, е повишаването на равнището на задлъжнялост за покупка на жилища, което е съпроводено с повишаване на цените на недвижимите имоти. В даден момент високите цени започват да ограничават търсенето и това може да доведе до низходящо движение на цените, което се разпространява бързо в цялата икономика. В такъв случай възниква ефект на богатството, при който домакинствата намаляват потребителските си разходи, когато установят, че цените на техните жилища са се понижили. [2, p. 42-52] От своя страна това води до намаляване на съвкупното търсене и последващо понижаване на производството и доходите, вследствие на което част от ипотечните кредити могат да останат необслужвани и да се зароди финансова криза.

Водеща насока в управлението на финансите сега заема макропруденциалната политика за осигуряване на стабилност на финансовия сектор като цяло, а не просто на отделните инситуции. От тази гледна точка натрупването на дълг над всички исторически познати размери не може да не буди тревога.

В момента световните финанси са изправени пред едно противоречие. От една страна, поддържането на сегашната силно разхлабена парична политика създава условия за нарастването на дълга и възникването на рискове, произтичащи от неговия размер, структура и колебания на лихвените проценти. От друга страна, сред централните банки възникват опасения, че мерките за нормализиране на силно разхлабената парична политика и в частност повишаването на лихвените проценти може да затруднят длъжниците и да предизвикат нова финансова криза. [4, p.xi] Тези опасения обаче не са основателни, защото отрицателните ефекти от затягането на паричната политика са краткосрочни. Ако икономическите субекти схващат мерките на централната банка за нормализиране на паричната политика като дълготрайни, те настройват своите икономически решения и най-вече своите инвестиционни решения съобразно реалната пазарна цена на капитала. Той е най-подходяща среда за постигане на ефективност в икономиката и на устойчив икономичеки растеж.

Същевременно нормализирането на паричната политика има голямо значение за предотвратяването на бъдеща финансова криза. Това се постига преди всичко чрез намаляване на вземането на нови заеми, изплащането на част от старите и по такъв начин ограничаване или намаляване на задлъжнялостта. Макар че по-високите лихвени проценти увеличават разходите по обслужване на дълга, по-важно е, че те намаляват вероятността от инвестиране в неефективни проекти и поемане на прекомерен дълг. Целта не трябва да бъде просто повишаване на лихвените проценти, а свободното им определяне от пазарните сили на търсенето и предлагането без изкривяващото въздействие на централните банки. Иначе това, с което се гордеят централните банкери сега, че при последната финансова криза беше избягната голяма депресия, може да се случи в бъдеще.

## Заключение

Въпреки взетите мерки за здравяване на глобалните финанси, може да се направи извод, че не е преодолян един от основните проблеми при функциониранрто на финансовата сфера – нейната процикличност. Стимулирането на икономиката чрез мерки, които водят до непрекъснато нарастване на дълга водят до това, че неизбежно задлъжнялостта достига равнище, при което се оказва неконтролируема. Затова трябва да се приеме истината, че дълговото стимулиране на икономиката в продължителен период е неустойчиво и опасно и своевременното нормализиране на паричната и фискална политика е с по-малък риск за финансовата стабилност, отколкото продължителното прилагане на мерки, които изкривяват действието на пазарния механизъм.

**ЛИТЕРАТУРА:**

[1] Annual economic report. Bank for international settlements. (2018)

[2] Baron M., W. Xiong. Credit expansion and neglected crash risk. NBER Working paper series. (2016)

[3] Fiscal Monitor. April, 2018. International Monetary Fund. (2018)

[4] Global Financial Stability Report. International Monetary Fund. (2018)

[5] Rey H. Dilemma not Trilemma: global financial cycle and monetary policy independence. NBER Working paper series. (2015)

**Свилен Горанов Тонев**
Шуменски университет „Епископ Константин Преславски“
E-mail: s.tonev@shu.bg

Annual of Konstantin Preslavsky University of Shumen
Faculty of Mathematics and Informatics , vol. XIX C, 2018, pp. 49 - 54

# HISTORICAL, COGNITIVE AND NORMATIVE ASPECTS OF DOCUMENTING COMMERCIAL TRANSACTIONS IN BULGARIA

**SLAVENA G. STOYANOVA**

***ABSTRACT:*** *The documentary validity of the business operations is fundamental for commercial transactions. In order to fulfill its functions to be reliable and with probative force, the document should be presented in a certain form and content. The lawmaker influenced by the changing market conditions, the implemented policy and in relation to the harmonization of the Bulgarian accounting policy with that of the European Union makes a number of changes, which from documentary point of view, in generally related to the reduction of the number and the range of the mandatory requisites.*

***KEYWORDS:*** *documentation, documentary support, documentary validity, accounting documents.*

The documentation of commercial transactions, whose beginning is lost in ancient times, passes through many metamorphoses to reach today's widely used electronic document.

An overview of the historical development of the documentation [1, 2, 3, 4, 5] suggests the following key facts:

• the occurrence of documents related to the verification of the ongoing business processes dates back to 6000 years before the New Age and is linked to the "Papyruses" found in the valleys of the Nile, Tigris and Euphrates rivers, on which periodically the facts of the single business operations and the established after inspection inventory are recorded;

• in the period from 3400 to 2980 BC, an inventory check of movable and immovable property was conducted every two years in ancient Egypt;

• in the period from 2500 to 2400 BC the current recording of economic operations appeared, which was initially manifested through the daily monitoring of the stocks, which were also reflected on documents of their time;

• In the Roman Empire, the documents, and in particular the accounting documents, had legal force, and this quality has been preserved to today as well;

• during the Renaissance when double-entry accounting began to circulate, accounting was defined as an art of recording the facts of economic activity in certain books (registers).

Years of economic development followed which also reflected on the documentation. There is an improvement in the documentary validity of the facts of the reproduction process in adequate in form and content accounting documents, which in general, according to the variants of their manifestation, are classified according to different criteria, the most important of which are:

- according to the time of their compilation and the volume of the information they contain - primary, secondary and registers;

- according to their place of production - internal (made in the enterprise itself) and external (made out of the enterprise but affecting its activity, such as suppliers' invoices and payment documents, received transport documents, etc.);

- according to the types of documented business operations - for reporting on cash transactions, for reporting on fixed assets, for reporting on goods, for reporting on materials, for wage reporting and others.

It is interesting to consider the cognitive documentation which establishes the application of the principle of uninterrupted observation for the purpose of establishment of authenticity and correctness. The cognitive nature of documentary justification is also based on the historization, which is realized by representing the chronology in the economic activity. Through documents, and in particular through the accounting documents, the principle of preservation is applied in its form of keeping the registered facts of the economic activity and their reproduction if necessary. Apart from the historical and cognitive aspect, the documentation of commercial transactions should also be considered in terms of its legal regulation.

The introduction of rules and laws in the commercial activity helps both for regulation of the relationships as well as for preventing crafts and commerce humiliating human dignity. One of the oldest laws that have survived to date is the Babylonian ruler's code that contains criminal, legal and commercial standards, some of which directly related to maintaining a commercial register. According to the supplier and customer settlement code, separate reports were to be kept, and the transfer of cash without a document was considered invalid. The code also contains texts regulating contracts for loans, rentals, sales, fees which are characteristic of today's civil and commercial law.

The legal norms in ancient Greece and Rome also do not overlook commercial relations. Since then, norms which are still valid today have been "pledged" and they are related to the fact that commercial books are accepted as proof of a commercial dispute. A particularly important document for commercial relations since the creation of processes' registries to date is the contract and the guarantees that it should contain based on the applicable legal framework.

In the period of and after the Ottoman domination, the development of the normative system (part of which is translated into Bulgarian) and the issue of accounting handbook in Bulgarian and books on how commercial books should be kept have undoubtedly influenced the development and validation of the documentation of the business activity of the enterprises (including across the Bulgarian lands). In this regard, it should be noted that in the Law of Commerce of the King (1866) [8], in the part Law of Commerce, special attention was paid to the books (registers) that every trader was obliged to keep, namely:

• a daily register, which we think may be named with its current name - a chronological record book, in which daily debts and receivables are recorded;

• copier - Copy Book (Letter book) or to date "Incoming/Outgoing mail archive", in which the letters that the respective merchant has sent and/or received from their partners and/or employees should be entered and mandatory kept;

• an annual stock book in which the trader should enter "their movable goods, debts and receivables".

The books (registers) that were to be kept by each trader had, as they do now, an important role in the reporting process. In addition to registering the business processes in the trader's enterprise, bookkeeping has its significance and probative value in the event of a dispute between traders.

A description of the number, type, content, manner and terms of storage of the commercial books is also present in the Commercial Law of 1897, Chapter Four, Art. 31 to Art. 44 [6].

When referring to the chronology of the current regulatory framework affecting commercial activity, we take into account the fact that the requirements for the content of the registers and the way of their keeping are presented in the operative Turkish Law of Commerce in the territory of Bulgaria from 1849 until 1897, which is abrogated in May 1897 by the first Bulgarian Law of Commerce. Regarding the applied legal framework concerning the activity of traders, it should be pointed out that in 1921, a separate Law of commercial books was adopted, amended and supplemented in 1922. Regulations on the application of the Law were also issued (in December 1921, amended and supplemented in June 1922). These regulations specify who is required to keep registers, which ones are mandatory, how registers should be kept. In the period of 1921 - 1922 practical guides for keeping registers are printed as well, some of which have been preserved till today [1].

Besides the Commercial Law of 1897, which has been amended and supplemented, a number of laws come into force over the years which supplement and develop the framework of the Commercial Law in Bulgaria. These include: the Cooperative Associations Act (1907), the Maritime Trade Act (1908), the Limited Liability Companies Act

(1924), the Markets Act (1983) and others. The Law of Obligations and Contracts of 1950 repealed all the norms of the Commercial Law with a contractual-legal character. After the nationalization of private industrial and mining enterprises in 1947, the practical significance of the Commercial Law in Bulgaria is abrogated by the creation of a single Civil Law in the country. It was only in 1989, with the Decree of Economic Activity, that a process of restoration of the special legal framework for carrying out economic activity began. In 1991, a new Commercial Law [7] was adopted, which has been amended and supplemented on numerous occasions and is currently in force. Chapter Seven of the Commercial Law is devoted to commercial books. In Article 55 (1) and (2) of the Law, it is stated that the regular keeping of commercial books and records (based on the existence of a primary accounting document - note) may be accepted as evidence between traders for establishment of commercial transactions. If the commercial books are kept in violation of the Commercial Law and the Accountancy Act, they cannot serve as evidence in favor of those who are obliged to lead them.

On the basis of the review of the legal regulation of the documentation of commercial transactions, we find that over the years the descriptive nature of the type and content of the registers to be kept by each trader is diminishing, with an increase in references to other laws and/or standards.

**REFERENCES:**

[1] History of accountancy - accountancy in the remote past, Svishtov, 1975

[2] Savova, K. Accounting documents - a reliable tool of not allowing and detecting financial violations // Conference Proceedings, Jubilee International Scientific Conference "Theory and practice of financial crimes", Sofia, 2007

[3] Svrakov, A., Reflections on accountancy in past and present time. "Labour & Right", Sofia, 2014

[4] Spasov, D. Accountancy accross the Bulgarian land, ed. of the Economic Academy "D. A. Tsenov ", Svishtov, 2000

[5] Stoyanov, S., K. Savova. Theories, systems and schools in accountancy, UE "Economy", Sofia, 2015

[6] Commercial law of 1897, approved by Decree No 93 of May 18, 1897, SG, No. 114/1997, repealed by Art. 1. of Decree No. 490 on the repeal of the Commerce Law and the Law on Limited liability companies - art. No. 78 of 1951

[7] Commercial Law, SG, No. 48 of 1991 and subsequent amendments

[8] King's Commercial Code, translated from Turkish by St. D. Popov, Ruschuk Publishing House, the copy - book of the Danube region, 1866г.

**Slavena Stoyanova**,
Faculty of Mathematics and Computer Science
Department “Economics and Mathematical Modelling”
Konstantin Preslavsky University of Shumen, Bulgaria
e-mail: slavena.stoyanova@shu.bg

Годишник на Шуменски университет „Епископ Константин Преславски“
Факултет по математика и информатика, том XIX C, 2018, стр. 55 - 80

# AN ATTEMPT AT DEFINING THE CONCEPT OF MANAGEMENT CULTURE

**KORNELIYA T. TSONEVA**

***ABSTRACT**: This publication analyzes the most general problems of the management culture: its essence and content, its main components, the factors that influence it, the processes of its formation and improvement. In this sense, the subject of the research is not a separate aspect of the phenomenon, but the study of the question in its integrity. The object of the analysis is the management culture of the organization.*

***KEYWORDS**: culture of management, management/organizational culture, management, culture*

# ОПИТ ЗА ДЕФИНИРАНЕ НА ПОНЯТИЕТО УПРАВЛЕНСКА КУЛТУРА[*]

**КОРНЕЛИЯ Т. ЦОНЕВА**

Управлението възниква в дълбока древност като човешка дейност, целяща координиране и интегриране на усилията на изпълнителите за постигане на поставената цел. В съдържателен план то е социален феномен, който като всеки друг такъв има културно измерение. Културата оказва непосредствено въздействие на всички сфери от дейността на организацията, в т.ч. и на управлението [10].

---

[*] Настоящата статия е финансирана от Фонд „Научни изследвания” към Шуменския университет „Епископ Константин Преславски“ по проект № РД-08-126/07.02.2018 Инвестиционно планиране и инвестиционни рискове в съвременни условия

Динамичните обществени промени в нашето съвремие налагат особената роля на ръководителите от всички нива на управленската йерархия. Сложността и многообразието на протичащите процеси диктуват необходимостта от адекватни реакции, изработване и реализация на стратегии за управление в нетрадиционни условия и несигурна среда. Пазарната икономика изисква нов тип мениджъри – такива, които умеят да поемат премерен риск, да вземат бързи решения, да носят отговорност. Нарастващите изисквания към тях са свързани и с притежаване на високо равнище на управленска култура, което прави проблема особено актуален. Такъв го прави и фактът, че „постоянното усложняване на управленските процеси изискват управленските функции да се осъществяват от професионалните ръководители съвместно с усъвършенстването на управленската култура“ [24].

Управленската култура е достатъчно сложен обществен феномен, който характеризира поведението и отношенията на хората в малка социална група и в същото време се проектира върху всички други явления в по-голямата общност. Културата на управление е своеобразен индикатор за степента на цивилизованост на отношенията в обществото [17].

Проблемите за културата на управленската дейност, за нейното формиране и поддържане получават все по-широк резонанс в обществото. Установяването на нова култура на управление представлява интерес не само за академичните среди и професионалните ръководители, но и за всички, които са в качеството на обект на управление.

В деловия свят културата на управление се възприема като един от важните начини за постигане на успех и едновременно като негов качествен показател [12]. Тя се явява фактор за конкурентоспособността и ефективността на управление на организацията.

Границите на управленската дейност се разширяват. Днес е трудно да се сведе нейния анализ до избора и съблюдаването на принципите на управление, или до стила и методите на работа на ръководителя. Това са само част от проявите на управленската култура. За да бъде изучена, тя трябва да се изследва в нейната цялост – от съдържателните аспекти, през многообразните й изяви, до формирането и развитието й.

Ролята на културата като фактор за решаване на проблемите в управлението непрекъснато се увеличава. Основанията за това, които учените посочват, се изразяват в следното: [9]

- Социално-културните регулатори на обществения живот, поради изискванията на информационната революция сред другите регулатори (икономически, юридически, политически) придобиват все по-голяма значимост.
- Те се превръщат в голяма степен в гръбнак на всички взаимодействащи сили на обществото и проникват в дейността на всеки негов елемент, разширявайки по този начин своята зона на влияние.
- Делът на интелектуалната собственост в БВП непрекъснато нараства, достигайки в развитите страни до 50% от общия обем, което повишава значимостта и отговорността на обществото за рационално използване на неговия главен ресурс – интелектуалния, част от който се явява и управленския ресурс.

В тази връзка е необходимо всестранно осмисляне на феномена *управленска култура*, неговото опознаване и осъзнаване, даване на оценка за неговото състояние.

Анализът на научната литература показва, че към настоящия момент е натрупан определен обем от знания, необходими за постановка на проблема за управленската култура. На него са посветени множество публикации, съществуват голямо количество методи и аспекти на изследване, но еднозначно приет общ подход не е постигнат. Многобройните публикации за управленската култура позволяват да се направи извод, че в съвременното общество съществува обективна потребност от теоретична разработка и нейното прилагане в реалната практика, на научнообоснован модел на управленска култура [19]

В публичното пространство и в научната литература за управленската култура има много и разнопосочни мнения. Специалистите се стремят не в еднаква степен към нейното усвояване и развитие, липсва им еднаква мяра за нея. И теоретици, и практици влагат в понятието различно съдържание.

Наблюдава се и терминологично многообразие от типа на „управленска култура“, „култура на управление“, „култура на мениджмънта“, „култура на управленския труд“. Между тях в строгия смисъл на думата има определени нюанси, но интегриращите прилики са по-забележителни. Това е и причината в по-голямата си част авторите да ги възприемат като синоними.

Важно за изследването е въвеждането на ограничения. Понятието „култура на управление“ не е тъждествено нито на „управление на/в културата“, нито на „култура в управлението“. Термините имат своите пресечни точки, но несъмнено различията са съществени. Те обаче не са предмет на настоящото изследване.

В научната литература има изобилие на определения за управленска култура. Множеството дефиниции създават затруднения в опитите да се класифицират и да се разкрият съществените особености на феномена. При повечето от тях липсва еднозначно разбиране. Това може да се обясни с комплексния характер на явлението, към чието изучаване учените прилагат своеобразни подходи: философски, антропологически, социологически, икономически и т.н. В този смисъл съдържателните характеристики и елементи на управленската култура са обект и предмет на изследване от много и разнородни научни области. Паралелно с това обхватът на изследванията е хетерогенен – от личностно, през организационно, до национално и интернационално равнище.

Разнообразието на концепциите за същността на управленската култура се предопределя от различието на гледните точки при изследването. Освен това при тълкуването им се използват независими методологични подходи. Някои формулировки са по-общи, други – по-конкретни, с акцент върху отделни признаци.

Прегледът на научните публикации показва, че отделните автори влагат специфичен смисъл и съдържание, сочат разнообразно предназначение. Повечето от тях определят управленската култура чрез градивните ѝ елементи:

- Управленската култура е съвкупност от ценности, нагласи, убеждения, ориентации, изразявани чрез символи, начини за въздействие и служат за оптимизиране на управленския опит и регулиране поведението на всички членове на общността [13].
- Под управленска култура се разбира съвкупност от знания, ценности и модели на поведение на субектите на управление, които осъзнати в различна степен формират отношение към самата управленска дейност и се манифестират в нея [19].
- Управленската култура е система, състояща се от ценности и определени от тях методи за осъществяване на управленската дейност, изразяваща се в определени функции [18].

От цитираните становища е видно, че някои учени отъждествява управленската култура със съвкупност от знания, ценности, нагласи и др. Подходът елементаризира понятието, като го свежда само до механичен сбор от съставни части. По-добро решение е разглеждането на феномена като система, защото предполага взаимна обвързаност между елементите, т.е. промяната на един елемент въздейства на останалите. Такава релация обаче, не е търсена от авторите. По-скоро те възприемат управленската култура в устойчиво състояние.

В подобно статично състояние разглеждат управленската култура друга група от изследователи. Те я идентифицират с краен резултат или с константна величина:

- Културата на управление отразява практически постигнатото равнище на управленска дейност към даден момент [6]
- Културата на управление е съвкупност от резултатите на организацията и реализиране на процеса на управление, организацията на управленския труд и използваните техники на управление. Тя включва четири взаимосвързани и взаимозависими елементи: култура на управленския екип, култура на управленския процес, култура на условията на труд, култура на документацията [22].
- Културата на управление е комплексна константа, включваща множество съставни елементи. В нея органически влизат концепти като „култура на личността“, „предприемаческа култура“, „организационна култура“, „делова култура на ръководителя“, „професионална култура“, „корпоративна култура“ и др. [7].

Много е трудно да се приеме последната теза от гореизброените. Според нея професионалната култура е само един от елементите в структурата на управленската култура. При положение, че като цяло се коментира управленския екип, то управленската култура следва да се разглежда като вид професионална култура. За нас двете понятия се съотнасят помежду си като част към цяло. Ако има изключения, то те касаят ръководители от най-ниското ниво на управленската йерархия, чийто основни функции са в областта на друга професия. Тази специфика на управленската култура може да се обясни с въвеждането на йерархични нива на управленската култура в организацията. Това обаче може да бъде предмет на следващо изследване на автора.

Сложно е да се съгласим и с идеята, че организационната култура е компонент от управленската. Коментари за тази релация се правят по-долу в изложението. Смущаващо е и разглеждането на организационната култура и корпоративната култура като два отделни елемента. В управленската литература организацията се приема като съзнателно устойчиво обединение на хора с институционален характер, заемащо определено място в обществото и предназначено да изпълнява определени функции [4]. Целта на това обединение е извършване на някаква съвместна дейност, която е на основата на общественото разделение на труда. Всяка организация има име, цели, сфера на дейност, персонал, начин на работа и т.н. В този смисъл терминът „организация" се отнася еднозначно и за фирми, и за корпорации, и за компании, и за банки, и за образователни учреждения, и за неправителствени организации и т.н. Това обяснява нашето мнение, че разглеждането на организационната и корпоративна култура като два различни феномена е неоснователно.

Свързвайки управленската култура с равнището на управленската дейност, авторите акцентират върху рационалната организация на тази дейност. Същевременно те игнорират нейните етични и психологически аспекти.

Неудовлетворително е и становището, което възприема управленската култура като константа. Културата на управление се изгражда в резултат от действието на вътрешни и външни променливи детерминанти и е непрекъснато развиващ се процес.

Част от учените визират в нея степента на овладяване на знания, методи, ценности, отношения:

- Управленската култура на организацията включва усвояване на специфичния понятиен апарат, знания, методи, основни ценности на социология на културата [14].
- Управленската култура може да бъде разбирана като единство от управленски знания, чувства, ценности, управленски и организационни отношения на даден етап от управленската дейност [9].

Тази категория автори извежда на преден план квалификацията, градивността и креативността на ръководителите. Усвояването на управленски компетентности е продължителен процес, който се развива във времето. Именно това е основанието на изследователите да дефинират управленската култура на даден етап от управленската дейност или към определен момент. Подходът е контрапункт на предишния и изяснява феномена в динамика.

Някои представители на научната общност се придържат към пределно общи дефиниции:

- Културата на управление представлява специални научни знания, технологии, организираност, етика и управленска дейност, осъществявана с цел повишаване на благосъстоянието, постигане на прогресивно и безопасно развитие на човека, обществото, държавата и света, регулиране на обществените и международни отношения съобразно човешките интереси. Тя се явява показател за качеството на управленската дейност и нейните резултати [15]

Други поддържат твърде конкретни формулировки, свеждайки управленската култура до организационната култура:

- Под управленска култура могат да се отнесат различни елементи на духовния и материален живот. Това са установените традиции, морални ценности, стил и стандарти на поведение, придържане към етичен кодекс при изпълнение на задачите, обусловени от длъжностните характеристики [16].
- Управленската култура на ръководителя е система от усвоени в процеса на управленска социализация на личността норми и ценности на организационното поведение [24].

Много е трудно тези определения да се приемат. Понятията *управленска култура* и *организационна култура* съжителстват като скачени съдове в сложна система. Те се съотнасят като част към цялото. Централна роля при създаването на организационната култура имат основателите и ръководителите на организацията. Те въвеждат значимите ценности в съответствие със собствените си представи за това каква би трябвало да бъде организацията. Ценностите се сътворяват от управленския екип още в първите моменти на съществуването на организацията и се предоставят на персонала за заучаване и съблюдаване. Формирането на организационната култура изисква системни и целенасочени управленски усилия. В основата на това начинание стои управленската философия. Без наличие на съответната управленска култура и управленска воля за изграждане на организационна култура, която да стане носител на ключовите ценности на управленската философия, това не би могло да стане. В този смисъл първоизточникът в скачената система е управленската култура. Тя е нейното ядро, нейният синтезиран еквивалент. Образно казано, управленската култура не само се проектира в организационната култура, тя я генерира и мултиплицира. Нормите, ценностите, традициите и ритуалите няма защо да бъдат усвоявани от ръководителя. Те са създадени от него. Ето защо е абсурдно да се дефинира управленската култура като усвояване на организационната култура. Усвояването касае сътрудниците на организацията и се свързва с процеса на тяхното приспособяване към организационната култура, наричан социализация.

Подобен на предходния подход обвързва управленската култура с общуването:

- Управленската култура в развит вид представлява цялостна система от взаимодействие между хората на всички равнища на служебни отношения. Най-важният елемент на взаимодействието е общуването. Управленската култура включва правилата за делово общуване [16].
- Управленската култура е система от правила на взаимодействие на ръководителите с персонала [21]

Цитираните автори отъждествяват управленската култура с деловата култура на всички равнища в йерархията на организацията. Те я ограничават до нормите на поведение при общуване на хората в процеса на работа, като не излизат извън рамките на служебния етикет. Съблюдаването на деловия етикет е само една от формите на проявление на управленската култура. Несериозно е тяхното припокриване в съдържателно отношение.

Не са малко авторите, които отъждествяват управленската култура с управленската етика:

- В широк смисъл терминът се употребява за характеризиране на организационно-технологическите условия и традиции в управлението, професионалното и нравственото развитие на ръководителя. В тесен смисъл значението на понятието може да се тълкува като служебна етика на ръководителя [20].

Привеждането на съдържанието на управленската култура до това на управленската етика е крайно посредствено. Управленската култура е много сложна субстанция, в която безусловно има място етичния компонент. Абсолютизирането му обаче е не само неприемливо, но и вредно.

Има автори, които разглеждат управленската култура като функция на културата на обществото:

- Управленската култура е част от общата култура [11].
- Управленската култура се разглежда като част от общата култура на обществото, която оказва влияние на субектите на управление [18].
- Управленската култура включва елементи на световната и национална култура, които играят роля на ценностни ориентири на управленската дейност, както и нейните методи и средства, ръководещи дейността на субектите на управление в съответствие със закономерностите на развитие на социума [7].

Има и такива, които я свеждат до културата на личността, до индивидуалното разбиране, решение и поведение на ръководителя:

- Управленската култура се отнася до роли, статус, начин на живот, модели на поведение и мислене на ръководителя и обхваща инструменти и методи, осигуряващи ефективна адаптация към дейността, предполагаща планиране, прогнозиране, координиране дейността на хората, вземане на решения, подбор и психологическа оценка на персонала, отчетност и контрол, обезпечаване на обучение, стимулиране и мотивиране на персонала [23]

- Управленската култура може да се представи като съвкупност от типични за мениджъра ценности, норми, гледни точки и идеи, които съзнателно формират образец на неговото поведение [20].

В литературата се наблюдава и комбинация от двата подхода. При това съчетание на управленската култура се гледа като на проекция на общата култура, поставена в зависимост от желанията, нагласите и възможностите на субекта на управление:

- Културата на управление се разбира като умение на социалния субект да използва съществуващите обществени и духовни ценности за целите на оптимизацията на своята дейност [8].

Очевидно, определенията за управленската култура варират от елементарни и разбираеми, до сложни и абстрактни. Общ недостатък на всички тях е, че авторите виждат основната ѝ същност в отделни нейни сегменти, страни или проявления.

Изложените формулировки дават представа за различията във вижданията не само относно природата на управленската култура, но и тези относно нейното съдържанието, относно съвкупността от компоненти, които попадат в нейния обхват. Множеството гледища са твърде специфични и несъпоставими.

Една категория автори приема за основни елементи на управленската култура, елементите на организационната култура – ценности, нагласи, убеждения. Има вариации на тази теза. Част от изследователите прибавят към изброените компоненти и определените от тях методи. Други присъединяват междуличностни отношения, етика и модели на поведение.

Различно от това е становището на група автори, които обособяват специфични елементи на управленската култура, а именно: култура на управленския екип, култура на управленския процес, култура на условията на труд, култура на документацията. Близка до тази позиция е идеята за разграничаване на следните елементи: култура на личността, култура на предприемачеството, организационна култура, делова култура, професионална култура и др.

Своеобразно е схващането, което приема за елементи на управленската култура: резултатите на организацията, реализиране на процеса на управление, организацията на управленския труд и използваните техники на управление.

Различията в авторовите позиции се проектират и върху водещата роля, основната функция на управленската култура. Някои изследователи я свеждат до личностно равнище, други – до организационно, трети – до обществено. Едни акцентират на усвояването на знания, ценности и отношения. Други наблягат на адаптиране, на формиране на отношение към самата управленска дейност или образец на поведение на ръководителя. Трети слагат ударение върху регулиране поведението на всички членове на общността или регулиране на обществените и международни отношения съобразно човешките интереси.

Твърденията за основната функция на управленската култура, заложени в изброените по-горе дефиниции, на принципа от частното към общото, могат да бъдат изразени така:

- усвояване на специфични знания, методи, ценности и организационни отношения;
- формиране на отношение към самата управленска дейност;
- формиране на образец на поведение на ръководителя;
- ефективна адаптация към дейността, предполагаща планиране, прогнозиране, координиране дейността на хората, вземане на решения, подбор и психологическа оценка на персонала, отчетност и контрол, осигуряване на обучение, стимулиране и мотивиране на персонала;

- ценностен ориентир на управленската дейност;
- оптимизиране на управленския опит и регулиране поведението на всички членове на общността;
- оптимизация на управленската дейност;
- повишаване на благосъстоянието, постигане на прогресивно и безопасно развитие на човека, обществото, държавата и света, регулиране на обществените и международни отношения съобразно човешките интереси.

Общото в изброените мнения е разбирането за връзка между управленската култура и оптимизирането на управленската дейност. Различията се пораждат от факта, че част от учените не правят разлика между цел и средство, между израз и съдържание.

Целта на настоящата работа е да се покаже теоретичната значимост на изучаваното явление чрез изясняване на същността на управленската култура, разкриване на нейната роля и динамика.

Обект на анализа е управленската култура в организацията

За терминологичното изясняване на това многопластово явление следва да се анализират съставните на словосъчетанието *управленска култура*. Културата е многопланова и сложна категория, за която има разнообразни определения, разглеждащи явлението от различни негови аспекти. В Българския тълковен речник културата има много значения [2]. За целите на изследването се придържаме към второто: наличност на познания, степен на развитие изобщо или в отделна област. В Речника на чуждите думи в българския език освен горното тълкуване, има изведени и други, а именно: 1. степен на образованост, знания и възпитание, присъщи на образования човек; 2. степен на развитие, висока степен на развитие;

усъвършенстване.

В настоящото изследване културата се възприема като степен на развитие на една или друга дейност на човека и на самия човек (степен на умение да се извършва тази дейност). В зависимост от конкретната област, тя може да бъде различна. В този смисъл културата на управление е вид култура в рамките на конкретната човешка дейност – управлението. Следователно, нейната същност и съдържание могат да бъдат изучавани като се изхожда от особености на управлението като дейност.

Опитът за точно определение на управленската култура се сблъсква и с трудности, произтичащи от многозначността на понятието управление.

Според М. Андреева самото „управление“ е понятие, което има различни аспекти на разглеждане, поради което в различните дефиниции за него се влагат различни нюанси, различни акценти. То е както избор на посока, в която да работи и да се развива дадена организация, така и въздействие на ръководителя върху подчинените, така и специфичен вид дейност в обществото, така и вид труд в предприятието, така и процес във времето и т.н. [1]. По-нататък този феномен ще се приема най-вече като дейност, като сложна система от координирани мероприятия, насочени към постигане целите на организацията. Дейността на ръководителя следва да се разглежда като вид професионална дейност, която се реализира чрез изпълнение на основните функции на управление: планиране, организиране, мотивиране и контрол.

Управлението изисква поливалентна, широкопрофилна подготовка на ръководителите. Те трябва да имат задълбочени познания по разработването и изпълнението на бизнес-стратегията на организацията; по състоянието, тенденциите и закономерностите на паричния, капиталовия, стоковия, инвестиционния, валутния и трудовия пазар; по състоянието и тенденциите в развитието на външната и вътрешна социална среда; по проблемите на икономиката, организацията и управлението на труда, на планирането и финансовата дейност на организацията, на икономическото, трудовото и социалното законодателство и др. [5].

Работата на ръководителя в съвременните организации се състои в управление не само на производството, но и в ръководството на хората. Той трябва да познава обекта на управление – работниците и служителите в трудовия процес. За да се достигнат груповите цели е необходима координация в дейността на много хора. Всеки ръководител има необходимите знания в икономическата, техническата и др. области. Това обаче е недостатъчно за да се управляват ефективно хората. Ефективното управление предполага знания за закономерностите на човешкото поведение.

Анализът на понятията ясно показва, че културата на управление в организацията може да се разглежда в тесен и широк смисъл. В тесен смисъл понятието изразява взаимоотношенията между ръководството и организацията. В широк смисъл явлението е по-сложно и многостранно: обхваща и материалните форми на култура, които се използват в управлението, както и процесът на тяхното създаване и реализиране в управленската практика; характерните черти на самите хора в управленската сфера, намиращи се на определено равнище на своето духовно развитие, притежаващи съответни управленски знания, умения и навици, необходими им за творческо реализиране на поверените им функции.

Съответно на факта, че управлението е активен процес на интервенция на ръководителя в нормалното функциониране и развитие на организацията, управленската култура може да се определи като процес на разкриване и развитие на възможностите на управленската дейност; като процес на обогатяване и усъвършенстване на тази дейност. Тя може да се разглежда като сложна система, която се формира и развива. Поради това управленската култура най-пълно и точно характеризира състоянието на управленската дейност в нейното динамично развитие.

Даденият феномен следва да се разглежда като:

- процес, намиращ се в постоянно развитие;
- сложна самоорганизираща се система, която се изменя съобразно новите условия (вътрешни и външни);
- показател за качественото състояние и развитие на управлението в организацията; управленската култура изразява комплекс от представите на ръководството за целите на управлението (базирани на управленските ценности), състоянието на управленския екип и на организацията, в която тя се проявява, включително взаимоотношения между членовете на управленския екип и между ръководители и изпълнители;
- процес на придобиване на професионализъм от страна на ръководството.

От изложеното става ясно, че на управленската култура не трябва да се гледа като на статично явление. Тя постоянно се развива, коригира и усъвършенства. На нея трябва да се гледа като на професионално необходимо качество, придобивано от ръководителя в процеса на обучение и реалната управленска дейност в организацията.

Управленската култура може да се разглежда като синоним на професионализъм в управлението. Тя очертава качеството на управленската дейност. Професионализмът характеризира трудовата дейност на човека, владеещ комплекс от специални теоретични знания и практически умения, придобити в резултат на специална подготовка и опит.

Следва да се отбележи също, че на управленската култура не трябва да се гледа като на монолитен феномен. Пълно единство и абсолютно признаване е невъзможно поради факта, че:

- има множество от групи сътрудници, изискванията към които се различават по функциите, които те изпълняват. Трудно се изисква еднакъв модел на поведение от страна на ръководството, а и не е нужно;
- в организацията работят хора, различни по своя светоглед, ценности, възпитание, възраст и социално обкръжение. Не за всички работата в организацията е мечтата на живота им. Понякога тя е просто насъщна необходимост. Поради това те ще възприемат и следват в различна степен управленската културата в организацията.

Все пак новите условия, повишаването на образователното равнище и зрелостта на ръководителите дават импулс за развитие на управленската култура. Организациите не само променят отношението си към този феномен, но и заемат активна позиция за формирането, промяната и използването ѝ като фактор за повишаване конкурентоспособността си.

За да бъде успешна управленската култура на организацията, тя трябва да бъде подкрепена и управлявана от висшия мениджмънт. Необходимо е да има стабилно лидерство, което да утвърждава културата чрез своите действия, да демонстрира себеотдаване, а не само усърдие. Чрез социално взаимодействие създадената управленска култура следва да бъде пълноценно усвоена от всички членове на управленския екип. Тя трябва да стане отличителен белег на ръководителите от всички йерархични нива. По този начин управленската култура на ръководителя ще се проектира и ще моделира управленската култура на организацията. Тук може да се търси връзка между управленската култура и организационната култура. Факт е, че ръководителите създават и разпространяват организационната култура. Мениджърите управляват процеса, наречен „социална архитектура“, т.е. те обединяват сътрудниците около ценностите и нормите на управленската култура.

Трудно може да се намери достатъчно точен критерий за отграничаване на това динамично явление в организацията. В по-общ план управленската култура се отнася до работата на целия управленски екип. В по-конкретен порядък – до отделния ръководител. И в двата случая се изразява в начина, по който се извършва управлението, стилът на осъществяване на служебните отношения, нагласата и подходът към хората, към задачите и организацията като цяло. На нея трябва да се гледа като на интегрално качество на ръководителя, проявяващо се във формиране на специални знания, умения и навици за творчески стил на управление. Тъй като феноменът се отнася до професионални ръководители може да се заключи, че управленската култура е вид професионална култура. Управленската дейност следва да се разглежда като професионална дейност на съвременния ръководител, който трябва да умее да работи в екип, да има качества на организатор и ръководител, да е готов за адаптация на своите знания и навици към дейността на различни равнища на служебната йерархия, което предполага усъвършенстване на самоуправлението.

Професионалната култура е специфично проявление на културата в определен вид професионална дейност. Според Р. Милкова и Л. Милков овладяването особеностите на професионалната култура зависи от степента на владеене елементите на общата култура, от възпитанието, образованието и личностното развитие. В професионалната култура на личността се вплитат личната култура и професионалните качества, степен на подготвеност за професионалната дейност, умения за общуване с колегите – ръководители и подчинени [3].

Осмислено, това съдържание може да се сведе до следните няколко пункта:

- наличие на природна даденост с лидерски качества;
- наличие на добра обща култура и възпитание;
- наличие на висока общообразователна подготовка;
- наличие на професионална квалификация в областта на управлението;
- постигнато добро ниво на личностно развитие;
- стремеж към самоусъвършенстване;
- постигнато добро ниво на професионално развитие в управленската дейност.

Управленската култура на ръководителя е комплексна характеристика на неговата дейност, отразяваща неговите личностни черти и качествени особености. Тя включва съвкупността, структурата и дълбочината на знанията; светогледа, възпитанието и общата култура; жизнения и професионален опит. Според някои автори елементите на управленската култура като вид професионалната култура се изграждат в личността още от подготвителното учебно заведение, но истински тя се проявява в пряката професионална дейност [3].

Целият този фундамент пречупен през индивидуалните личностни различия моделира индивидуалното трудово поведение на ръководителя. Индивидуалността на човек се определя от неговия жизнен опит, пречупен през особеностите на личността и проявяващ се чрез неговото отношение към обкръжаващите явления и спецификата на неговите психични функции.

Управленската култура се свързва с поведението на ръководителя, а често се и отъждествява с него. Представата за поведение се свързва със съвкупност от действия и постъпки, оценявани от гледна точка на установените, приети в обществото норми и правила. Човешкото поведение е обусловен от условията на средата и от особеностите на индивида начин на осъществяване и постъпване. То е трайна система от действия или поведенчески актове, която осъществява връзка на индивида със заобикалящия го свят. Поведението е не само реагиране на външни и вътрешни въздействия, а е преди всичко активна дейност, свързана със социално-психичната структура на личността, с отношения на личности и групи към различни обекти, цели и средства за тяхното реализиране.

Индивидуалното трудово поведение е съзнателно регулируем комплекс от действия и постъпки на сътрудника, свързани с неговите професионални възможности и интереси, и съвпадащи с дейността на организацията. Това е процес на саморегулация и осигурява определена степен на личностна идентификация [4].

Поведението на индивида е резултат от взаимодействието на индивидуалните особености на човека с околната среда. То се определя от редица вродени фактори, свързани с личностните свойства (личност, възприятие, ценности, способности), както и от фактори на външната среда, които не са под контрола на личността. Околната среда е това, което заобикаля човека по време на работа (организационна структура, проектиране на труда, стил на ръководство, правила, награди, санкции и т.н.) и извън работа (семейството, финансово състояние, почивки, хоби и т.н.). Поведението на личността е резултат на непрекъснатото взаимодействие на тези две категории фактори.

Управленската култура се отнася не само до уменията да се прилагат основните принципи на управление и норми на поведение, но също така да се знае кога, къде, как и по отношение на кого те да се използват. В този смисъл тя трябва да се разглежда в релация с управленската компетентност.

В литературата не отскоро има спор за разликата между компетентности и компетенции. Този спор не е предмет на настоящото изследване. Компетенцията е успешно проявено съчетание, съвкупност от знания, умения, нагласи и поведения на сътрудника за постигане на резултати в дадена професионална роля и в определена организация. Съгласно дефиницията на

TENCompetence компетенцията се разглежда като измерима способност на даден човек да действа качествено и резултатно за справяне с конкретни проблеми, събития или задачи, които възникват в конкретна ситуация и област.

В обема на понятието управленска компетентност следва да се включва:

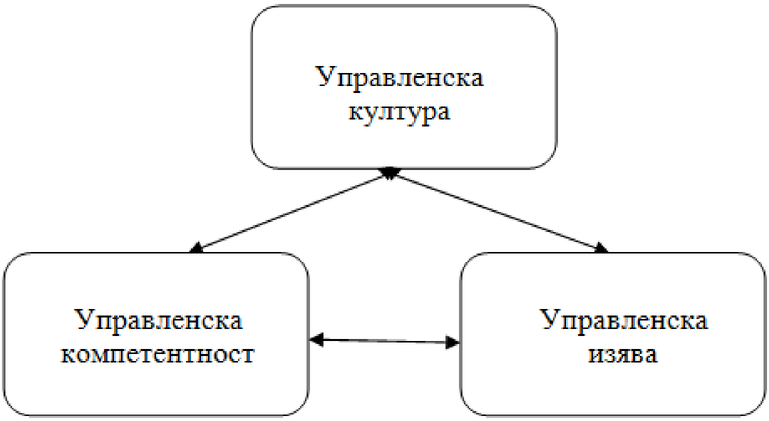
- познаване на управленските принципи, методи и модели;
- познаване на закономерностите в човешкото поведение;
- прилагане на комбинации от принципи, методи и модели на управление по най-подходящия начин съобразно факторите на вътрешната и външна среда на организацията под формата на стил на ръководство.

Управленската компетентност е много широк кръг от компоненти с нееднаква относителна значимост по отношение поведението на ръководителя.

Според нас, връзката между управленската култура и управленската компетентност може да бъде представена със схемата, показана на Фиг. 1.

Според автора, управленската изява е умението да се прилага управленската компетентност във всяко управленско въздействие по такъв начин, че да се постигне успех при неговия завършек.

В заключение може да се обобщи, че управленската култура е основна предпоставка, важен фактор за ефективното управление на организацията, която се намира в една динамична и трудно предсказуема среда, каквато е пазарната икономика. Заедно с организационната култура има пряка връзка с повишаване на конкурентните предимства на организацията. От нейното състояние зависи ефективното управленско поведение, реализиране на стратегиите, подобряване качеството на трудовия живот, повишаване привлекателната сила на организацията за хората, постигане на тяхната ангажираност и привързаност.




Фиг. 1 Модел на управленска култура

Границите на професионалната дейност „управление“ се разширяват непрекъснато, поради което е трудно управленската култура да се ограничи до стратегията за управление на човешките ресурси или до стила на ръководство. Тя е по-широко понятие от понятието „стил“ и има многообразни проявления. Включва степента на овладяване и използване на управленски знания, пълнотата на тези знания, технологията на управление, рационалната организация на труда, спазване на юридически и морални норми и т.н. В този порядък в управленската култура могат да се изведат и нравствен компонент, и правен компонент, и организационен компонент и т.н.

Ако поемем риска за изчерпателно изброяване, ще сгрешим. Ще сгрешим и ако се опитаме да очертаем нейната структура. В нея може да се впишат както общата култура на ръководителя, така и рационално разпределение на работното време, култура на работното място, култура на документооборота, култура на речта, култура за организиране и т.н. или професионалният дълг, професионалната съвест, професионалната чест в която се интегрират престиж, компетентност и авторитет.

Поради това, ние се придържаме към представения по-горе модел. За нас управленската култура не е само качествено състояние и развитие на управленската дейност, включващо съвкупност от способности, знания, умения и управленски опит. За нас тя е и качествен показател, и критерий за професионализъм, и непрекъснат процес на оптимизиране на управленската дейност и усъвършенстване личността на ръководителя. Управленската култура е сила, която наред с организационната култура осмисля живота на хората и създава стабилност в организацията. Заради това обществото като цяло, организациите и образователните институции трябва да осмислят нейната нарастваща роля и да насочат усилия към нейното пълноценно формиране и развитие.

**ЛИТЕРАТУРА:**

[1] Андреева, М. Основи на управлението. В., 2003.

[2] Български тълковен речник. С., 1994.

[3] Милкова, Р. и др. Професионална култура и общуване. С., 2014

[4] Тодорова, К. Организационно поведение. Ш., 2013 // http://cdo.shu.bg/course/view.php?id=185

[5] Шопов, Д. и др. Управление на човешките ресурси. С., 2003.

[6] Ауезова К.Т. Учебно-методическое пособие по дисциплине Менеджмент. Астана 2011 77 с.

[7] Беленкова О.А. Роль базовых ценностей мировой и национальной культуры в социальном управлении // Вестник Башкирского университета. – 2012. – Т. 17, № 1 (1). – С. 598–601.

[8] Бикметов Е. Ю. Культура управления как объект социологического познания // Социологические исследования. 2014. № 9. С. 69-72

[9] Голобородько Л.О. Культура управления в системе взаимоотношений персонала организации // III Республиканской научно-практической интернет-конференции // http://www.pac.by/ru/general-information/structure/institut-gos-sluzhbi/fakultet-podgotovki-perepodgotovki/kaf-psih-upr/materiali-3-conferencii/

[10] Егоров Ю.Л. Философия управления. М., 2002, 299с.

[11] Захарова Т.И. Д.Е.Стюрина Социология и психология управления Москва 2008 – 200 с.

[12] Кроль Л.М. Е.А. Пуртова Управленческая культура организаций Москва, 2004 , 400 с.

[13] Лизина Н.В. Управленческая культура как качественный показатель управленческой деятельности // Ползуновский вестник № 1 2006 с.231 – 234. Барнаул

[14] Лысиков М.В. Социокультурная концептуальная модель формирования репрезентативной управленческой культуры организации // Вестник СГТУ, Саратов, 2011, № 1, том 1, с. 298 – 303.

[15] Мамедов Ф. Культура управления. Баку, 2013, 779 с.

[16] Морозова Г.А. Управленческая культура и её ценностные основания // Журнал научных публикаций аспирантов и докторантов Курск № 2, 2015 // http://jurnal.org/articles/2015/sociol1.html

[17] Павлова Е.В. Управленческая культура: понятие, сущность, основные черты // «Молодой учёный» . № 10 (90) . Май, 2015 г. Казань с.1059 – 1061

[18] Павлова Е.В. Управленческая культура как объект методологического анализа // Павлова Е.В. Управленческая культура: состояние, проблемы, перспективы развития // Идеи и Идеалы № 1(27), т. 2 • 2016 с. 146 – 152 Новосибирск

[19] Савельев И.А. Структура управленческой культуры как предметная область современной социологии управления // Исторические, философские, политические и юридические науки, культурология и искусствоведение. Вопросы теории и практики Тамбов: Грамота, 2015. № 4 (54): в 2-х ч. Ч. II. С. 153-156.

[20] Салахова Л.Р. Этика и культура управления Казань 2013 64с.

[21] Харитонова П.В. Анализ взаимосвязи и модель исследования предпринимательской, управленческой и организационой культуры // Вестник НГУ, Серия: Социально-экономические науки.2011. Том 11, выпуск 3, с.115 – 120.

[22] Шатун Вл.Т. Менеджмент организации. Николаев, 2008

[23] Эрдынеева К.Г. А.О. Филиппов Управленческая культура как детерминант адаптивного поведения субекта деятельности // Успехи современного естествознания. Москва, № 1 2009, с. 67 – 69.

[24] Яфаркина К. Е. Управленческая культура руководителя: современный тип руководителя // Духовная ситуация времени . Россия XXI век | № 2 ’ 2016 с.74 – 76. Курск

**Корнелия Тодорова Цонева**
Месторабота: Шуменски университет „Епископ Константин Преславски“
E-mail: k.todorova@shu.bg

Годишник на Шуменски университет „Епископ Константин Преславски“
Факултет по математика и информатика, том XIX C, 2018, стр. 81 - 90

# MAIN PROBLEMS IN PREPARING THE BUDGETS OF MUNICIPALITIES TITLE

**DENITSA P. ZAGORCHEVA-KOYCHEVA**

***ABSTRACT:*** *This article describes the process of budgeting of the local authorities. The purpose is to identify the different stages, the controlling mechanism and the next budget management. The process of budgeting is complicated and logical process, which requires the implementation of some appropriate financial tools. Thus, these financial tools could be used by the authorities for the successful management of the institutions.*

***KEYWORDS:*** *municipal budget, municipal revenue, municipal expenses, budgetary procedure*

# ОСНОВНИ ПРОБЛЕМИ ПРИ ИЗГОТВЯНЕ НА БЮДЖЕТИТЕ НА ОБЩИНИТЕ[*]

**ДЕНИЦА П. ЗАГОРЧЕВА-КОЙЧЕВА**

***АБСТРАКТ:*** *Настоящата статия е насочена към представяне на процеса на бюджетиране на местните единици. Целта е да се откроят отделните етапи, механизмите за контрол и последващото управление и проблемите, с които се сблъскват общините при формирането и изпълнението на бюджета. Бюджетиранят процес е сложен и последователен процес, който изисква използването на подходящ инструметариум при формирането му, за да обслужи потребностите на институцията и тя да продължи да функционира успешно.*

[*] Настоящата статия е частично финансирана по проект № РД 08-126 от 07.02.2018 г. на Шуменски университет „Епископ Константин Преславски“

Общините ежегодно са поставени пред предизвикателството да изготвят бюджет, който максимално покрива техните потребности. Целта на бюджета е да осигури функционирането на местните власти като институция и като изпълнителен орган.

В докладът ще се разгледа същността на бюджета и етапите на бюджетиране на местните бюджети, като целта е да се очертаят основните проблеми в цялостният бюджетен процес и да се изведат инициативи за подобрение.

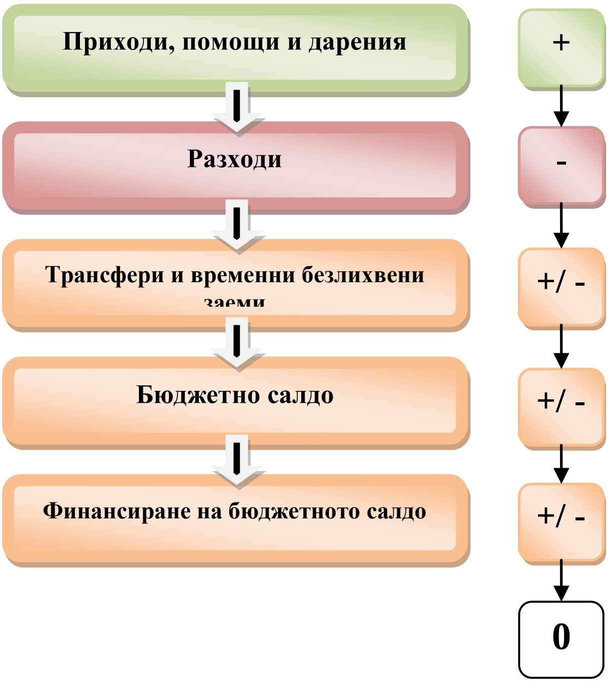
Бюджетът представлява финансова рамка за определен период, като при формирането му се спазват строги математически зависимости. Бюджетът е основен инструмент за функционирането на една община, който осигурява изпълнение на услуги към граждани, социална подкрепа, задоволяване на образователни и здравни потребности, подобряване на градската среда и условията за живот и под.

Бюджетите на общините имат особено значение в частта на консолидирания държавен бюджет. От една страна те са част от цялостния бюджет на Републиката и следва да спазват всички изискуеми норми и правила, валидни за държавния бюджет, а от друга следва да са независими и да осигурямат автономно управление на териториалната единица.

Формирането и изпълнението на общинските бюджети в България е регламентирано с два основни нормативни документа – Закон за публичните финанси [3] и Закон за бюджетът на Република България за съответнат агодина.

Бюджетите на общините трябва да са подчинени на някои основни принципи: публичност, реалност, пълнота, балансираност и систематизираност. Публичността изисква бюджетът да бъде оповестен и обсъден с местния бизнес и население, различни организации и зависими институции. Реалност – Включените приходи и разходи да са икономически обосновани. Пълнотата на бюджетът – да се включат всички приходи, които трябва да се съберат [1]. Балансираността на бюджета изисква равнение на приходите и разходите, като за пълното балансиране се използват финансиращите пера. Систематизирането се осигурява чрез използване на единна класификация на приходите, разходите и финансиращите пера, така че да има съпоставимост при натрупването им към други бюджети.

Общинският бюджет има строго определена структура с изградени математически връзки в нея.




**Фиг.1. Структура на общинския бюджет**

Първия елемент в структурата са **приходите, помощите и даренията** по бюджета. Включват се всички приходи, като се записват с положителен знак. Единствено данъците върху тях се отчитат със знак минус (ДДС и данък върху приходите на бюджетните предприятия.

Вторият елемент са **разходите.** Те се отчитат винаги с отрицателен знак. Изключение се допуска само в случаи на възстановени разхиди.

Третия елемент са **трансферите и временните безлихвени заеми**. Тук е допустимо отчитане както на положителни, така и на отрицателни стойности. Получените от общините трансфери и временни безлихвени заеми се отчитат с положителен знак, а предоставените от общините трансфери и погасяването на временни безлихвени заеми се отчитат с отрицателен знак.

**Бюджетното салдо** е математически резултат на изписаните в горние елементи стойности. То може да бъде положително или отрицателно. Положителното бюджетно салдо определяме като „излишък", а отрицателното бюджетно салдо, определяме като „дефицит".

**Финансирането на бюджетното салдо** е механизъм за представяне на финасирането на дефицита или натрупването на остатъци при излишъка. Винаги този елемент е еднакъв по стойност с „бюджетното салдо", но с обратен знак.

Правилно изравненият и балансиран общински бюджет след натрупване на окрупнените стойности от петте елемента дава резултат **нула**.

Бюджетирането в общините преминава през няколко основни етапа:

- Преглед на изпълнението на бюджета от последните години;
- Преглед на представените тригодишни бюджетни прогнози;
- Прогнозиране на приходите;
- Прогнозиране на разходите;

- Прогнозиране на трансферите и временните безлихвени заеми;
- Извеждане на бюджетно салдо;
- Планирне как ще се финансира бюджетното салдо в зависомст от вида му;
- Обсъждане на проекто бюджета и новата тригодишна бюджетна прогноза;
- Гласуване и приемане на бюджета;
- Контрол

**Прегледа на изпълнението от последните години** е основа в старта на бюджетирането, тъй като основа за планирането на приходите и разходите е изпълнението от предходни отчетни периоди. Заемите пък имат последователност и определеност, което също изисква наблюдение на предходните отчети.

Освен текущия бюджет всяка община представя и **тригодишна бюджетна прогноза** за следващите три години след бюджетната. В този смисъл изготвяният бюджет вече е част от предходни бюджетни прогнози. Ясно, е че много фактори могат да повлияят за промяна на тези бюджетни прогнози, но самата прогноза може да се ползва като основа при изготвяне на новия бюджет.

**Прогнозирането на приходите** се приема като фундамент сред всички изброени етапи на бюджетирането. Както вече споменахме изпълнението на бюджетите от последните години и представените тригодишни прогнози могат да бъдат база за новия бюджет, но при самото планиране на приходите трябва да се проследят и някои други влияния. Например данъчните приходи могат да бъдат планирани на база реален облог на данъчнозадължените лица. Планирането обаче на пълната стойност на облога означава, че очакваме всички лица да платят всичките си данъчни задължения през отчетния период. Ясно, е че това е практически неизпълнимо. Най – уместно е да се направи анализ на събираемостта от облога от предходни години и във същите проценти да се планира и в подготвения бюджет. Приходите от такси (без таксата за битови отпадъци) могат да се планират на база предходно изпълнение. Тук изключваме таксата за битови отпадъци, тъй като тя има данъкоподобен характер и следва да се планира по реда на данъците. Приходите от управление на имущество могат да се планират на база договрните отношения с отделните контрагенти. Може да се каже, че има конкретна специфика при планирането на всеки отделен вид приход, като за целта е нуждна разнородна информация. Всички приходи се вписват със положителен знак с изключение на подлежащите на внасяне данъци върху приходите. Данък добавена стайност и данъка върху приходите от стопанска дейност на бюджетните предприятия могат да се определят с точност към бюджета. Натрупват се перата, подлежащи на облагане и се умножават по съответната данъчна ставка.

При **планиране на разходите** се прилага комбинативен подход. От една страна се наблюдават отчетените разходи по съответните пера и дейности от предходни периоди, но от друга трябва да се вземат в предвид и всички обстоятелства, които могат да доведат до промяна в потребностите и изпълнението. Такива обстоятелства може да са продиктувани от нормативни промени в законодателството, нови или закрити структури, вменени нови ангажименти и отговорности на общините, разходи с еднократен (епизодичен) характер и под. Правилното планиране на разходите и разпределението им между отделните пера, дейности и функции е основа за функционирането на отделните структури на общината.

Планирането на **субсидиите и трансферите** в голяма степен в държавната си част е подчинено на Единните разходни стандарти [2]. Това ги прави и лесни за планиране. На база на наблюдението от предходни години, както и проучване потребностите на отделните структури могат да се планират предоставяните трансфери от общините. **Заемите** се планират на база погасителни планове.

**Бюджетното салдо** се извежда като математични резултат от горните елементи: приходите, разходите, трансферите и временните безлихвени заеми. Бюджетното салдо може да бъде както положително така и отрицателно.

**Финансирането на бюджетното салдо** винаги е с размера на бюджетното салдо но с обратен знак. Т.е. крупната стойност е известна, но следва да се планират конкретните пера, в които то да се реализира. Положителното бюджетно салдо в часта на финансиране най-често се показва като депозирани или касови наличности от левове и чужда валута. Отрицателното бюджетно салдо се финансира посредством допустими финансови инструменти като лихвени кредити и емитиране на облигации от общините.

Изготвеният проекто-бюджет се представя за **публично обсъждане**. Обявява се дата, час и място на обсъщданото, на което могат да присъстват всички заинтересовани лица. Най-често в публичните обсъждания вземат участие представители на общинските структури, синдикални и браншови организации, представители на бизнеса в общината и граждани. Целта на обсъждането е да се запознае обществото с проекта на бюджета, да се чуе неговото мнението и дори в някои слечаи се провокират промени в още не приетия бюджет.

След публичното обсъждане, включително и ако е претърпял промяна проекто-бюджетът може да бъде предложен за **гласуване от общинския съвет**. Често пъти общинският бюджет е обект на сериозни дебати в общинският съвет преди да се премине към гласуването му. Общинският бюджет се приема с положителния вот на 50 % + 1 от състава на Общинския съвет.

**Контролът** при бюджета не е еднократен акт. От една страна той може да се определи като контрол при изготвянето на самия бюджет, а от друга като контрол по изпълнението и отчитането на бюджета. Контролйт при формиране на бюджета се основава на контрол въху самата бюджетна процедура и контрол при планирането на отделни пера и дейности. Тази форма на контрол се упражнява непосредствено при изготвянето на бюджета от длъжностни или заинтересовани лица. Контрол върху бюджетната процедура се упражнява от Сметна палата. Контролът по изпълнението и отчитането на бюджета може да се упражни по време на изпълнението или след неговото отчитане. Този контрол основно се провежда от Сметна палата, като оторизиран орган да завери годишния финансов отчет и отчета за касово изпълнение на всяка община. Този контрол обаче може да се провежда и от вътреведомствени органи.

Цялостната бюджетна процедура е труден и многообхватен процес, което предполага и различни затруднения. Основни проблеми при изготвяне на общинските бюджети са:

- Липса на единни правила за планиране на отделните приходи в частта на собствените приходи;
- Липса на механизъм за овладяване на „раздутите” приходи;
- Липса на единни критерии за разпределение на разходите между отделните дейности;
- Липса на надежден контрол в процеса на планиране;
- Липса на обществен интерес и градивна критика.

Тези въпроси многократно са разисквани между общините и Националното сдружение на общините в Република България [4]. Отдавна се търси път за общи правила за приходите и критерии за разпределние на разходите. Една от първите успешни стъпки през последните години е регламентирането на максимални размери на поетите ангажименти и новите разходи чрез Закона за публични финанси и Закона за държавния бюджет на Република България.

Все още обаче няма и създаден механизъм за разпознаване и забрана на „раздутите” приходи. Планирането на раздути приходи осигурява разходен обем, а неизпълнението им води до формиране на бюджетен дефицит.

Липсата на надежден контрол в процеса на планиране също е сериозен проблем за общините. Цялостното планиране на общинския бюджет обичайно е съсредоточено в един екип и практически планирането остава почти невидимо до момента на обявяване на публичното обсъждане. В случая е уместно, ако нормативно се наложи в бюджетиращия екип да се включват заинтересовани външни лица, представители на общинския съвет или дори външни експерти в областта.

Един от основните проблеми на днешното общество, е че то се интересува от проблемите, когато те станат факт. Така е и при Общественото обсъждане на проекто-бюджета - липсва превантивния интерес, когато може да се повлияе и промени все още негласувания бюджет. На много от тези обсъждания присъстват основно представители на администрацията и структурите на общината, но няма гражданско присъствие, няма представители на бизнеса, няма синдикални и браншови позиции. В случая добра промяна ще бъде, ако нормативно се регламентира поименно да се канят представители на бизнеса, браншови и синдикални организации и други заитересовани лица.

Когато говорим за проблеми при общинските бюджети в повечето случаи се фокусираме върху проблемите при отчитане и изпълнение на бюджета, но не отдаваме значение на планирането на самия бюджет. Посочените по-горе проблеми могат да бъдат разсеяни с няколко нормативни изисквания.

Така не само администрацията, отчитаща общинския бюджет ще бъде улеснена, но и населението и бизнеса на територията на общината ще имат по-голямо доверие в институцията.

**ЛИТЕРАТУРА:**

[1] Тонев, С., Финанси. УИ Епископ Константин Преславски, Шумен (2006), с.158

[2] Единни разходни стандарти за делегирани от държавата дейности, определят се ежегодно с Постановление на Министерски съвет

[3] Закон за публичните финанси, обнародван с ДВ бр.15 от 15.02.2013 г., последно изменен и допълнен с ДВ бр.91 от 14.11.2017 г.

[4] Национално сдружение на общините в Република България, https://www.namrb.org/, последно посетен на 31.07.2018 г.

**Деница Петкова Загорчева-Койчева**
Шуменски университет „Епископ Константин Преславски”
E-mail: d.zagorcheva@shu.bg

Годишник на Шуменски университет „Епископ Константин Преславски“
Факултет по математика и информатика, том XIX C, 2018, стр. 91 - 99

# CLOUD COMPUTING TECHNOLOGIES IN TRAINING

**KRASIMIR V. HARIZANOV**

***ABSTRACT:*** *The present work explores cloud computing technologies that enable them to be used in the learning process. Attention is drawn to some of their peculiarities and their ability to integrate into different subjects. There are examples that could be found in both individual and group training.*

***KEYWORDS:*** *обучение, облачни технологии, cloud computing, e-learning training.*

# ОБЛАЧНИТЕ ТЕХНОЛОГИИ В ОБУЧЕНИЕТО*

**КРАСИМИР В. ХАРИЗАНОВ**

***АБСТРАКТ:*** *В настоящата работа се разглеждат облачни технологии, които дават възможност да се използват в учебния процес. Обръща се внимание на някои техни особености и възможността им за интеграция в различни учебни дисциплини. Предлагат се примери, които биха намери своето място както в индивидуалното, така и в груповото обучение.*

## Въведение

Днес сме свидетели на една бързо развиваща се дигитална среда, която променя начина по които хората общуват, работят или забавляват. Съвременното поколение, бързо се адаптират към новите технологии, тяхното използване и нуждата да работят с тях в ежедневието си. Дигиталната еволюция през последните години навлезе и в образователния процес. Новите учебни

* Настоящата статия е финансирана по проект РД-08-164/09.02.2018

програми изискват от учениците да имат умения и компетентности, за работа с най-актуалните информационни технологии. Едни от които са облачните технологии.

## Облачните технологии в обучението

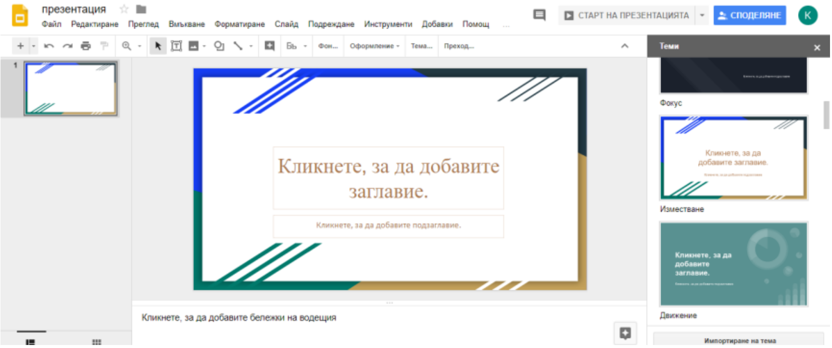
С развитието на цифровите технологии, се повишават и изискванията към тяхното използване. Облачните технологии са сравнително нова дигитална среда, която се използва все повече потребители. Една от основните характеристики на тези технологии е „обединяване на изчислителната мощност на много компютърни устройства в една система"[3], или пък виртуални машини, които да изпълняват синхронно една задача. Чрез облачните технологии, могат да се използват „множество нови и интерактивни подходи, специфични за виртуалното пространство"[2], които да намерят приложение при обучението не само на ученици, но и при студенти.

Към момента съществуват няколко видове облачни технологии с образователна цел, а именно:

- Облачни Среди за електронно обучение;
- Съхраняването на данни в облака;
- Облачни офис пакети.

В настоящата статия, ще се разгледат възможностите на Google облачните технологии, като едни от най-достъпните и популярни сред потребителите. Едно основните предимства от използването на облачните приложения е, че те са „безплатни, достъпни по всяко време, от всяко място и с всякакво устройство"[1].

Облачните приложения интегрирани в Google диск, дават възможност да се създадат електронни файлове, чиято работа с тях е аналогична с тези, познати в MS Office. Чрез Google презентациите (Фиг. 1) например, могат да се подготви и представи учебно съдържание, с разнообразни анимации и мултимедийни елементи. Предлагат се различни възможности за интегриране на обекти като звук, изображения, графики, диаграми, които могат да се вмъкват от самия Google диска, от локалния компютър или интернет адреси.




**Фиг. 1 Google презентация**

Всички файлове създадени в Google Диск, могат да бъдат споделени и организиран за работи в екип, едно от основните предимства на облак технологиите. Авторът на файла определя, които участници имат право на достъп до него, като права могат да бъдат:

- Редактор (пълни права за редактиране на съдържанието);
- Само коментар (права само за поставяне на коментари по съдържанието);
- Само преглед (само за четене на съдържанието).

Друго основно предимство на облак файловете е, че достъпа до тях може да се осъществява и от мобилно дигитално устройство. Напрактика по време на учебните занятия, работата по съдържанието, структурата и външния вид на файла, може да се осъществи и от личните дигитални устройства на обучаемите.

Google Презентациите, биха могли да се използват в учебното съдържание, както следва:

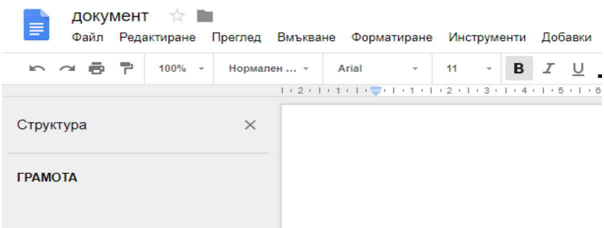
- 5 клас - Основни елементи в компютърната презентация. Създаване и съхраняване на кратка презентация, съдържаща текст и изображения.

- 6 клас - Форматиране на графични и текстови обекти в презентация.
- Използване на звукови файлове и звукови ефекти. Анимационни ефекти и времетраене на слайд. Настройки на дизайна. Характеристики на оформлението на клетките и данните.
- 7 клас - Създаване на компютърна презентация с вграждане на звукови и видео обекти. Използване на диаграми, графики, графични схеми и таблици в презентация.
- Запазване на презентация в различни файлови формати. Представяне на презентация пред публика.

Друг пример за приложение подходящо за използва в учебния процес е Google Документи (Фиг. 2). Облачният текстов документ, може да се използва от един или повече потребители в зависимост от неговото споделя. Текстовият файл притежава всички познати инструменти и функции, чрез които може да се форматира текст, изображения, символи или таблици. Ако до документът имат достъп повече потребители, то всеки от тях може да се работи с него както паралелно така и по различно време. Споделените документи, могат да намерят приложение в следните случаи:

- при поставяне на индивидуални задачи;
- при поставяне на групови задачи;
- при поставяне на задачи за самостоятелна подготовка;
- при поставяне на задачи за работа в часовете по СИП и ЗИП.

Спрямо новите учебни програми [5, 6, 7, 9, 10], Google Документите могат успешно да се интегрират в учебното съдържание в:




**Фиг. 2 Google документи**

- 5 клас - Зареждане, редактиране и съхраняване на текстов документ.Форматиране на текст на ниво символи и на ниво абзац
- 6 клас - Вмъкване и форматиране на графични изображения от библиотека и файл
- Търсене и замяна на текст. Форматиране на страница и отпечатване на текстов документ.
- 7 клас - Въвеждане на текст, съдържащ специални знаци и символи. Създаване, оформяне и редактиране на таблици със средствата на текстообработваща програма.
- 9 клас – Шаблони и теми в текстов документ.
- 10 клас - Създаване на дигитално съдържание в различни формати и с използване на множество технологични средства.

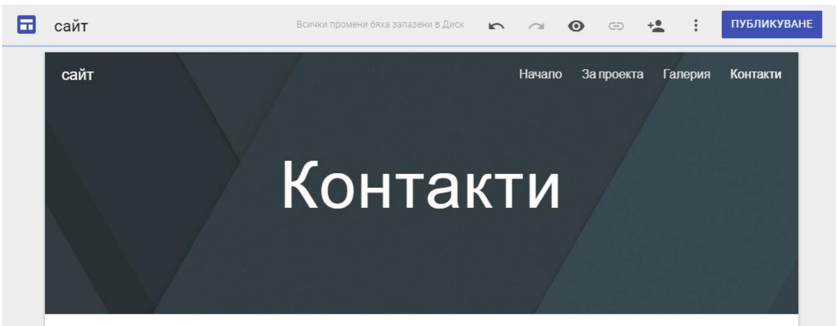
Важно е да се отбележи, че ако се използват различни информационни технологии по време на обучението, то междупредметната връзка и връзката между теорията и практиката ще даде предпоставка за усъвършенстване на учебния процес. Някои основните предимства, които могат да се отбележат са:

- Изграждат дигитални компетентности в различни предметни области;

- Използват средства за синхронна и асинхронна комуникация;
- Избират средства и методи за популяризиране на идеите си;
- Създават и публикуват информация в интернет;
- Формират умения за работа в екип;
- Работа по проект;
- Работа в мрежова среда.

Google Сайтове (Фиг.3) дават възможност бързо и лесно да изгради статичен сайт, който да съдържа различни информационни елементи. Изграждането на сайта преминава през разделите:

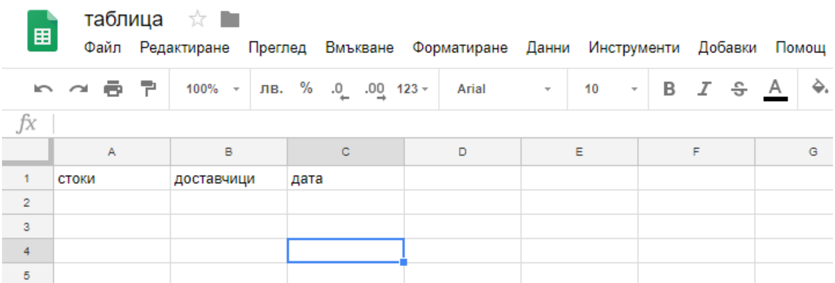
- Теми – определя външния вид на сайта, неговия дизайн.
- Страници – изгражда навигацията на сайта, всяка страница участва в управлението на съдържанието.
- Вмъкване – вмъкване на информационни обекти, като текст, изображения, видео и др.




**Фиг. 3 Google Сайтове**

Екипният подход може много добре да бъде реализиран при създаването на облачен сайт в учебна среда. Така всеки обучаем може да има своя роля и задачи, с които да допринесе за реализирането на приложението. Google Сайтове могат да се използват успешно при покриването на учебната програма по информационни технологии за 8 клас, в раздела „Създаване и публикуване на информация в интернет"[8].

Създаването  на електронни таблици чрез приложението Google Таблици (Фиг.4), също много добре би намерило своето място в обучението. Работата с клетки, адреси на клетки и използването на различни формули и функции до голяма степен покриват изискванията на учебния процес. Аналогично както и останалите приложения, и този би могъл да се сподели, така че всеки обучаем да има определена област или работна страница, в която да изпълнява поставените му задачи. Друго предимство което може да се посочи е потребителският интерфейс. Всички Google приложения могат да се визуализират на език удобен за потребителя. В процесът на обучение по предложение на учителят това може да е английският език, за да се запази мобилността на понятията или да се премине към визуализация на български език.




**Фиг.** 4 **Google Таблици**

Google Таблиците биха могли да се използват в учебните програми по информационни технологии, в следните теми:

- 5 клас - Експериментиране с данни. Диаграми.
- 6 клас - Формули за извършване на аритметични действия с въведените данни. Функции: сумиране, средноаритметично, максимум и минимум.
- 7 клас - Проектиране, създаване и форматиране на електронна таблица. Основни операции с клетки и области в електронна таблица. Сортиране на данни по зададени критерии. Търсене и замяна на данни. Основни типове диаграми. Графична интерпретация на данните. Отпечатване на таблица и на отделни части от нея.

Облачните технологии подпомагат организирането и провеждането на удобна учебна среда. Чрез тях се подпомага изграждането на колективни умения и работа в екип. Всяко приложение може да използва както стационарно, така и от мобилно устройство. Съвременните технологии допринасят за подготовката и реализирането на обучение, в една онлайн съвременна форма.

**ЛИТЕРАТУРА:**

[1] Андреева, М., Облачните технологии – приложение в електронното обучение, Proceedings of university of ruse, volume 56, book 11, 2017, 59-63

[2] Шаркова, Д., Гъров, К., Приложения на облачни технологии в обучението, VIII Национална конференция „Образованието и изследванията в информационното общество”, 2015, 166-174.

[3] URL:https://oblachnitehnologii.weebly.com/1057109810971085108610891090.html, достъпно на 25.04.2018

[4] URL: https://www.mon.bg/upload/6543/strategia_efektivno_ikt_2014_2020.pdf, достъпно на 12.06.2018

[5] URL: http://www.mon.bg/bg/2000, достъпно на 20.05.2018

[6] URL: http://www.mon.bg/bg/1998, достъпно на 20.05.2018

[7] URL: http://www.mon.bg/bg/1690, достъпно на 20.05.2018

[8] URL: http://www.mon.bg/bg/1999, достъпно на 20.05.2018

[9] URL: http://www.mon.bg/bg/1691, достъпно на 20.05.2018

[10] URL: http://www.mon.bg/bg/2238, достъпно на 20.05.2018

**Красимир Валентинов Харизанов**
ШУ „Еп. К. Преславски“, гр. Шумен
E-mail: kr.harizanov@shu.bg

Годишник на Шуменски университет „Епископ Константин Преславски“
Факултет по математика и информатика, том XIX C, 2018, стр. 101 - 115

# MATHEMATICS AND ICT TRAINING IN THE CONTEXT OF INTEGRATION AND WORK IN BILINGUAL ENVIRONMENT

**NATALIYA HR. PAVLOVA**

***ABSTRACT:*** *The article presents an idea for organizing the training of future mathematics and ICT teachers. The emphasis is on training in a multicultural and multilingual environment. The study presents the results of a survey of teachers and adults, who are defined as bilinguals. Bilinguals are classified according to their educational needs. Based on this classification, we propose strategic documents and well-established good practices, a model for the organization of the training for students preparing to be teachers of mathematics and ICT.*

***KEYWORDS:*** *mathematics, ICT, training, bilingual, multiculturalism.*

# ОБУЧЕНИЕТО ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАЦИОННИ ТЕХНОЛОГИИ В КОНТЕКСТА НА ИНТЕГРАЦИЯТА И РАБОТА В БИЛИНГВАЛНА СРЕДА[*]

**НАТАЛИЯ ХР. ПАВЛОВА**

***АБСТРАКТ:*** *В статията се представя идея за организация на обучението на бъдещи учители по математика и информационни технологии за работа в мултикултурна и мултилингвална среда. Представени са резултати от анкетно проучване сред учители и пълнолетни лица, които се определят, като билингви. Билингвите са класифицирани според образователните им потребности. На база на тази класификация, стратегически документи и утвърдени добри*

[*] Настоящата статия е частично финансирана по проект № РД-08-164/09.02.2018г. от фонд Научни изследвания на ШУ “Епископ Константин Преславски”.

*практики е предложен модел за организация на обучение на студенти, подготвящи се за учители по математика и информатика.*

## 1 Въведение

XXI$^{-ви}$ век е белязан с поредица от войни, икономическа нестабилност и други фактори, които главоломно усилиха бежанския поток към страните от Европейския съюз (ЕС). Социално-икономическите и културните проблеми, породени от този процес могат да се решат единствено с урегулиране на потока и интегрирането на хората, добили съответния статут. Образованието е един от ключовите стълбове на процеса на интеграция. Преминаването на езиковата бариера е първата стъпка в този нелек път.

На фона на сложната обстановка в западните страни на ЕС, в България ситуацията е значително по-спокойна на този етап. Въпреки това в България също се наблюдават проблеми, породени от недоброто владеене на официалния български език и незаинтересованост от получаване на образование. Основната група, която се нуждае от интеграция е съставена предимно от лица с ромски произход от малки населени места.

Съществуват множество изследвания, насочени към решаването на проблема с обучението на билингви. В дадената статия ще предложим класификация на билингвите, според образователните им потребности, т.к. в много от случаите билингвизмът носи позитивен фактор, който не се отчита достатъчно в популярните изследвания по темата. В България съществува голяма група билингви с турски език голяма част, от която има висок образователен ценз, съществуват и немалки група билингви с руски, арменски, украински и други езици и тенденцията е тези групи да се увеличават и техния потенциал следва да се използва за подобряване на образователната среда като цяло.

## 2 Стратегии за интеграция

В тази статия ще насочим вниманието си към проблемите в България. Вече няколко десетилетия се предлагат стратегии и програми, насочени към ромското включване. Във връзка с предвидените дейности има някои добри практики, но по линия на образованието няма видим ефект. Тук следва да отбележим, че качеството на българското образование като цяло, пада по данни на редица изследвания като PISA.

В *Рамкова програма за интегриране на ромите в българското общество (2010-2020)* [13] е отчетено, че «ромската общност се характеризира с по-неблагоприятна образователна структура, в сравнение с останалата част от населението. Най-високата образователна степен сред българската общност е средното образование (48,4%), докато най-голям дял от ромите (44,8%) достигат едва до основно образование. При по-високите степени на образование (висше) се констатира тенденция на намаляване на дела на ромската общност (едва 0,3%) в сравнение с българското население (20,4%). Обезпокоителен е и делът на ромите (20,5%), които нямат завършен дори начален етап на образование в сравнение с този при българите (почти 0%) и при турците (5.6%). Малък е делът на ромски младежи и възрастни роми, притежаващи професионално, средно и висше образование, квалификация и документ за завършено професионално образование. Особено тревожна е тенденцията на увеличаване на неграмотността сред ромите». Тази тревожна констатация наред с високата раждаемост в ромската общност предполага, че в семействата на родители без образование или с по-ниска образователна степен, не може да се очаква особен интерес към получаване на образование, без да се прилагат стимули и рестрикции, нормативно уредени на държавно ниво. В тази връзка са разработени редица програми. Следва да отбележим, че по програмата „Наука и образование за интелигентен растеж 2014-2020“ в Приоритетна ос 3 „Образователна среда за активно социално приобщаване“ са заложени възможности за проекти за ограмотяване на възрастни, повишаване на капацитета на педагогическите специалисти за работа в мултикултурна среда и подкрепа на уязвими групи за достъп до висше образование.

В *План за действие по изпълнение на националната стратегия за образователна интеграция на деца и ученици от етническите малцинства (2015 -2020 г.)* [12] са заложени редица дейности, насочени към преодоляването на разглеждания проблем. Следва да отбележим, че през 2016 година, като част от предприетите действия е публикувана *НАРЕДБА № 13 от 21.09.2016 г. за гражданското, здравното, екологичното и интеркултурното образование* [11], която определя държавният образователен стандарт за интеркултурното образование, но не засяга проблемите на специалната и частната методика по отделните учебни предмети.

В дейност 3.10. на плана [12] е заложено „Включване в учебните планове и програми на висши училища, подготвящи педагогически специалисти, придобиване на компетентности за ефективна работа в мултикултурна и мултилингвална образователна среда“. В тази връзка през 2015 година всички висши училища, подготвящи педагогически специалисти, получиха писмо с указание да се предложат учебни програми, насочени към подготовката на бъдещите учители за работа в мултикултурна и мултилингвална среда. В тази статия представяме основни идеи за преодоляване на проблемите, породени от непълния билингвизъм, които се предлагат на студенти – бъдещи учители по математика, информатика и информационни технологии на ШУ „Епископ Константин Преславски“.

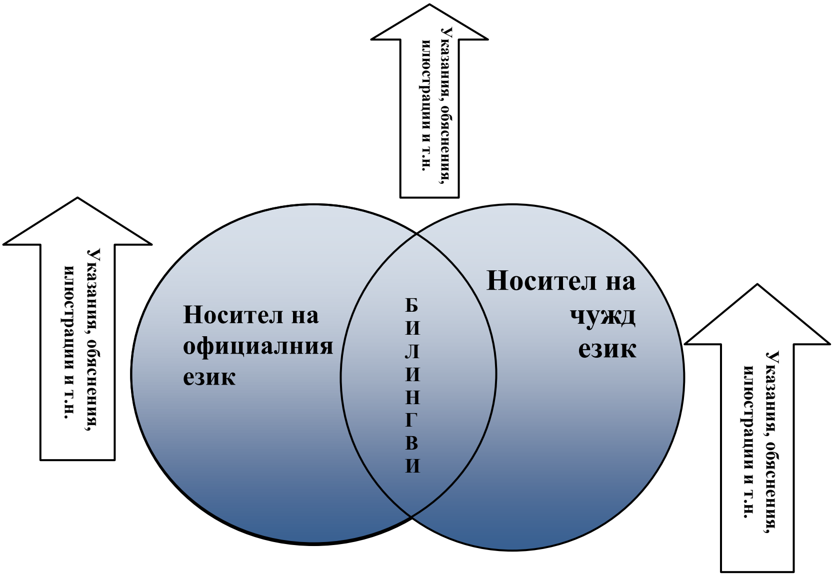
## 3 Образователни потребности на билингвите

Във връзка с проучването на образователните потребности на билингвите беше проведена анкета сред учители, работещи с билингви и пълнолетни граждани, които се определят, като билингви. Отделно са проведени дискусии със студенти, слушащи курс „Дидактически технологии в помощ на обучението по математика/информатика и информационни технологии в мултилингвална среда“ голяма част, от които също са билингви, но не с ромски, а с турски език.

Съществуват множество класификации и определения за билингвизма. Тук ще се основаваме на следното разделение [1]:

- симетричен, когато двата езика се знаят еднакво добре;
- асиметричен, когато единият език е доминант, като обслужва повечето ситуации на общуването, а другият само се разбира или се говори слабо;
- хоризонтален, когато и двата езика са равностойни на своята функция или семейна роля;
- други.

Като най-важна група, имаща проблеми в училище са асиметричните билингви, поставени в образователна среда. За целта се налага нова дефиниция, а именно „*Билингви в развитие* ще наричаме хора (в частност ученици), които на даден етап владеят като носители език, който не е официален за държавата, в която живеят, но в дадения момент те овладяват официалния език (в училище, в университет, в работна среда и т.н.). В определен момент тези хора следва да станат симетрични билнгви“ [3]. Това определение може да бъде разгледано в крайния си вариант, в който ученикът въобще не владее официалния език и разчита да научи езика в училищна среда. Това е типичният случай за бежанци и емигранти, който не е характерен за българското училище, но за съжаление учители споделят, че се среща нерядко в малките населени места.

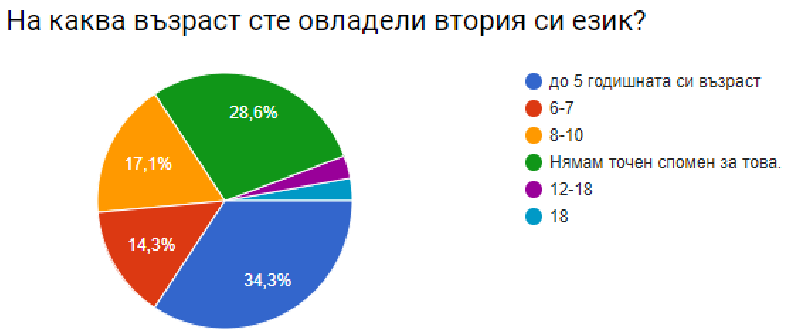



Фиг.1. Нива на инструктаж

В изследванията, посветени на билингвизма се омаловажават образователните потребности на хоризонталните билингви – това са хора, чиито познания, мултикултурност и различен тип мислене биха могли да се използват ползотворно в учебния процес. Разглеждайки средностатистическия ученик и необходимостта от указания за работа към него, факторът познание на езика може да се онагледи със схемата, представена на Фиг. 1. Ако за асиметричния билингв са необходими множество указания, илюстрации и инструкции, то за носителите на езика и хоризонталните билингви са нужни значително по-малко. В някои случаи билингвите възприемат материята по-лесно, т.к. имат различен тип мислене.

В проведеното анкетно проучване сред билингвите едва 14% определят своя старт в образователната система като асиметрични билингви. Същия процент хора помнят, че са имали проблеми в училище, породени от незнанието на български език. Интересно е, че нито един от хората със затруднения не е посочил математиката или информатиката, като проблемен предмет. Сред отговорите, езикови затруднения, анкетираните са имали по предметите Български език и литература, Биология, както и с отделни думи. 80% от тези хора твърдят, че са получавали помощ при справянето с езика от съученици и учители. Като основен инструмент за преодоляване на езиковата бариера, анкетираните посочват – използването на повече нагледни методи в обучението от страна на учителите и четенето на книги на български език от страна на билингвите. Сравнително нисък процент биха избрали интерактивните учебници за преодоляване на езиковите затруднения. Обяснението според нас е, че анкетираните не са запознати в достатъчна степен с възможностите на този тип дидактични материали.

66% от анкетираните твърдят, че първият език, който са научили е български, а 14% споделят, че дори не помнят момента, в който за научили български език и никога не са изпитвали езикови трудности. Този резултат се базира само на спомените на анкетираните и най-вероятно в действителност процентът на тези, които са научили първо езика, който се говори в семейството е значително по-висок. Все пак следва да отбележим, че анкетираните са хора с дигитална култура, активисти в ромски организации, студенти и хора с високо ниво на образование, което изначално дава предпоставки да твърдим, че в техните семейства родителите отговорно са следили децата да са подготвени за училище. На Фиг. 2 е представена възрастта на овладяване на втория език, според спомените на анкетираните.




Фиг.2. Овладяване на втори език

От диаграмата се вижда, че при преобладаващ процент от анкетираните процесът на овладяване на езика е бил в ранна възраст и „непомненето“ може да се обясни също с факта, че анкетираните не са усетили дискомфорта от езиковата бариера в училище.

60% от анкетираните считат, че познаването на два езика им дава един по-широк мироглед, което потвърждава идеята да се използват възможностите на симетричните билингви в организацията на обучението в мултикултурна и мултилингвална среда.

Анкетираните учители и преподаватели посочват, че сред техните ученици, билингвите са над 80%, като преобладават тези, владеещи турски и ромски език. На Фиг. 3 е представено виждането на тези преподаватели относно необходимостта от диференцирани подходи. Вижда се, че 29 % считат, че такова разделение не е необходимо, останалите са на мнение, че трябва да има специален подход и биха прилагали такъв, ако има подходящи материали. Тези отговори предполагат, че бъдещите учители следва да бъдат запознати с подходи и добри практики, които биха могли да прилагат в своята учителска практика при необходимост.


Фиг.3. Специфични подходи при работа с билингви

Като най-действен метод учителите посочват нагледните методи и ролевите игри. Като основен проблем посочват трудната работа с родителите и нежеланието им да способстват процеса на овладяване на официалния български език.

## 4 Учебна програма

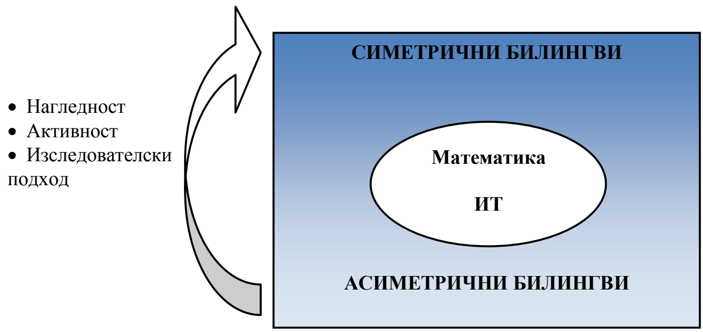
Учебното съдържание на програмата „Дидактически технологии в обучението по математика/информационни технологии в мултилингвална среда“ може да се раздели условно на пет модула:

- Общо-педагогически.
- Психолого-педагогически.
- Частно-методически.
- Технологико-приложен.

Теоретичните основи се базират на авторски разработки [3, 4, 7, 8, 14, 15]. Акцент е поставен на проучването на добри практики в областта на обучението по математика/информатика и информационни технологии в мултикултурна и мултилингвална среда. Разглеждат се възможности за осъществяване на междупредметни връзки, като например с математическата страна на технологичното обучение на база на проектния метод, като представения в [5] пример от технологичното обучение. Провежда се паралел между беседите с ученици, сред които има и сред, които няма билингви. За основа се вземат готови методически идеи, като описаните в [9] беседи.

Оценката се формира на база на описание на добра практика, образователен софтуер или на предлагането на авторска идея за провеждане на урок с клас, в който има билингви.

Основните фактори на прехода от асиметричен към симетричен билингвизъм в обучението по математика и ИТ са представени на Фиг. 4, като следва да отбележим, че това са действени подходи при работа с всички ученици, независимо от техните способности, езикови умения и мотивация. При билингвизма тези подходи следва да са неизменна част от урока по математика и ИТ.



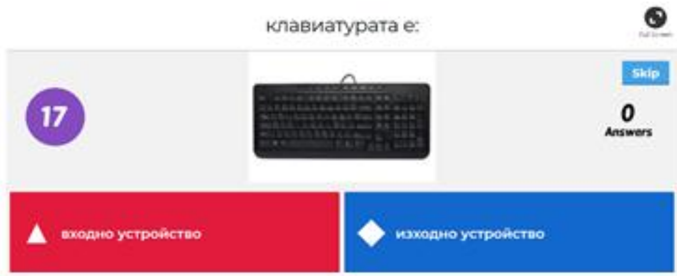

Фиг.4. Преход от асиметричен към симетричен билингвизъм в обучението по математика и ИТ

При предлагане на добри практики се анализират разликите в методиката, които са породени от езиковата бариера. Специално за обучението по математика, информатика и информационни технологии, голяма част от подходите, които са подходящи за по-слаби или немотивирани ученици са реално приложими и с билингвите в развитие. Съществуват все пак възможности, пряко насочени към езиковите затруднения.

Като една от най-удачните разработки в тази насока следва да отбележим играта „Скрити предмети" на Емилия Колева [2]. Идеята се състои в представянето на новите термини (в случая хардуерни компоненти) чрез игра, в която учениците да посочват изображения на тези компоненти и да ги назовават. В случай, че ученикът не е запомнил наименованието, учителят ще може да провери дали проблемът е само езиков или просто ученикът не е запознат със съответния компонент, т.к. има вариант за визуално разпознаване. На Фиг. 5 е представен скрийншот [2] на едно от нивата в дадената игра.

Фиг.5. Първо ниво

Изключително интересна и внедрена в практиката е и разработката на Стоянка Георгиева, състояща се в провеждането на състезателни игри онлайн с помощта на мобилни телефони. За целта тя предлага да се използва платформата **Kahoot.it**. На Фиг. 6 е представен скрийншот от играта [6].




Фиг.6. Игра в Kahoot

За обучението по математика, студентите акцентират най-вече на онагледяването с помощта на материални и дигитални модели, а също така на задачи, свързани с бита и реални житейски ситуации, като например задачата за тръстиката: Върхът на тръстика се издигал 10 см над повърхността на езеро. Рибар плувал с лодка в езерото. Ще може ли той да измери дълбочината на езерото с помощта на тръстиката, ако има рулетка? Забележка: не може да потапя рулетката до дъното на езерото, може само да мери тръстиката, разстоянието до нея, както и да я мести, без да я изкоренява.

Като идеи за ползване на позитивната страна на симетричните билингви, студентите предлагат проектния подход, при който на билингвите се дава задача да проучат бележити учени от тяхната националност; да представят тяхната култура - носии, песни и т.н. Като основен инструмент в този случай студентите предлагат създаването на презентации, но има и курсови работи насочени към създаването на сайтове, речници и графични изображения.

Впечатление прави, че студентите се отнасят изключително отговорно към курсовата работа по тази дисциплина и голяма част от тях предлагат авторски идеи, въпреки, че в интернет-пространството има множество успешни добри практики в тази насока.

## 5 Заключение

Необходимостта от интеграция е безспорна, но следва да отбележим, че математиката, информатиката и информационните технологии не са основополагащи за тази дейност. В обучението по математика добрите практики за работа с деца-билингви са насочени основно към нагледността, активността и изследователския подход [2, 4, 7, 10]. Тези методи в неадаптиран вид могат да се прилагат и при носители на езика, които имат затруднения с математиката.

Обучението по информатика и по-специално по информационни технологии дава добра технологична основа за реализиране на мултикултурни идеи не само в час, но и в извънкласни форми на обучение.

От всичко казано дотук можем да твърдим, че придобиването на компетентности за ефективна работа в мултикултурна и мултилингвална образователна среда е полезно за бъдещите учители, стимулира творчески подход към преподаването, а получените идеи имат място при работа с всички ученици.

**ЛИТЕРАТУРА:**

[1] Beardsmore, H., Bilingualism: Basic Principles, Multilingual Matters (1986)

[2] Koleva, E., Pavlova, N., Cognitive levels in application of computer games in the field of information technology education, SocioBrains, ISSUE 42, February, (2018), pp. 332-337

[3] Pavlova, N., Marchev, D., Borisov, B., Harizanov, K., Inquiry Based Learning in Science Education and Mathematics for Developing Bilinguals, Journal Education Culture and Society, Issue: 1 (2015), pp. 65-74

[4] Анева, С., Стойнова, П., Лазарова, Н., Стоянова, З., Войнакова, Н., Информационни технологии, Сборник добри практики за обучение

на деца-билингви в мултикултурна среда, Пловдив (2015), стр.107-146

[5] Велчева,К. Работата по проект в технологичното обучение в мултиетническа среда,Технологични аспекти на интеркултурното образование, УИ ЮЗУ "Неофит Рилски", Благоевград (2009), стр. 174-178

[6] Георгиева, Ст., Активните методи на обучение при деца билингви, Дипломна работа, Шумен (2018)

[7] Гроздев, С., Стефанова, Д., Василева, К., Колева, С., Тодорова, Р., Стимулиране на творческа активност при билингви чрез динамичен софтуер, Mathematics and Informatics, Volume 57, Number 3, (2014), стр. 247-273

[8] Иванов, И. , Интеркултурно образование, Шумен: Аксиос, (1999)

[9] Иванов, Й., Христов, М., Върху обучаващите решения на геометрични задачи, МАТТЕХ 2016, Том 1, Шумен (2016), стр. 251-261

[10] Милушева-Бойкина, Д., Николова, Т., Кисьова, С., Петрова, М., Калинчев, Д., Математика, Сборник добри практики за обучение на деца-билингви в мултикултурна среда, Пловдив (2015), стр.71-106

[11] НАРЕДБА № 13 от 21.09.2016 г. за гражданското, здравното, екологичното и интеркултурното образование https://www.mon.bg/upload/2332/naredba_13_21.09.2016_grazhdansko_eko_obr.pdf

[12] План за действие по изпълнение на националната стратегия за образователна интеграция на деца и ученици от етническите малцинства (2015 -2020 г.), http://mon.bg/upload/6533/action_plan_obrazovatelna_integracia_2015.pdf

[13] Рамкова програма за интегриране на ромите в българското общество (2010-2020 г.), http://strategy.bg

[14] Тоцева, Я., Опит за конструиране на дидактическа технология в светлината на интеркултурното образование. сб. Интеркултурно

образование в България – идеал и реалност. София, 1999, с. 146–171

[15] http://www.romaeducation.com, 6.7.2018

**Наталия Христова Павлова**
ШУ „Епископ Константин Преславски“, ФМИ, катедра „Алгебра и геометрия“
E-mail: n.pavlova@shu.bg

Годишник на Шуменски университет „Епископ Константин Преславски“
Факултет по математика и информатика, том XIX C, 2018, стр. 117 - 128

# REALIZATION OF METHODOLOGICAL IDEAS REGARDING THE INDIVIDUAL WORK OF STUDENTS IN THE DISCIPLINE “MATHEMATICAL ANALYSIS”

LILYANA M. KARAKASHEVA

**ABSTRACT:** *The article discusses students' individual work in the process of their higher education both as a separate form of study, and as an integral part of the other organisational forms of education - lecture and seminar. The author presents different variants of task systems suitable for lecturer guided individual work, as well as tasks for students' individual work.*

**KEYWORDS:** *lecturer guided individual work, students' individual work, teaching mathematics in higher education*

# ВЪРХУ РЕАЛИЗАЦИЯТА НА МЕТОДИЧЕСКИ ИДЕИ ПРИ САМОСТОЯТЕЛНАТА РАБОТА НА СТУДЕНТИТЕ ПО ДИСЦИПЛИНАТА „МАТЕМАТИЧЕСКИ АНАЛИЗ“[*]

ЛИЛЯНА М. КАРАКАШЕВА

## Въведение

Акцентите в университетското обучение са върху формиране на ориентирани към практиката знания, умения и компетенции. Качеството на усвоените знания и придобитите умения е в пряка зависимост от интелектуалната и практическа

[*]Настоящата статия е частично финансирана от проект № РД-08-164/09.02.2018 към Шуменския университет „Епископ Константин Преславски“

дейност, която студентите извършват в процеса на обучение. Основен дял като хорариум, който е заложен в учебните програми по всяка дисциплина, заема самостоятелната работа на студентите. Тя се разглежда като отделна форма на обучение, но от друга страна – тя е неделима съставка на останалите организационни форми на обучение по математическите дисциплини-лекция и семинарно упражнение. Затова въпросът за организацията и управлението на самостоятелната работа на студентите във висшето училище е значим от дидактическа гледна точка.

## Изложение

Във висшето училище основният подход за въвеждане на понятията в математическите дисциплини е абстрактно-дедуктивният. Понятията се въвеждат чрез дефиниции и след това се конкретизират, а теоремите се формулират наготово и след това се доказват. Обемът на изучаваните теореми е голям. Известно е, че запомнянето и трайността на помненето на дадено знание зависят от редица фактори, някои от които са:

- „количеството и характера на проведените упражнения при усвояването му;
- степента на активност в дейностите при неговото усвояване" [5, с.149].

Затова организацията на основните дейности на студентите определя в голяма степен ефективността на процеса на обучение. Особено място в този процес заема организацията на самостоятелната работа на студентите, която се разглежда в нейните две разновидности:

- самостоятелна работа на студентите под ръководството на преподавателя и
- студентска самостоятелна работа.

Самостоятелната работа на студентите под ръководството на преподавателя се планира и ръководи по-често от ръководителя на семинарните упражнения. Дългосрочната самостоятелна работа на студентите (курсов проект, подготовка за текущ контрол, подготовка за изпит, подготовка на научно съобщение за участие в студентска научна сесия и др.) се отнася към втората разновидност-студентска самостоятелна работа.

В настоящата публикация ще поставим акцент върху реализацията на текущата самостоятелна работа на студентите. След всяка тема от учебното съдържание по съответната дисциплина е целесъобразно да се дава подходящо подбрана система от задачи за самостоятелна работа. Подобни системи от задачи отсъстват от популярните сборници, които се препоръчват на студентите. Особено за студентите от първи курс е важно системите от задачи да са съставени според принципа за системност и последователност. Задачите трябва да са подредени по ниво на сложност. За някои задачи от заданието за самостоятелна работа е удачно да се дават и кратки упътвания.

Представяме вариант на *система от задачи за самостоятелна работа*, която може да се възложи на студентите след провеждане на първото упражнение по темата „Производна на функция на една променлива“ от учебната дисциплина „Математически анализ I част“.

**Задача 1.** Функциите $f$ и $g$ притежават производна в точката $x=0$ и $f(0)=0$, $g(0)=0$, $g'(0)\neq 0$. Докажете, че $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f'(0)}{g'(0)}$.

**Задача 2.** Нека $f(x)=(x-x_0)g(x)$, където $g$ е непрекъсната в точката $x_0$. Докажете, че $f'(x_0)=g(x_0)$.

**Задача 3.** Намерете едностранните производни на функцията $f(x)=|x-x_0|g(x)$ в точката $x_0$, където $g$ е непрекъсната функция в точката $x_0$. Има ли функцията $f$ производна в точката $x_0$?

**Задача 4**. Намерете производната на функцията $f$, дефинирана върху множеството $\mathbb{R}$ чрез:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-x+1, & \text{за } x\ge 1 \\ \dfrac{x^3}{3}+\dfrac{2}{3}, & \text{за } x<1 \end{cases}$$ в точката $x_0=1$.

**Задача 5.** Намерете производната на функцията $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\ne 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ и покажете, че $f'$ е прекъсната в точката $x_0=0$.

**Задача 6.** При какви стойности на $n$, функцията $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, дефинирана с равенствата

$$f(x)=\begin{cases} x^n\sin\dfrac{1}{x}, & x\ne 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

а) е непрекъсната в точката $x_0=0$;

б) е диференцируема в точката $x_0=0$;

в) има непрекъсната първа производна в точката $x_0=0$

**Задача 7.** Нека функцията $f$ е дефинирана в околност на точката $x_0=0$. Означаваме $h=x-x_0$. Да дефинираме симетрична производна на $f$ в точката $x_0=0$ чрез $f_s'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$, когато тази граница съществува.

а) Покажете, че ако функцията $f$ притежава едностранни производни в точката $x_0 = 0$, то тя има симетрична производна в тази точка и $f_s'(x_0) = \frac{1}{2}\left[f_-'(x_0) + f_+'(x_0)\right]$.

б) Покажете, че функцията $f$, дефинирана с равенствата:

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

, има симетрична производна в точката $x_0 = 0$, но не притежава нито лява, нито дясна производна в тази точка.

Последната задача от тази система задачи съдейства за *разширяване на знанията* на студентите върху разглежданата тема. Подобни задачи подготвят студентите за самостоятелна творческа дейност.

Педагогическият ни опит показва, че трудни се оказват онези въпроси от учебното съдържание, които в епохата на възникването им са си пробивали бавно и мъчително път в науката. Може да се предполага, че историческите трудности показват, че са възможни и психологически трудности и за съвременните студенти, запознаващи се с тези въпроси за първи път.

Интересно е да се отбележи, че физикът Вилхелм Вебер (1804–1894) просто не искал да повярва, че съществуват непрекъснати функции, които не са диференцируеми. Затова и бил шокиран, когато през 1872 г. Карл Вайерщрас (1815–1897) дал пример на функция, която е непрекъсната за всяко реално $x$ и не е диференцируема за никое реално $x$.

За да се разбере връзката между понятията „непрекъснатост“ и „диференцируемост на функция в точка“ не е достатъчно само доказването на съответната теорема.

Необходимо е да се разгледат от студентите много примери на непрекъснати функции с една или повече ъглови точки.

Ще припомним една мисъл на Исак Нютон „При изучаването на една наука примерите могат да бъдат толкова поучителни, колкото теорията".

Затова е целесъобразно за самостоятелна работа на студентите да се предложи например следната *система от задачи*.

**Задача 1.** Докажете, че всяка от дадените непрекъснати функции не е диференцируема в посочените точки:

а) $f(x)=|x-1|e^x, \quad x=1;$

б) $g(x)=e^{|x|}, \quad x=0;$

в) $h(x)=2x^2-|x-1|, \quad x=1;$

г) $\varphi(x)=\sqrt[3]{(x-1)^2}\ , \quad x=1.$

**Задача 2.** Докажете, че всяка от дадените непрекъснати функции не е диференцируема в посочените точки:

а) $f(x)=|(x-2)(x-3)|, \quad x=2, x=3;$

б) $g(x)=|x^2-1|, \quad x=-1, x=1;$

в) $\Psi(x)=|\sin x|, \quad x=k\pi, k\in Z.$

**Задача 3.** Изследвайте за диференцируемост в точката $x=0$ функциите:

а) $f(x)=\begin{cases} e^x, & \text{за } x\geq 0 \\ \sin x, & \text{за } x<0 \end{cases};$

б) $g(x)=\begin{cases} e^x, & \text{за } x\geq 0 \\ 1+\sin x, & \text{за } x<0 \end{cases}.$

**Задача 4.** Покажете, че функцията

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{за } x\in\mathbf{Q} \\ -x, & \text{за } x\in\mathbf{I} \end{cases}$$ е непрекъсната, но не е диференцируема в точката $x_0=0$.

**Задача 5.** Докажете, че функцията

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{за } x\in\mathbf{Q} \\ -x^2, & \text{за } x\in\mathbf{I} \end{cases}$$ има производна само в точката $x_0=0$.

**Задача 6.** Нека $f:D\to\mathbb{R}$.

Кои от следните твърдения са верни:

а) Ако функцията $f, x\in D$ е диференцируема в точка $x_0\in D$, то тя е непрекъсната в точката $x_0$.

б) Ако функцията $f, x\in D$ е непрекъсната в точка $x_0\in D$, то тя е диференцируема в точката $x_0$.

в) Ако функцията $f, x\in D$ не е непрекъсната в точка $x_0\in D$, то тя не е диференцируема в точката $x_0$.

г) Ако функцията $f, x\in D$ не е диференцируема в точка $x_0\in D$, то тя не е непрекъсната в точката $x_0$.

Трябва да се подчертае важното значение на дейността „*съставяне на математическа задача*“ за усъвършенстване на уменията на студентите да решават задачи. Успешното реализиране на тази дейност „донася удоволствие и радост“ [19, с.85]. Трябва да отбележим също, че тази дейност има потенциал, както в методически, така и в психологически план, макар че на този етап тя е силно подценена. Затова е необходимо да се работи за интегриране на тази дейност в процеса на обучение във висшето училище.

Групата задачи от съставяне на функции по зададени свойства можем да отнесем към задачи от доказателства, тъй като при тяхното решаване е необходимо да се докаже съответствието между съставената функция и изискваните свойства.

**Задача.** Посочете пример на:

а) функция, която е непрекъсната в точката $x_0 = 1$, но не е диференцируема в тази точка;

б) функция, която е непрекъсната в интервала $[0,2]$, но не е диференцируема в точките $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 1$;

в) функция, която е непрекъсната в $\mathbb{R}$, но не е диференцируема в точките $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$;

г) функция, която е непрекъсната в $\mathbb{R}$, но не е диференцируема в краен брой точки $a_1, a_2, ..., a_n$ от $\mathbb{R}$;

д) функция, която е непрекъсната в $\mathbb{R}$, но не е диференцируема в безброй много точки $x_k = k, k \in Z$.

В раздела „Диференциално смятане на функция на една променлива“ е уместно да се зададе следната примерна *система от задачи за самостоятелна работа*.

**Задача 1.**

а) Докажете, че ако $f(x)$ е четна (нечетна) диференцируема функция, то $f'$ е нечетна (четна) функция;

б) Посочете пример за диференцируема функция, която не е нечетна, но нейната производна е четна.

**Задача 2.** Докажете, че ако функцията $f$ е периодична с период Т и диференцируема, то $f'$ е периодична със същия период. Вярно ли е обратното?

**Задача 3.** Съществува ли функция, която е ограничена и диференцируема върху $\mathbb{R}$, чиято производна върху $\mathbb{R}$ е функция, която не е ограничена.

**Задача 4.** Покажете, че свойството функцията да бъде неограничена върху множеството $\mathbb{R}$ при диференциране, не се запазва.

**Задача 5.** Докажете, че всяка неограничена и диференцируема функция в крайния интервал $(a,b)$ има производна, която е също неограничена функция в интервала $(a,b)$.

Според нас задаването на подобни системи от задачи за самостоятелна работа имат следните дидактически достойнства:

- съществено влияят на неформалното и дълбоко осмисляне на понятията нарастване на функция, граница и производна на функция на една реална променлива;
- помагат за откриване на връзки между новите понятия и вече изучени (диференцируемост и непрекъснатост; диференцируемост и четност/ нечетност; диференцируемост и периодичност; диференцируемост и ограниченост на функция);
- откриват нови свойства и отношения, които обикновено не са обект на разглеждане в учебната литература;
- усъвършенстват техниката на приложение на апарата на диференциалното смятане при решаване на различни задачи;
- развиват логическото мислене;
- стимулират нестандартното мислене.

Полезно е решенията на задачите от заданията за самостоятелна работа да се представят на преподавателя за проверка. Проверените и оценени текущи самостоятелни работи трябва да се връщат на студентите своевременно. Ако са забелязани значителни пропуски в знанията е добре да се възлагат допълнителни диференцирани самостоятелни работи. Индивидуални задания за самостоятелна работа е добре да се предлагат и на студентите с ярко изразени математически способности [20].

Онези студенти, които са работили регулярно върху заданията за текуща самостоятелна работа, участват активно и съзнателно и в процеса на самите семинарни упражнения. Те усвояват учебното съдържание по-задълбочено и по-трайно [11]. Защото системната подготовка по учебната дисциплина гарантира движението на учебното познание през естествените етапи на възприемане, разбиране и приложение на учебното съдържание. А последователното преминаване през тези етапи осигурява формиране на съответните компетенции. Затова считаме, че системността в подготовката трябва да се отчита при формиране на окончателната оценка по съответната учебна дисциплина, т.е. има смисъл да се прилага процесуалното оценяване по отношение на тази характеристика на процеса на учене, която се състои в системността на ученето.

Подготовката за текущ контрол може също да се подпомогне чрез предлагане на специално разработени задания за самостоятелна работа. Два примерни варианта на студентска самостоятелна работа за подготовка за текущ контрол са предложени в статията [12]. Тези варианти са върху темата „Неопределен интеграл“. Изборът на задачите е според типологията на П. Пидкасисти,  която разглеждаме в тази публикация. При решаването на тези задачи познавателната дейност на студентите има както възпроизвеждащ, така и творчески характер.

Един модел за формиране на окончателната оценка на студента по съответната дисциплина, при който се отчитат резултатите от текущата самостоятелна работа, така и резултатите от текущия контрол, се разглежда в публикацията [9]. Считаме, че този модел за оценяване във висшето училище е по –подходящ от често срещаната резултативна стратегия за оценяване.

## Заключение

Разгледаните системи от задачи са от учебната дисциплина „Математически анализ I част“, която е основна учебна дисциплина в обучението на студентите от много специалности.

Идеите за организацията, реализацията и управлението на самостоятелната работа на студентите по тази дисциплина са приложими от университетските преподаватели и по други математически дисциплини.

**ЛИТЕРАТУРА:**


[1] Берман, Г. Сборник задач по курсу математического анализа, Наука, М., 1975

[2] Ганчев, Ив. Основни учебни дейности в урока по математика (синтез на резултати от различни изследвания), ИФ Модул-96, С., 1999

[3] Ганчев, Ив., Върбанова, М. Методика на обучението по математика (специална част). Изд. Астрата, В. Търново, 2002

[4] Ганчев, Ив., Нинова, Ю., Никова, В. Методика на обучението по математика (обща част) , Университетско издателство „Неофит Рилски”, Благоевград, 2002

[5] Ганчев, Ив. Математиката в системата на учебните предмети и практиката, Университетско издателство “Неофит Рилски”, Благоевград, 2007

[6] Гнеденко, Б. В. Математическое образование в ВУЗАХ, Высшая школа, М., 1981

[7] Демидович ,Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу, Наука, М., 1977

[8] Каган, В.И., Сычеников, И. А. Основы оптимизации процесса обучения в высшей школе, Высшая школа, М., 1987

[9] Каракашева, Л. Контролът и оценката в семинарните упражнения, Сборник научни трудове от национална конференция с международно участие „40 години Шуменски университет 1971-2011“, Ш., 2011, стр.241-245

[10] Каракашева, Л. Самостоятелната работа на студентите в процеса на обучение във висшето училище, Сборник от доклади от международна научно-практическа конференция, В., 2015, стр.375-390

[11] Каракашева, Л. Съвременен модел на семинарни упражнения, осигуряващ повишаване ефективността на обучението по Математически анализ, Сборник Математика и математическо образование в България , С., 2012, стр.351-358

[12] Каракашева, Л. Един подход за класификация на самостоятелната работа на студентите, Годишник на ШУ „Епископ Константин Преславски“, Том XVII C, ФМИ, Ш., 2016, с.167-172

[13] Котов, В.Е. Психолого – педагогические основы управления процессом обучения в ВУЗЕ, Высшая школа, К.,1976

[14] Кудрявцев, Л. Д. Мисли за съвременната математика и нейното изучаване, Издателство „Техника“, С., 1982

[15] Низамов, Р. А. Дидактические основы активизации учебной деятельности студентов, Издателство Казанского университета, К., 1975

[16] Потоцкий, М. В. Преподавание высшей математики в педагогическом институте, Просвещение, М., 1975

[17] Проданов, Ив. и др. Сборник от задачи по диференциално и интегрално смятане, Наука и изкуство, С., 1976

[18] Ganchev, Iv., Grozdev, S. On Two Fundamental Approaches to the Development of Scientific Knowledge and their Implementation in Didactics of Mathematics, Proceedings of the 6-th Mediterranean Conference on Mathematics Education, Plovdiv, 2009, p.17-27

[19] Grozdev, S. For High Achievements in Mathematics, The Bulgarian Experience (Theory and Practice), Sofia, 2007

[20] Karakasheva, L. Individualisation and Differentiation through Individual Work in teaching Mathematical Disciplines in Higher Education, Science and Education a New Dimension, Pedagogy and Psychology, V(51), Issue: 112, 2017, p.22-23

**Лиляна Каракашева**
ФМИ, ШУ „Епископ Константин Преславски”
E-mail: l.karakasheva@shu.bg

Annual of Konstantin Preslavsky University of Shumen
Faculty of Mathematics and Informatics , vol. XIX C, 2018, pp. 129- 148

# AN ESTIMATE FOR THE NUMBER OF ZEROS OF ONE MULTIVALUED FUNCTION, PART I*

**Ana D. Mihajlova**

***ABSTRACT:*** *The article finds an estimate from above for the number of zeros of a helper function. This function arises in considering the infinitesimal version of the 16th Hilbert Problem for cubic Hamiltonians with two centers and two saddles.*

***KEYWORDS:*** *16-th Hilbert's problem, zeros of Abelian integrals*

# ОЦЕНКА ЗА БРОЯ НА НУЛИТЕ НА ЕДНА МНОГОЗНАЧНА ФУНКЦИЯ, ЧАСТ I-ВА

**Ана Д. Михайлова**

***АБСТРАКТ:*** *В статията е намерена оценка отгоре за броя на нулите на една помощна функция, която възниква при разглеждането на инфинитезималната версия на 16-тия Хилбертов проблем за кубични Хамилтониани с два центъра и две седлови точки.*

***КЛЮЧОВИ ДУМИ:*** *16-ти проблем на Хилберт, нули на Абелеви интеграли*

## 1 Глава I: Увод. Въвеждане на функцията $G_2(h)$.

Поставеният през 1900 година знаменит 16-ти Хилбертов проблем (неговата втора част) изисква намирането на горна граница за броя на граничните цикли на полиномиално векторно поле в равнината, зависеща само от степените на полиномите (виж [12]). В тази си форма проблемът е далеч от своето решение. Поради тази причина са формулирани няколко

*Partially supported by Scientific Research Grant RD-08-119/2018 of Konstantin Preslavski University of Shumen, Bulgaria.

негови отслабени версии. Една от тях е инфинитезималният 16-ти Хилбертов проблем, поставен от В.И.Арнолд през 1977 година [1, 2] повлиян от работата на Ю.Иляшенко [18]. Ще приведем неговата формулировка. Нека $H(x,y)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ е реален полином от степен $m$ (ще го наричаме Хамилтониан) и $f(x,y)$, $g(x,y)$ са два реални полинома от степен ненадвишаваща $n$. Нека $\Sigma \subset \mathbb{R}$ е множеството от реални числа, за които съществува затворена ограничена компонента $\delta(h)$ на линията на ниво $\Gamma_h = \{H(x,y) = h\}$, неминаваща през критични точки. Да дефинираме пълния Абелев интеграл

$$I(h) = \int\limits_{\delta(h)} [g(x,y)dx - f(x,y)dy] \quad , \qquad h \in \Sigma\,.$$

Инфинитезималният Хилбертов проблем изисква да се намери оценка $Z(m,n)$ за броя на нулите на Абелевия интеграл $I(h)$ за $h \in \Sigma$ зависеща само от степените на полиномите $H(x,y)$, $f(x,y)$, $g(x,y)$.

Да припомним накратко връзката между 16-тия проблем на Хилберт и инфинитезималния Хилбертов проблем. Да разгледаме пертурбираната Хамилтонова система:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= H_y + \epsilon f(x,y)\ ; \\ \dot{y} &= -H_x + \epsilon g(x,y)\ , \end{aligned}$$

където $\epsilon$ е малък параметър, а $H(x,y)$, $f(x,y)$, $g(x,y)$ са както по-горе. Броят на изолираните нули на $I(h)$ за $h \in \Sigma$, с отчитане на тяхната кратност, е горна граница за броя на онези гранични цикли на пертурбираната Хамилтонова система, които са близки за $\epsilon \to 0$ до някой неминаващ през критични точки овал на съответната непертурбирана Хамилтонова система:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= H_y\ ; \\ \dot{y} &= -H_x\ . \end{aligned} \tag{1.1}$$

1984 година А.Варченко [28] и А. Хованский [22] независимо един от друг доказват, че съществува крайна оценка $Z(m,n)$. Обаче тяхната оценка не зависи експлицитно от $m$ и $n$.

Напоследък в серия от работи: [4, 5], авторите намират конструктивно решение на инфинитезималния Хилбертов проблем. Тяхната оценка е двойно експоненциална и е базирана на предишни работи на Ю. Иляшенко, С.Яковенко и Д. Новиков [30, 19, 25, 11].

Многочислен списък от статии, които третират различни аспекти на 16-тия Хилбертов проблем или на инфинитезималния хилбертов проблем може да бъде намерен например в [20, 21, 23, 31] и в техните референси.

Точна оценка е намерена само за $Z(3,2)$, а именно $Z(3,2) = 2$ ([14, 7]). В работите [6, 7, 13, 14, 29, 24, 16, 17, 9, 10, 32, 33, 34] са получени оценки по-добри от споменатата по- горе двойна експоненциална оценка за Хамилтониани от ниска степен.

В настоящата работа е получена оценка отгоре за броя на нулите на една помощна функция възникваща при разглеждането на инфинитезималния 16-ти Хилбертов проблем за кубични Хамилтониани с два центъра и две седлови точки.

Текстът е структуриран както следва:В Глава I-ва указваме вида на Хамилтонианите, за които се отнася настоящата статия и въвеждаме функцията $G_2(h)$. В Глава II- ра с помощта на Принципа на аргумента оценяваме отгоре броя на нулите на $G_2(h)$ в подходяща комплексна област.

Привеждаме доказателството само на основния резултат - Теорема 2.4. Доказателството на останалите теореми и леми е аналогично на доказателството на съответните им твърдения от [24], [16].

Настоящата работа е свързана с инфинитезималния 16-ти Хилбертов проблем за кубични Хамилтониани с реални коефициенти от вида:

$$H(x,y) = \frac{x^2+y^2}{2} + Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 \quad , \quad (x,y) \in \mathbf{R}^2 \quad . \tag{1.2}$$

Ние предполагаме,че Хамилтонианите от (1.2) удовлетворяват следните две предположения:

- (**A1**) Съответната непертурбирана Хамилтонова система (1.1) притежава четири критични точки, като две от тях са седлови точки, а другите две са центрове.
- (**A2**) Съответните критични стойности на $H(x,y)$ са различни помежду си.

*Забележка* 1.1. От предположението (**A2**) следва, че $BC \neq 0$. Освен това, можем да приемем, че $B^2 - 4AC < 0$. Ако $B^2 - 4AC = 0$, $H(x,y)$ няма да притежава четири различни критични точки.

Известно е, че Хамилтоновите функции $H(x, y)$, които притежават свойствата (**А1**) и (**А2**), образуват отворено подмножество в пространството на всички реални кубични Хамилтониани.

От [15] знаем,че за критичните стойности $h_1$, $h_2$, $h_3$, $h_4$ на $H$, при направените предположения, са валидни следните неравенства:

$$0 = h_1 < h_2 < h_3 < h_4 \quad .$$

Критичните стойности $h_1$ и $h_4$ отговарят на двата центъра, а критичните стойности $h_2$ и $h_3$ - на двете седлови точки. За тези Хамилтониани, също така, е в сила: $\Sigma = (h_1, h_2) \cup (h_3, h_4)$ ($\Sigma$ - максималният интервал на съществуване на непрекъсната фамилия от овали на $\{H(x, y) = h\}$, неминаващи през критични точки).

Нека означим изчезващия цикъл в точката $h_j$ с $\gamma_j(h)$, $j = 1, 2, 3, 4$. Ясно е, че $\delta(h) \equiv \gamma_1(h)$ за $h \in (h_1, h_2)$ и $\delta(h) \equiv \gamma_4(h)$ за $h \in (h_3, h_4)$. Извършваме последователно следните смени на променливите:

$$z = y(1 + 2Cx) + Bx^2 \quad ; \tag{1.3}$$

$$\begin{cases} x \to mx + n \quad , \\ m = \frac{\sqrt{D}}{8AC - 2B^2}, \quad n = -\frac{A+C}{8AC-2B^2} \quad , \\ D = (A - C)^2 + 2(A^2 + B^2 + C^2) \quad ; \end{cases} \tag{1.4}$$

$$z \to \frac{D}{\sqrt{8|B^2 - 4AC|^3}} z \quad . \tag{1.5}$$

Тези смени привеждат $\Gamma_h$ в нормалната форма:

$$\Gamma_h = \left\{ \pm\frac{1}{2} z^2 = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \alpha x + \beta \right\} \quad , \tag{1.6}$$

където

$$\alpha = \frac{2\sqrt{D}\left[(A + C)((A - C)^2 + B^2) - 4Ch(B^2 - 4AC)^2\right]}{D^2} \quad ,$$

$$\beta = \frac{32(B^2+C^2-3AC)(B^2-4AC)^2 h - (3A^2-10AC+4B^2+3C^2)(A+C)^2}{4D^2} \quad .$$

Знакът в $(1.6)$ съвпада със знака на $B^2 - 4AC$. Извършвайки линейна смяна на $h$:

$$(1.7) \qquad h \to -\frac{D^{\frac{3}{2}}}{8C(B^2-4AC)^2}h \quad ,$$

получаваме, че $\alpha = h + \alpha_1$ и $\beta = \beta_1 h + \beta_2$.
Смените $(1.3)$, $(1.4)$, $(1.5)$, $(1.7)$ и нормалната форма $(1.6)$ са заимствувани от [8].

Ще отбележим, че всяка затворена орбита на системата $(1.1)$, която се съдържа в линията на ниво $\left\{\frac{x^2+y^2}{2} + Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 = h\right\}$ е овал на алгебричната крива $(1.6)$. Обратното не е вярно - овалите на алгебричната крива $(1.6)$ не са задължени да произлизат непременно от затворени орбити на $(1.1)$.

Нека означим образите на $I(h)$, $\gamma_j(h)$, ($j = 1, 2, 3, 4$), след горните смени на променливите съответно с $\widetilde{I}(h)$, $\widetilde{\gamma}_j(h)$, $j = 1, 2, 3, 4$. Въвеждаме числата $\mu$, $\nu$, $\rho$, които ще използуваме многократно като степени на полиноми:

$$(1.8) \qquad \mu = \left[\frac{n-2}{3}\right] \; ; \quad \nu = \left[\frac{n-3}{3}\right] \; ; \quad \rho = \left[\frac{n-1}{3}\right] \; .$$

за всяко $n \in \mathbf{N}$.

**Лема 1.2.** *За $\widetilde{I}(h)$ са в сила следните декомпозиции:*

$$(1.9) \qquad \begin{aligned} &\widetilde{I}(h) = \widetilde{u}_\mu(h) \int\limits_{\widetilde{\gamma}_1(h)} zdx + \widetilde{v}_\mu(h) \int\limits_{\widetilde{\gamma}_1(h)} \tfrac{zdx}{(x+\beta_1)^2} + \\ &\widetilde{w}_\nu(h) \int\limits_{\widetilde{\gamma}_1(h)} (x+\beta_1)zdx + \widetilde{s}_\rho(h) \int\limits_{\widetilde{\gamma}_1(h)} \tfrac{zdx}{x+\beta_1} \quad , \text{за} \quad h \in (h_1, h_2) \; ; \\ &\widetilde{I}(h) = \widetilde{u}_\mu(h) \int\limits_{\widetilde{\gamma}_4(h)} zdx + \widetilde{v}_\mu(h) \int\limits_{\widetilde{\gamma}_4(h)} \tfrac{zdx}{(x+\beta_1)^2} + \\ &\widetilde{w}_\nu(h) \int\limits_{\widetilde{\gamma}_4(h)} (x+\beta_1)zdx + \widetilde{s}_\rho(h) \int\limits_{\widetilde{\gamma}_4(h)} \tfrac{zdx}{x+\beta_1} \quad , \text{за} \quad h \in (h_3, h_4) \; ; \end{aligned}$$

*където $\widetilde{u}_\mu(h)$, $\widetilde{v}_\mu(h)$, $\widetilde{w}_\nu(h)$, $\widetilde{s}_\rho(h)$ са полиноми на $h$ от степени: $deg\,\widetilde{u}_\mu(h) = deg\,\widetilde{v}_\mu(h) = \mu$; $deg\,\widetilde{w}_\nu(h) = \nu$; $deg\,\widetilde{s}_\rho(h) = \rho$. Тези полиноми са едни и същи и както когато $h \in (h_1, h_2)$, така и когато $h \in (h_3, h_4)$. (Ако степента е отрицателна, съответният полином се взема да бъде тъждествено равен на нула).*

Да припомним, че бележим изчезващия цикъл в точката $h_j$ с $\gamma_j(h)$, $j = 1, 2, 3, 4$. С $< \gamma_i \circ \gamma_j >$ ще бележим индекса на пресичане на циклите $\gamma_i$ и $\gamma_j$.

В статията [15] е получена матрицата от индексите на пресичане на циклите $\gamma_j$, $j = 1, 2, 3, 4$. Тя е следната:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & +1 & +1 & +1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & +1 & +1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.10}$$

където елементите $a_{i,j}$ на $A$ се пресмятат по формулата $a_{i,j} =< \gamma_i \circ \gamma_j >$, $1 \leq i, j \leq 4$.

От същата статия знаем базисите на $H_1(\Gamma_h, \mathbf{Z})$ и на $H_1(\overline{\Gamma_h}, \mathbf{Z})$ - първите хомологични групи съответно на алгебричната крива $\Gamma_h$ и на нейната компактификация $\overline{\Gamma_h}$. По - точно: циклите $\gamma_1$, $\gamma_1 + \gamma_2$, $\gamma_1 + \gamma_3$, $\gamma_4$ образуват базис на $H_1(\Gamma_h, \mathbf{Z})$, а циклите $\gamma_1$ и $\gamma_2$ са генератори на $H_1(\overline{\Gamma_h}, \mathbf{Z})$. Циклите $\gamma_3$, $\gamma_4$ също могат да бъдат избрани за генератори на $H_1(\overline{\Gamma_h}, \mathbf{Z})$.

Циклите $\gamma_2$ и $\gamma_3$ са хомологични върху $\overline{\Gamma_h}$.
Циклите $\gamma_4$ и $\gamma_1 + \gamma_2$ също са хомологични върху $\overline{\Gamma_h}$.
Обаче $\gamma_2$ и $\gamma_3$ са различни помежду си , разглеждани като елементи на $H_1(\Gamma_h, \mathbf{Z})$. Същото важи и за $\gamma_4$ и $\gamma_1 + \gamma_2$ - те не са хомологични върху $\Gamma_h$.

И двата цикъла $\gamma_4 - \gamma_1 - \gamma_2$ и $\gamma_2 - \gamma_3$ могат да се представят като обединения на малки окръжности около трите безкрайни точки на Римановата повърхнина $\Gamma_h$.

За взаимното разположение на трите безкрайни точки на $\overline{\Gamma_h}$ спрямо $\gamma_1 + \gamma_2$, $\gamma_1 + \gamma_3$, $\gamma_4$ има само една възможност: по една безкрайна точка между всеки два от тези цикли. Но за взаимното разположение на трите безкрайни точки една спрямо друга има 6 възможности, на които отговарят различни връзки между $\int\limits_{\gamma_j} x^i y^m dx$ за $j = 1, 2, 3, 4$. За описването на тези връзки ще използваме дискретните функции $\varphi(k)$ и $\psi(k)$.Следват формулите, с които се задават $\varphi(k)$ и $\psi(k)$:

$$\begin{array}{ll} \varphi(k) = \frac{1}{30}(k-3)(k-4)(2k-7)(k^2-7k+5) & ; \\ \psi(k) = \frac{1}{24}(k-1)(k-6)(2k-7)(-k^2+7k-8) & . \end{array}$$

С $k$ ($k = 1, 2 \ldots, 6$) сме означили номера на поредната разглеждана възможност. $\varphi(k)$ и $\psi(k)$ приемат следните стойности:

$$(1.11) \qquad \begin{cases} \varphi(1) = 1\,, \\ \varphi(2) = 1\,, \\ \varphi(3) = 0\,, \\ \varphi(4) = 0\,, \\ \varphi(5) = -1\,, \\ \varphi(6) = -1\,. \end{cases} ; \qquad \begin{cases} \psi(1) = 0\,, \\ \psi(2) = 1\,, \\ \psi(3) = 1\,, \\ \psi(4) = -1\,, \\ \psi(5) = -1\,, \\ \psi(6) = 0\,. \end{cases} .$$

Интересуваме се от връзките между $\int\limits_{\gamma_j} x^i y^m dx$ за $j = 1, 2, 3, 4$, когато $i$ приема стойности 0 и 1, а $m$ приема стойности 1 и 2.След като пресметнем резидуумите на базисните диференциални форми в безкрайните точки , стигаме до следните релации:

(1.12)

$$\int\limits_{\gamma_3} [y]_h' \, dx = \int\limits_{\gamma_2} [y]_h' \, dx \quad ;$$

$$\int\limits_{\gamma_3} [xy]_h' \, dx = \int\limits_{\gamma_2} [xy]_h' \, dx + \tfrac{2\pi i}{\sqrt{\Delta}} \varphi(k) \quad ;$$

$$\int\limits_{\gamma_3} [y^2]_h' \, dx = \int\limits_{\gamma_2} [y^2]_h' \, dx + \tfrac{2\pi i}{C} \left\{ 1 + 3\left( [\varphi(k)]^2 - 1 \right) - \tfrac{B}{\sqrt{\Delta}} \varphi(k) \right\} \quad ;$$

$$\int\limits_{\gamma_3} [xy^2]_h' \, dx = \int\limits_{\gamma_2} [xy^2]_h' \, dx + \tfrac{\pi i}{C^2} \left\{ 3\left( 1 - [\varphi(k)]^2 \right) - 1 + \varphi(k) \tfrac{B}{\Delta\sqrt{\Delta}} [\Delta - 2C(A + C)] \right\} \quad .$$

(1.13)

$$\int\limits_{\gamma_4} [y]_h' \, dx = \int\limits_{\gamma_2 + \gamma_1} [y]_h' \, dx \quad ;$$

$$\int\limits_{\gamma_4} [xy]_h' \, dx = \int\limits_{\gamma_2 + \gamma_1} [xy]_h' \, dx + \tfrac{2\pi i}{\sqrt{\Delta}} \psi(k) \quad ;$$

$$\int\limits_{\gamma_4} [y^2]_h' \, dx = \int\limits_{\gamma_2 + \gamma_1} [y^2]_h' \, dx + \tfrac{2\pi i}{C} \left\{ -1 + 3\left( 1 - [\psi(k)]^2 \right) - \tfrac{B}{\sqrt{\Delta}} \psi(k) \right\} \quad ;$$

$$\int\limits_{\gamma_4} [xy^2]_h' \, dx = \int\limits_{\gamma_2 + \gamma_1} [xy^2]_h' \, dx + \tfrac{\pi i}{C^2} \left\{ 1 + 3\left( [\psi(k)]^2 - 1 \right) + \psi(k) \tfrac{B}{\Delta\sqrt{\Delta}} [\Delta - 2C(A + C)] \right\} \quad .$$

В (1.12) и (1.13) $k$ приема стойности от 1 до 6.

Налице са следните връзки между производните на базисните Абелеви интеграли преди смените на променливите (1.3), (1.4), (1.5), (1.7) и базисните Абелеви интеграли след тези смени:

$$\left[\int\limits_{\widetilde{\delta}(h)} (x+\beta_1)z\,dx\right]' = \frac{\sqrt{D}}{\sqrt{2}m^2\sqrt{|\Delta|}}\left\{-\frac{1}{4C^2}\left[\int\limits_{\delta(h)} y\,dx\right]' - \right.$$

$$\left.\frac{1}{C}\left[\int\limits_{\delta(h)} xy\,dx\right]' + \frac{1}{2B}\left[\int\limits_{\delta(h)} y^2\,dx\right]' + \frac{C}{B}\left[\int\limits_{\delta(h)} xy^2\,dx\right]'\right\} \quad ;$$

(1.14)

$$\left[\int\limits_{\widetilde{\delta}(h)} z\,dx\right]' = -\frac{\sqrt{D}}{\sqrt{2}m\sqrt{|\Delta|}}\left\{\frac{1}{2C}\left[\int\limits_{\delta(h)} y\,dx\right]' + \left[\int\limits_{\delta(h)} xy\,dx\right]'\right\} \quad ;$$

$$\left[\int\limits_{\widetilde{\delta}(h)} \frac{z}{x+\beta_1}\,dx\right]' = -\frac{\sqrt{D}}{\sqrt{2}\sqrt{|\Delta|}}\left[\int\limits_{\delta(h)} y\,dx\right]' \quad ;$$

$$\left[\int\limits_{\widetilde{\delta}(h)} \frac{z}{(x+\beta_1)^2}\,dx\right]' = \frac{\sqrt{2}C\sqrt{D}m}{\sqrt{|\Delta|}}\left\{-\left[\int\limits_{\delta(h)} y\,dx\right]' + 2C\left[\int\limits_{\delta(h)} xy\,dx\right]' + \right.$$

$$\left.\frac{2C^2}{B}\left[\int\limits_{\delta(h)} y^2\,dx\right]'\right\} \quad ,$$

където $m = -\frac{\sqrt{D}}{2\Delta}$.

До края на настоящата работа ще използваме диференциалните едно - форми $\omega_j$, $j = 0, 1, 2, 3$, дефинирани с равенствата:

$$\left\{\begin{array}{ll} \omega_0 = \frac{dx}{z} \quad ; & \omega_1 = \frac{x+\beta_1}{z}dx \quad ; \\ \omega_2 = \frac{dx}{z(x+\beta_1)} \quad ; & \omega_3 = \frac{(x+\beta_1)^2}{z}dx \quad . \end{array}\right. \tag{1.15}$$

Тези 1- форми възникват по следния начин:

$$(1.16)\qquad \begin{array}{ll} \left[\int\limits_{\widetilde{\gamma}_j} \frac{z}{(x+\beta_1)}dx\right]' = \int\limits_{\widetilde{\gamma}_j} \omega_0 \ ; & \left[\int\limits_{\widetilde{\gamma}_j} zdx\right]' = \int\limits_{\widetilde{\gamma}_j} \omega_1 \ ; \\ \left[\int\limits_{\widetilde{\gamma}_j} \frac{z}{(x+\beta_1)^2}dx\right]' = \int\limits_{\widetilde{\gamma}_j} \omega_2 \ ; & \left[\int\limits_{\widetilde{\gamma}_j} (x+\beta_1)zdx\right]' = \int\limits_{\widetilde{\gamma}_j} \omega_3 \ . \end{array}$$

От (1.12), (1.13), (1.14), (1.16) извличаме следните релации:

$$(1.17)\qquad \begin{array}{l} \int\limits_{\widetilde{\gamma}_3} \omega_0 = \int\limits_{\widetilde{\gamma}_2} \omega_0 \\ \int\limits_{\widetilde{\gamma}_3} \omega_1 = \int\limits_{\widetilde{\gamma}_2} \omega_1 + 2\pi i\sqrt{2}\sqrt{sgn\Delta}\varphi(k) \\ \int\limits_{\widetilde{\gamma}_3} \omega_2 = \int\limits_{\widetilde{\gamma}_2} \omega_2 - \frac{2\pi i\sqrt{2}C^2D}{B\Delta\sqrt{|\Delta|}}\left[3[\varphi(k)]^2 - 2\right] \\ \int\limits_{\widetilde{\gamma}_3} \omega_3 = \int\limits_{\widetilde{\gamma}_2} \omega_3 + 2\pi i 2\sqrt{2}\beta_1\sqrt{sgn\Delta}\varphi(k) \end{array}$$

$$(1.18)\qquad \begin{array}{l} \int\limits_{\widetilde{\gamma}_4} \omega_0 = \int\limits_{\widetilde{\gamma}_2+\widetilde{\gamma}_1} \omega_0 \\ \int\limits_{\widetilde{\gamma}_4} \omega_1 = \int\limits_{\widetilde{\gamma}_2+\widetilde{\gamma}_1} \omega_1 + 2\pi i\sqrt{2}\sqrt{sgn\Delta}\psi(k) \\ \int\limits_{\widetilde{\gamma}_4} \omega_2 = \int\limits_{\widetilde{\gamma}_2+\widetilde{\gamma}_1} \omega_2 - \frac{2\pi i\sqrt{2}C^2D}{B\Delta\sqrt{|\Delta|}}\left[2 - 3[\psi(k)]^2\right] \\ \int\limits_{\widetilde{\gamma}_4} \omega_3 = \int\limits_{\widetilde{\gamma}_2+\widetilde{\gamma}_1} \omega_3 + 2\pi i 2\sqrt{2}\beta_1\sqrt{sgn\Delta}\psi(k) \end{array}$$

В (1.17) и (1.18) $k$ приема стойности от 1 до 6.

Нека с $J(h)$ означим израза

$$J(h) = \frac{d}{dh}\left\{\widetilde{u}_\mu(h)\int\limits_{\widetilde{\gamma}_1(h)} zdx + \widetilde{v}_\mu(h)\int\limits_{\widetilde{\gamma}_1(h)} \frac{zdx}{(x+\beta_1)^2} + \right.$$

$$\left. \widetilde{w}_\nu(h)\int\limits_{\widetilde{\gamma}_1(h)} (x+\beta_1)zdx + \widetilde{s}_\rho(h)\int\limits_{\widetilde{\gamma}_1(h)} \frac{zdx}{x+\beta_1} \right\},$$

Понеже $\widetilde{I}(h_1) = 0$, следва, че броят на нулите на $J(h)$ в интервала $(h_1, h_2)$ е горна граница за броя на нулите на $\widetilde{I}(h)$ в този интервал.

Като следствие от (1.17) и (1.18) получаваме следните връзки:

$$\int\limits_{\widetilde{\gamma}_3} \omega = \int\limits_{\widetilde{\gamma}_2} \omega + 2\pi i\sqrt{2}\sqrt{sgn\,\Delta}\,A_\mu(h) \tag{1.19}$$

$$\int\limits_{\widetilde{\gamma}_4} \omega = \int\limits_{\widetilde{\gamma}_2+\widetilde{\gamma}_1} \omega + 2\pi i\sqrt{2}\sqrt{sgn\,\Delta}\,B_\mu(h)\ , \tag{1.20}$$

където с $A_\mu(h)$ и $B_\mu(h)$ сме означили полиномите:

$$A_\mu(h) = [U_\mu(h) + 2\beta_1 W_\nu(h)]\,\varphi(k) + V_\mu(h)\frac{C^2D}{B(\sqrt{\Delta})^3}\left(3[\varphi(k)]^2 - 2\right)\ ;$$

$$B_\mu(h) = [U_\mu(h) + 2\beta_1 W_\nu(h)]\,\psi(k) + V_\mu(h)\frac{C^2D}{B(\sqrt{\Delta})^3}\left(2 - 3[\psi(k)]^2\right)\ ,$$

С $\omega$ сме означили следната диференциална 1 - форма:

$$\omega = U_\mu(h)\,\omega_1 + V_\mu(h)\,\omega_2 + W_\nu(h)\,\omega_3 + S_\rho(h)\,\omega_0\ .$$

$U_\mu(h), V_\mu(h), W_\nu(h), S_\rho(h)$ са полиномите от написаното по - горе развитие на $J(h)$.

Дефинираме помощната функция $F(h)$ със следната формула:

$$F(h) = \frac{J(h)}{\int\limits_{\widetilde{\gamma}_1} \omega_0}\ .$$

**Лема 1.3.** *В сила е следното неравенство:*

$$\left.\left(\int\limits_{\widetilde{\gamma}_1} \omega_0\right)\right|_{h=h_1} \neq 0 \quad . \tag{1.21}$$

Особените точки на многозначната функция $F(h)$ отново са $h_1$, $h_2$, $h_3$, $h_4$. Понеже $J_0(h) \neq 0$ за $h \in \mathbf{C} \setminus \{h_2, h_3, h_4\}$ следва, че $h_1$ е отстранима особеност за $F(h)$. $F(h)$ е еднозначна и холоморфна функция в $h \in \mathbf{C} \setminus [h_2, +\infty)$. Означаваме продълженията на $J_0(h)$ и $F(h)$ по път, лежащ в горната полуравнина съответно с $J_0^+(h)$, $F^+(h)$, а продълженията им по път, лежащ в долната полуравнина с $J_0^-(h)$, $F^-(h)$. В сила е, че $\overline{F^+(h)} = F^-(h)$ и $\overline{J_0^+(h)} = J_0^-(h)$ за $h \in (h_2, h_3) \cup (h_3, h_4) \cup (h_4, +\infty)$.

С цел олекотяване на записа, означаваме с $W_{\gamma_k,\gamma_p}(\omega_l, \omega_m)$ следните Вронскиани:

$$W_{\gamma_k,\gamma_p}(\omega_l, \omega_m) = \begin{vmatrix} \int\limits_{\gamma_k} \omega_l & \int\limits_{\gamma_p} \omega_l \\ \int\limits_{\gamma_k} \omega_m & \int\limits_{\gamma_p} \omega_m \end{vmatrix} \quad .$$

В сила е следната теорема:

**Теорема 1.4.** *В сила са равенствата:*

$$Im\left(F^{\pm}(h)\right) = \pm \frac{i}{2.\left|J_0(h)\right|^2} . \begin{cases} W_{\gamma_1,\gamma_2}(\omega, \omega_0) & , \quad \textit{ако} \quad h \in (h_2, h_3) \quad ; \\ W_{\gamma_1,\gamma_2+\gamma_3}(\omega, \omega_0) & , \quad \textit{ако} \quad h \in (h_3, h_4) \quad ; \\ W_{\gamma_1,\gamma_4}(\omega, \omega_0) & , \quad \textit{ако} \quad h \in (h_4, +\infty) \quad . \end{cases}$$

Въвеждаме функциите: $G_1(h) = i.W_{\gamma_1,\gamma_2}(\omega, \omega_0)$ , $G_2(h) = i.W_{\gamma_1,\gamma_2+\gamma_3}(\omega, \omega_0)$, $G_3(h) = i.W_{\gamma_1,\gamma_4}(\omega, \omega_0)$ , които съответстват на $Im(F(h))$ в различните подинтервали на разреза върху реалната ос.

**Предложение 1.5.** *Функцията $G_2(h)$ е еднозначна и холоморфна в $\mathbf{C} \setminus \{[h_2, h_3] \cup [h_4, +\infty)\}$ . Освен това, са в сила равенствата:*

$$Im(G_2^{\pm}(h)) = \begin{cases} \pm\frac{1}{2}.W_{\gamma_2,\gamma_3}(\omega, \omega_0) \quad \textit{ако} \quad h \in (h_2, h_3) \quad ; \\ \pm\frac{1}{2}.W_{\gamma_4,2\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3}(\omega, \omega_0) \quad \textit{ако} \quad h \in (h_4, +\infty) \; . \end{cases}$$

# 2 Глава II: Оценка броя на нулите на помощната функция $G_2(h)$ в подходяща комплексна област

**Лема 2.1.** *В сила са равенствата:*

$$Im\left(G_2^{\pm}(h)\right)=\begin{cases}\mp\pi.i.\sqrt{2}\sqrt{sgn\Delta}.A_\mu(h).\left(\int\limits_{\widetilde{\gamma}_2}\omega_0\right), & \text{ако } h\in(h_2,h_3)\,;\\ \pm\pi.i.\sqrt{2}\sqrt{sgn\Delta}.\left[2.B_\mu(h)-A_\mu(h)\right].\left(\int\limits_{\widetilde{\gamma}_4}\omega_0\right), & \\ \text{ако } h\in(h_4,+\infty)\,. & \end{cases}$$

**Лема 2.2.** • *В околност на $h_2$ е в сила следната формула:*

(2.1)

$$G_2(h)=2\pi.\sqrt{2}.\sqrt{sgn\Delta}.A_\mu(h).\left(\int\limits_{\widetilde{\gamma}_1}\omega_0\right)+2.i.W_{\widetilde{\gamma}_1,\widetilde{\gamma}_2}(\omega,\omega_0)\,.$$

• *В околност на $h_3$ е в сила формулата:*

(2.2)

$$G_2(h)=-2\pi.\sqrt{2}.\sqrt{sgn\Delta}.A_\mu(h).\left(\int\limits_{\widetilde{\gamma}_1}\omega_0\right)+2.i.W_{\widetilde{\gamma}_1,\widetilde{\gamma}_3}(\omega,\omega_0)\,.$$

• *В околност на $h_4$ е в сила формулата:*

$$\begin{aligned}G_2(h)=&-2\pi.\sqrt{2}.\sqrt{sgn\Delta}.\left[2.B_\mu(h)-A_\mu(h)\right].\left(\int\limits_{\widetilde{\gamma}_1}\omega_0\right)-\\&-2.i.W_{\widetilde{\gamma}_4,\widetilde{\gamma}_1}(\omega,\omega_0)\,.\end{aligned}\tag{2.3}$$

**Лема 2.3.** *За всяко комплексно число $h$, чиито модул е достатъчно голям, функциите $J_j(h)$ $j = 0, 1, 2, 3$ удовлетворяват неравенствата:*

$$
(2.4) \qquad \begin{aligned}
&K_0^{'} \leq |J_0(h)|\,|h|^{\frac{1}{3}} \leq K_0^{''} \ ; \\
&|J_1(h)| \leq K_1 \ ; \\
&|J_2(h)|\,|h|^{\frac{2}{3}} \leq K_2 \ ; \\
&|J_3(h)|\,|h|^{-\frac{1}{3}} \leq K_3 \ ,
\end{aligned}
$$

*където $K_0^{'}$, $K_0^{''}$, $K_j$ са реални константи, $j = 1, 2, 3$. Освен това, $K_0^{'} \neq 0$.*

В разсъжденията и доказателствата до края на тази глава ще имаме нужда от следните означения:

- Означаваме с $D_2$ областта, която се получава като от кръга $\{|h| < R\}$ ($R > 0$ - достатъчно голямо) се премахнат кръговете $\{|h-h_2| \leq r_2\}$, $\{|h - h_3| \leq r_3\}$ и $\{|h - h_4| \leq r_4\}$ ( $r_2 > 0, r_3 > 0, r_4 > 0$ - достатъчно малки) и се направят разрези по два интервала от реалната ос, а именно по интервалите: $[h_2+r_2, h_3-r_3]$ и $[h_4+r_4, R]$.
- Означаваме с $m_1$ броя на нулите на $A_\mu(h)$ в интервала $(-\infty, h_1]$.
- Означаваме с $m_2$ броя на нулите на $A_\mu(h)$ в интервала $[h_1, h_2]$.
- Означаваме с $m_3$ броя на нулите на $A_\mu(h)$ в интервала $[h_2, h_3]$.
- Означаваме с $m_4$ броя на нулите на $A_\mu(h)$ в интервала $[h_3, h_4]$.
- Означаваме с $p_1$ броя на нулите на $2B_\mu(h) - A_\mu(h)$ в интервала $(-\infty, h_1]$.
- Означаваме с $p_2$ броя на нулите на $2B_\mu(h) - A_\mu(h)$ в интервала $[h_1, h_2]$.
- Означаваме с $p_3$ броя на нулите на $2B_\mu(h) - A_\mu(h)$ в интервала $[h_3, h_4]$.
- Означаваме с $p_4$ броя на нулите на $2B_\mu(h) - A_\mu(h)$ в интервала $[h_4, +\infty)$.
- Със $Z_2$ означаваме броя на нулите на функцията $G_2(h)$ в областта $D_2$.

Ще докажем следната теорема:

**Теорема 2.4.** *Ако $n = 1$, тогава $G_2(h) \equiv 0$. За $n \geq 2$, са валидни следните оценки:*

**Случай I.** *Ако* $\begin{cases} A_\mu(h)\not\equiv 0\,; \\ 2B_\mu(h) - A_\mu(h)\not\equiv 0 \end{cases}$ *, тогава* $Z_2 \leq \left[\frac{n}{3}\right] + m_3 + p_4 + 1$ .

**Случай II.** *Ако* $\begin{cases} A_\mu(h)\equiv 0\,; \\ 2B_\mu(h) - A_\mu(h)\not\equiv 0 \end{cases}$ *, тогава* $Z_2 \leq \left[\frac{n}{3}\right] + p_4$ .

**Случай III.** *Ако* $\begin{cases} A_\mu(h)\not\equiv 0\,; \\ 2B_\mu(h) - A_\mu(h)\equiv 0 \end{cases}$ *, тогава* $Z_2 \leq \left[\frac{n}{3}\right] + m_3$ .

**Случай IV.** *Ако* $\begin{cases} A_\mu(h)\equiv 0\,; \\ 2B_\mu(h) - A_\mu(h)\equiv 0 \end{cases}$ *, тогава*

$$\begin{cases} Z_2 \leq \left[\frac{n}{3}\right] - 1\,, & \text{за} \quad n \geq 3\,; \\ G_2(h) \equiv 0\,, & \text{за} \quad n = 2. \end{cases}$$

**Доказателство.**

Ако $n = 1$, тогава $U_\mu(h) = V_\mu(h) = W_\nu(h) \equiv 0$, следователно $G_2(h) \equiv 0$.

За $n \geq 2$, ще извършим доказателството с помощта на Принципа на аргумента.

Нека радиусът $R > 0$ е толкова голям, че всички нули на полиномите $A_\mu(h), 2B_\mu(h) - A_\mu(h)$ да са във вътрешността на $\{|h| < R\}$. Частите от контура на $D_2$, разположени съответно в горната и в долната полуравнина, имат симетрични образи относно реалната ос под действието съответно на $G_2^+(h)$ и $G_2^-(h)$.

Ще разгледаме четирите възможни случаи от формулировката на теоремата.

**Случай I.** Ако $\begin{cases} A_\mu(h)\not\equiv 0\,; \\ 2B_\mu(h) - A_\mu(h)\not\equiv 0 \end{cases}$ .

Ще оценим изменението на $arg\, G_2(h)$ върху голямата и върху малките окръжности с помощта на Лема 2.3 и Лема 2.2. За да оценим нарастването на $arg\, G_2(h)$ върху бреговете на разрезите, ще оценим броя на нулите на $Im\, G_2^{\pm}(h)$ върху тези отсечки.

Лема 2.3 ни дава оценките:

- Ако $n = 3k + 1$, с $k \geq 1$; или $n = 3k$, с $k \geq 1$, тогава аргументът на $G_2(h)$ нараства върху окръжността $\{|h| = R\}$ с не повече от $(k-1)2\pi \pm \varepsilon_1$.
- Ако $n = 3k + 2$, с $k \geq 0$, тогава $arg\, G_2(h)$ нараства върху окръжността $\{|h| = R\}$, с не повече от $(k - \frac{1}{3})2\pi \pm \varepsilon_2$.

Положителните числа $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ са достатъчно малки за $R > 0$ - достатъчно голямо.

Обобщавайки формулите от Лема 2.2, извличаме следния вид на $G_2(h)$ в околност на $h_j$ с $j = 2, 3, 4$:

$$G_2(h) = p_j(h - h_j)log(h - h_j) + q_j(h - h_j)\,,$$

където $p_j(h - h_j)$ и $q_j(h - h_j)$ са холоморфни и еднозначни функции в околност на точката $h = h_j$. Ако $[p_j(0)]^2 + [q_j(0)^2] > 0$, тогава изменението на аргумента на $G_2(h)$ върху $\{|h - h_j| = r_j\}$ може да се направи по абсолютна стойност по - малко от произволно положително число за $r_j > 0$ е достатъчно малко. Ако и двете функции $p_j(h - h_j)$ и $q_j(h - h_j)$ имат $l$ кратна нула за $h = h_j$, тогава, нарастването на аргумента на $G_2(h)$ върху $\{|h - h_j| = r_j\}$ е не по - голямо от $-2l\pi \pm \varepsilon$, където $\varepsilon$ е положително число, което става произволно малко за $r_j > 0$ достатъчно малко.

Лема 2.2 описва $Im\, G_2^{\pm}(h)$ в $(h_2, h_3) \cup (h_4, +\infty)$. При движението на $h$ от точката $h = R$, разположена върху долния бряг на разреза $[h_4 + r_4, R]$, до първата (отчитана отдясно наляво) нула на $Im\, G_2^{\pm}(h)$ върху този разрез, аргументът на $G_2(h)$ би могъл да нарастне с почти половин оборот. Освен това, имаме, че $Im\, G_2^{\pm}(-R) = 0$, и $Im\, G_2^{\pm}(h_4 - r_4) = 0$. Поради това, недовършеният оборот (в положителна посока) на $arg\, G_2(h)$ върху голямата окръжност, би могъл да се дозатвори. Всяка от нулите на $Im\, G_2^{+}(h)$ върху $[h_2 + r_2, h_3 - r_3]$ и $[h_4 + r_4, R]$ (на брой общо $m_3 + p_4$) би могла да има принос цял оборот в положителна посока в изменението на $arg\, G_2(h)$. Понеже $Im\, G_2^{\pm}(h_2 - r_2) = 0$ и $Im\, G_2^{\pm}(h_3 + r_3) = 0$ тогава е възможен още един оборот нарастване за $arg\, G_2(h)$.

Така стигаме до извода, че когато $h$ пробяга еднократно контура на $D_2$ в положителна посока, аргументът на $G_2(h)$ нараства с не повече от

$2\pi\left\{\left[\frac{n}{3}\right]+m_3+p_4+1\right\}$. Тоест е в сила оценката:

$$Z_2\leq\left[\frac{n}{3}\right]+m_3+p_4+1\quad \text{ako}\quad n\geq 2\,.$$

**Случай II.** Ако са изпълнени условията:

$$\begin{cases} A_\mu(h)\equiv 0\,;\\ 2B_\mu(h)-A_\mu(h)\not\equiv 0\,.\end{cases}$$

$G_2(h)$ може да се продължи до еднозначна и холоморфна функция в $\mathbf{C}\setminus\{[h_4,+\infty)\bigcup\{h_2,h_3\}\}$. Проследяваме изменението на аргумента ѝ върху контура на областта $D_2^{'}$, която се получава като от $\{|h|<R\}$ се изрежат малките кръгове $\{|h-h_2|\leq r_2\}$, $\{|h-h_3|\leq r_3\}$, $\{|h-h_4|\leq r_4\}$ и се направи разрез върху отсечката от реалната ос $[h_4+r_4,R]$. Когато $h$ пробяга еднократно контура на $D_2^{'}$ в положителна посока, аргументът на $G_2(h)$ нараства с не повече от $2\pi\left\{\left[\frac{n}{3}\right]+p_4\right\}$.

**Случай III.** Ако са изпълнени условията:

$$\begin{cases} A_\mu(h)\not\equiv 0\,;\\ 2B_\mu(h)-A_\mu(h)\equiv 0\,.\end{cases}$$

Тогава $G_2(h)$ може да се продължи до еднозначна и холоморфна функция в $\mathbf{C}\setminus\{[h_2,h_3]\bigcup\{h_4\}\}$. Проследяваме изменението на $arg\,G_2(h)$ върху контура на областта $D_2^{''}$, която се получава като от $\{|h|<R\,\}$ се изрежат малките кръгове $\{|h-h_2|\leq r_2\}$, $\{|h-h_3|\leq r_3\}$, $\{|h-h_4|\leq r_4\}$ и се направи разрез върху отсечката от реалната ос $[h_2+r_2,h_3-r_3]$. Върху голямата окръжност $arg\,G_2(h)$ се изменя с цяло кратно на $2\pi$, следователно нараства с не повече от $2\pi\left\{\left[\frac{n}{3}\right]-1\right\}$. Върху всяка една от малките окръжности нарастването на $arg\,G_2(h)$ е по - малко или равно на $\varepsilon$, където $\varepsilon$ е положително число, което става произволно малко за $r_j>0$ достатъчно малки. ($j=2,3,4$). Всяка от нулите на $A_\mu(h)$ върху $[h_2,h_3]$ би могла да дава принос един оборот в положителна посока в изменението на $arg\,G_2(h)$. Поради нулите на $Im\,G_2^{\pm}(h)$ в точките $h_2-r_2$ и $h_3+r_3$ би могъл да се "затвори"още един оборот в положителна посока в изменението на $argG_2(h)$. Следователно, когато $h$ пробяга еднократно контура на $D_2^{''}$ в положителна посока, аргументът на $G_2(h)$ нараства с не повече от $2\pi\left\{\left[\frac{n}{3}\right]+m_3\right\}$.

**Случай IV.** Ако са изпълнени условията:

$$\begin{cases} A_\mu(h)\equiv 0\,;\\ 2B_\mu(h)-A_\mu(h)\equiv 0\,.\end{cases}$$

$G_2(h) \equiv 0$ за $n = 2$. Нека $n \geq 3$. Тогава $G_2(h)$ може да се продължи до еднозначна и холоморфна функция в $\mathbf{C} \setminus \{h_2, h_3, h_4\}$. Проследяваме изменението на аргумента на $G_2(h)$ върху контура на областта $D_2^{'''}$, която се получава като от $\{|h| < R\}$ се изрежат малките кръгове $\{|h - h_2| \leq r_2\}$, $\{|h - h_3| \leq r_3\}$, $\{|h - h_4| \leq r_4\}$. Върху голямата окръжност $arg\, G_2(h)$ се изменя с цяло кратно на $2\pi$, следователно нараства с не повече от $2\pi \left\{ \left[\frac{n}{3}\right] - 1 \right\}$. Върху всяка една от малките окръжности нарастването на $arg\, G_2(h)$ е по - малко или равно на $\varepsilon$, където $\varepsilon$ е положително число, което става произволно малко за $r_j > 0$ достатъчно малки. ($j = 2, 3, 4$). Щом $h$ пробяга еднократно контура на $D_2^{'''}$ в положителна посока, аргументът на $G_2(h)$ нараства с не повече от $2\pi \left\{ \left[\frac{n}{3}\right] - 1 \right\}$. С други думи:

$$Z_2 \leq \left[\frac{n}{3}\right] - 1 \quad \text{ako} \quad n \geq 3\,.$$

Сега $Z_2$ е броят на нулите на $G_2(h)$ в областта $D_2^{'''}$.

**ЛИТЕРАТУРА:**


[1] V. I. Arnold. Loss of stability of sel-oscillations close to resonance and versal deformations of equivariant vector fields. *Funct. Anal. Appl.* **11** (1977), 85-92.

[2] V. I. Arnold. ”Arnold’s Problems”. *Springer - Verlag, Berlin*, 2004.

[3] V. I. Arnold, S. M. Gusein-Zade, A. N. Varchenko, Singularities of Differentiable Maps. Vol II. Monodromy and Asymptotics of Integrals, Monographs in Mathematics, vol. 83, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1988.

[4] G. Binyamini, S. Yakovenko. Polynomial bounds for oscillation of solutions of Fuchsian systems, *Preprint arXiv: 0808.2950v1 [math. DS]* (2008), 1-31.

[5] G. Binyamini, D. Novikov, S. Yakovenko. On the number of zeros of Abelian integrals. A constructive solution of the Infinitesimal Hilbert Sixteenth Problem. *Preprint arXiv: 0808.2952v2 [math. DS]* (2008), 1-57.

[6] L.Gavrilov. Nonoscillation of elliptic integrals related to cubic polynomials with symmetry of order three., *Bull. Lond. Math. Soc.* **30** (1998), 267-273.

[7] L.Gavrilov. The infinitesimal 16th Hilbert problem in the quadratic case, *Invent. Math.* **143** (2001), 449-497.

[8] L. Gavrilov and E. Horozov, Limit cycles of perturbations of quadratic Hamiltonian vector fields, *J. Math. Pures Appl.* (9) **72** (1993), No 2, 213 - 238.

[9] L. Gavrilov and I. D. Iliev, The displacement map associated to polynomial unfoldings of planar Hamiltonian vector fields, *Amer. J. Math.*, Vol. **127(6)**, (2005), 1153-1190.

[10] L. Gavrilov and I. D. Iliev, Second-order analysis in polynomially perturbed reversible quadratic Hamiltonian Systems, *Ergodic Theory and Dynamical systems* **20** (2000), 1671-1686.

[11] A. Glutsyuk, Yu. Ilyashenko. Restricted version of the infinitesimal Hilbert 16th problem, *Mosc. Math. J.* **7** (2007), No 2, 281-325, 351.

[12] D. Hilbert, Mathematische Probleme (lecture), Second Internat. Congress Math., Paris 1900, *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen Math. - Phys.* **K1** (1900), 253-297.

[13] E. Horozov and I. D. Iliev, Linear estimate for the number of zeros of Abelian integrals with cubic Hamiltonians, *Nonlinearity* **11** (1998), 1521 - 1537 .

[14] E. Horozov and I. D. Iliev, On the number of limit cycles in perturbations of quadratic Hamiltonian systems, *Proc. Lond. Math. Soc.* **69** (1994) No 1, 198 - 224 .

[15] E. Horozov and I. D. Iliev, Perturbations of quadratic Hamiltonian systems with symmetry, *Annales de l'I. H. P., Section C*, **tome 13**, No 1 ( **1996**), 198 - 224 .

[16] E. Horozov and A. Mihajlova, An improved estimate for the number of zeros of Abelian integrals for cubic Hamiltonians, *Nonlinearity* **23** (2010) , 3053 - 3069 .

[17] I. D. Iliev, On the limit cycles available from polynomial perturbations of the Bogdanov - Takens Hamiltonian, *Israel J. Math.* **115** (2000), 269-284 .

[18] Yu. Ilyashenko. Appearance of limit cycles in perturbation of the equation $\frac{d\omega}{dz} = -\frac{R_z}{R_\omega}$ where $R(z, \omega)$ is a polynomial. *Mat. Sbornik* **78** (1969), 360-373.

[19] Yu. S. Ilyashenko, S. Yakovenko. Double exponential estimate for the number of zeros of complete Abelian integrals and rational envelopes of linear ordinary differential equations with an irreducible monodromy group. *Inventiones Math.***121** (1995) No 3, 613-650.

[20] Yu. S. Ilyashenko. Centennial history of Hilbert's 16th problem. *Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.)* **39** (2002) No 3, 301-354 (electronic).

[21] Yu. S. Ilyashenko, S. Yakovenko. Lectures on analytic differential equations. Graduate Studies in Mathematics, vol. 86 *American Math. Soc., Providence*, RI, 2008.

[22] A. G. Khovanskiĭ. Real Analytic Manifolds with Finiteness Properties and Complex Abelian Integrals. *Funct. Anal.Appl.,* **18** (1984), 119-128.

[23] J. Li. Hilbert's 16th problem and bifurcations of planar polynomial vector fields. *Int. J. Bifurcat. Chaos,* **13 (1)** (2003), 47-106.

[24] A. Mihajlova. Estimate for the number of zeros of Abelian integral on elliptic curves. *Serdica, Math. J.* **30** (2004), 1-16.

[25] D. Novikov, S. Yakovenko. Simple exponential estimate for the number of real zeros of complete Abelian integrals. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **45** (1995) No 4, 897-927 .

[26] G. S. Petrov. Elliptic integrals and their non - oscillatorness. *Funct. Annal. Appl.* **20** (1986) No 1, 46-49 .

[27] G. S. Petrov. On the nonoscillation of elliptic integrals. *Funktsional. Anal. i Prilozhen. Appl.* **31** (1997) No 4, 47-51 , 95.

[28] A. N. Varchenko. Estimate of the Number of Zeros of Abelian Integrals Depending on Parameters and Limit Cycles. *Funct. Anal. Appl.* **18** (1984), 98-108 .

[29] C. Wu, Y. Xia. The number of limit cycles of cubic Hamiltonian System with perturbation. *Nonlinear Anal.: Real World Appl.* **7** (2006), 943-949.

[30] S. Yakovenko. Complete Abelian integrals as rational envelopes. *Nonlinearity* **7** (1994), 1237-1250 .

[31] S. Yakovenko. Quantitative theory of ordinary differential equations and the tangential Hilbert 16th problem. On finiteness in differential equations and Diophantine geometry. CMR Monogr. Ser., vol. 24, *Amer. Math. Soc., Providence*, RI, 2005, 41-109.

[32] J. Yang, L. Zhao. Zeros of Abelian integrals for a quartic Hamiltonian with figure-of-eight loop through a nilpotent saddle. *Nonlinear analysis - real world applications* (Volume: 27), (2016), 350-365.

[33] J. Yang, L. Zhao. The cyclicity of period annuli for a class of cubic Hamiltonian systems with nilpotent singular points. *Journal of differential equations* (Volume: 263), Issue: 9,(2017), 5554-5581.

[34] Yu. Zhao, W. Li, C. Li, Zh. Zhang. Linear estimate of the number of zeros of Abelian integrals for quadratic centers having almost all their orbits formed by cubics. *Sci. China (Ser. A)* **45** (2002), 964-974 .

**Ана Михайлова**
Шуменски университет ”Епископ Константин Преславски”
Е-мейл: a.mihaylova@shu.bg

Annual of Konstantin Preslavsky University of Shumen
Faculty of Mathematics and Informatics , vol. XIX C, 2018, pp. 149 - 155

# BOURGAIN ALGEBRAS OF SOME IDEALS IN $H^{\infty}$ *

**MIROSLAV K. HRISTOV**

***ABSTRACT:*** *Let* $B$ *be a Blaschke product having simple zeros and let I be a principal ideal in* $H^{\infty}$ *generated by* $B$ *. In this article is shown that the Bourgain algebra of* $I$ *relative to* $L^{\infty}$ *contains the Sarason algebra* $H^{\infty}+C$ *. i.e.* $\left(I, L^{\infty}\right)_{b} \supset H^{\infty}+C$

***KEYWORDS:*** *Bounded analytic functions; Bourgain algebras; Blaschke products; Ideals; Finitely generated ideals.*

## 1 Introduction and preliminaries

Let $H^{\infty}$ be the algebra of bounded analytic functions in the open unit disk $D$ (with pointwise operations and the supremum norm) and $L^{\infty}(T)$ be the algebra of all essentially bounded, Lebesque measurable functions on the unit circle $\partial D = T$ . Taking the boundary values of the functions on $T$ we can consider $H^{\infty}$ as a closed subalgebra of $L^{\infty}(T)$ . Its spectrum, or maximal ideal space, is the space $M(H^{\infty})$ of all nonzero multiplicative linear functionals on $H^{\infty}(D)$ endowed with the weak*- topology. Then $M(H^{\infty})$ is a compact Hausdorff space and the corona theorem says that $D$ is dense in $M(H^{\infty})$ [1]. We denote the space of continuous functions on $T$ by $C = C(T)$. Let $z$ belongs to $D$ and $\varphi_z(f) = f(z)$ for every $f \in H^{\infty}$ . Then $\varphi_z$ is a complex homomorphism "evaluation at the point $z$", i.e. $\varphi_z \in M\left(H^{\infty}\right) \subset \left(H^{\infty}\right)^{*}$.

* The author would like to thank for support of Shumen University through Scientific Research Grant RD-08-119/2018.

A sequence $\{z_n\}_n$ in $D$ is called interpolating if for every bounded sequence $\{a_n\}_n$ of complex numbers there is a function $f \in H^\infty$ such that $f(z_n) = a_n$ for all $n$.

For a sequence $\{z_n\}_n$ in $D$ with $\sum_{n=1}^{\infty}(1-|z_n|) < \infty$, the function:

$$B(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{-\overline{z}_n}{|z_n|} \frac{z - z_n}{1 - \overline{z}_n z}, \; z \in D,$$

is called a Blaschke product with zeros $\{z_n\}_n$. If $\{z_n\}_n$ is an interpolating sequence, then $B(z)$ is also called interpolating. The study of interpolating sequences is useful in many areas of function theory and operator theory. Interpolating sequences can be applied for obtaining new scalar solutions of nonlinear differential equations using results in $[2]$ and $[3]$.

A closed subalgebra between $H^\infty$ and $L^\infty$ is called a Douglas algebra. By the Chang Marshall theorem $[1]$, every Douglas algebra $A$ coincides with the closed subalgebra generated by $H^\infty$ and complex conjugate of interpolating Blaschke products $B$ with $\overline{B} \in A$. The Sarason algebra $H^\infty + C$ is a typical Douglas algebra and $H^\infty + C = \left[H^\infty, \overline{z}\right]$.

If $X$ is any commutative algebra, we denote by

$$I = I(f_1, f_2, ..., f_N) = \left\{ \sum_{i=1}^{N} h_i f_i : h_i \in X \right\}$$

the ideal generated by the $f_i$. If $N$ can be chosen to be one, then $I$ is call a principal ideal. We will say that $I$ is radical ideal if $f \in I$ whenever some power $f^n$ of $f \in X$ belong to *I*.

In $[4]$ it was shown that in $H^\infty$ a radical ideal $I \neq (0)$ is finitely generated if and only if *I* is a principal ideal generated by a Blashke product having simple zeros.

Let $Y$ be a Banach algebra and $X$ be a linear subspace of $Y$. The Bourgain algebra $X_b$ or $(X,Y)_b$ of $X$ relative to $Y$ is defined to the set of all $f \in Y$ such that:

if $f_n \to 0$ weakly in $X$, then $\operatorname{dist}\left(f.f_n, X\right) \to 0$.

The distance, $\operatorname{dist}\left(f.f_n, X\right)$ between $f.f_n$ and $X$ is the quotient norm of the coset $f.f_n + X$ in the space $Y/X$. J. Cima and R. Timony $[5]$ proved that: $X_b$ is a closed subalgebra of $Y$ and contains the constant functions; if $X$ is an algebra then $X \subset X_b$. In $[6]$ J. Cima, Sv. Janson and K. Yale showed that that the Bourgain algebra of $H^\infty$ relative $L^\infty(T)$ is $H^\infty + C$. P. Gorkin, K. Izuchi and R. Mortini $[7]$ present another proof. They also prove many properties of the Bourgain algebras in the case $Y = L^\infty(T)$ and $X$ - closed subalgebra between $H^\infty$ and $L^\infty(T)$.

In this paper we prove that Bourgain algebra of $I$ relative to $L^\infty$, contains the Sarason algebra i.e. $\left(I, L^\infty\right)_b \supset H^\infty + C$, where $I$ is principal ideal in $H^\infty$ generated by Blashke product, having simple zeros.

## 2 The main result

**Theorem 2.1**. Let $I$ be a principal ideal in $H^\infty$ generated by Blaschke product $B$ having simple zeros. The Bourgain algebra of $I$ relative to $L^\infty$ contains the Sarason algebra $H^\infty + C$, i.e. $\left(I, L^\infty\right)_b \supset H^\infty + C$.

Proof: Since $I = BH^\infty$ is an algebra, the space $\left(I, L^\infty\right)_b$ is a closed subalgebra of $L^\infty$ and $I \subset \left(I, L^\infty\right)_b$. If $f \in H^\infty$ then $f.Bg \in H^\infty$ for every $g \in H^\infty$ and we obtain that $H^\infty \subset \left(I, L^\infty\right)_b$.

(i) First we will look at the case when $B(0) \neq 0$.

Let $f_n \to 0$ weakly in $I = BH^\infty$. Since $BH^\infty$ is contains in $H^\infty$ therefore $f_n \to 0$ weakly in $H^\infty$, i.e. $\varphi(f_n) \to 0$ for all $\varphi$ in $\left(H^\infty\right)^*$. For $\varphi = \varphi_0$ we have $\varphi_0(f_n) = f_n(0) \to 0$. If $f_n = Bg_n$ where $g_n \in H^\infty$ then $f_n(0) = B(0)g_n(0)$. But $B(0) \neq 0$ and we obtain $g_n(0) \to 0$.

Put $t_n(z) = g_n(z) - g(0)$. Since

$$\overline{z}t_n = \left(g_n\left(z\right) - g_n\left(z\right)\right).\overline{z} = \left(g_n\left(z\right) - g_n\left(z\right)\right)/z$$

for $z \in T$ and $\left(g_n\left(z\right) - g_n\left(z\right)\right)/z \in H^\infty$ then $\overline{z}t_n \in H^\infty$. Hence

$$dist\left(\overline{z}f_n, I\right) = dist\left(\overline{z}Bg_n, BH^\infty\right) = dist\left(\overline{z}g_n, H^\infty\right) = dist\left(\overline{z}t_n + \overline{z}g_n\left(0\right), H^\infty\right) =$$

$$dist\left(\overline{z}g_n(0), H^\infty\right) = \inf\left\{\|h\|_\infty : h \in \left[\overline{z}g_n(0)\right]\right\} \le \|\overline{z}g_n(0)\| = |g_n(0)| \to 0$$

and $\overline{z}$ belongs to $\left(I, L^\infty\right)_b$.

(ii) Now let $B(0) = 0$. Since $B$ is a Blaschke product having simple zeros we may consider that $B = zb$ and $b$ is a Blaschke product such that $b(0) \ne 0$. If $f_n \to 0$ weakly in $I = BH^\infty$, then $f_n \to 0$ weakly in $bH^\infty$, because $I = BH^\infty = zbH^\infty \subset bH^\infty$. If $f_n = Bg_n$ where $g_n \in H^\infty$ we have:

$$dist\left(\overline{z}f_n, I\right) = dist\left(\overline{z}Bg_n, I\right) = dist\left(\overline{z}Bg_n, zbH^\infty\right) = dist\left(\overline{z}^2 Bg_n, bH^\infty\right) \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

as using the case (i) $\overline{z}^2$ belongs in $\left(bH^\infty, L^\infty\right)_b$. Therefore $\overline{z}$ belongs to $\left(I, L^\infty\right)_b$.

Since $z$ and $\overline{z}$ belong to the closed subalgebra $\left(I, L^\infty\right)_b$ of $L^\infty$, then by the Weierstrase theorem we have $C \subset \left(I, L^\infty\right)_b$ .The theorem is proved.

**Corollary 2.2.** Let $I \ne (0)$ be a finitely generated radical ideal in $H^\infty$. Then $\left(I, L^\infty\right)_b \supset H^\infty + C$

Proof: By [3] $I$ is a principal ideal generated by e Blashke product having simple zeros and we can apply **Theorem 2.1.**

In the case where $I$ is a principal ideal in $H^\infty$ generated by a finite Blaschke product it can be proven that $\left(I, L^\infty\right)_b \supset H^\infty + C$.

We need two lemmas.

**Lemma 2.3.** $[1]$. If $\{z_n\} \subset D$ is interpolating sequence, then there exist functions $\{f_n\} \subset H^\infty$ and positive number $M$ such that $f_n\left(z_n\right) = 1$ for all $n$, $f_n(z_k)=0$ for $n\neq k$ and $\sum_{n=1}^{\infty}\left|f_n(z)\right|\leq M$ for all $z\in D$.

**Lemma 2.4.** $[6]$. Suppose that $\{f_n\}$ is a sequence in $H^{\infty}$ such that $\sum_{n=1}^{\infty}\left|f_n(z)\right|\leq M$ for all $z\in D$. Then $f_n\to 0$ weakly in $H^{\infty}$.

**Theorem 2.5.** Let $I$ be a principal ideal in $H^{\infty}$ generated by a finite Blaschke product $B$ . Then $\left(I,L^{\infty}\right)_b=H^{\infty}+C=\left(H^{\infty},L^{\infty}\right)_b$.

Proof: Since $B$ is a finite Blaschke product, then $zB$ and $\overline{zB}$ belongs to $H^{\infty}+C=\left(H^{\infty},L^{\infty}\right)_b$ $[1]$. If $f_n\to 0$ weakly in $BH^{\infty}\subset H^{\infty}$ then $f_n\to 0$ weakly in $H^{\infty}$ and we obtain:

$$dist\left(\overline{z}f_n,I\right)=dist\left(\overline{z}f_n,BH^{\infty}\right)=dist\left(\overline{zB}.f_n,H^{\infty}\right)\to 0\text{, i.e. }\overline{z}\in\left(I,L^{\infty}\right)_b.$$

Since $H^{\infty}\subset\left(I,L^{\infty}\right)_b$ this means $H^{\infty}+C=\left(H^{\infty},L^{\infty}\right)_b\subset\left(I,L^{\infty}\right)_b$.

Hence $\left(I,L^{\infty}\right)_b$ is a Douglas algebra which contains $\left[H^{\infty},\overline{z}\right]$. By the Chang Marshall theorem every Douglas algebra $A$ such that $\left[H^{\infty},\overline{z}\right]\subsetneq A$ is generated by $H^{\infty}$ and complex conjugate of infinite interpolating Blaschke products. To show equality is sufficiently to prove that $\left(I,L^{\infty}\right)_b$ does not contain the complex conjugate of any infinite interpolating Blaschke product.

Let $q$ be an interpolating Blaschke product and let $\{z_n\}\subset D$ denote the zero sequence of $q$. According to lemma 1.1 there exist functions $\{f_n\}\subset H^{\infty}$ and positive number $M$ such that $f_n(z_n)=1$ for all $n$, $f_n(z_k)=0$ for $n\neq k$ and $\sum_{n=1}^{\infty}\left|f_n(z)\right|\leq M$ for all $z\in D$. Then for functions $g_n(z)=B(z)f_n(z)$ we obtain:

$$g_n\in BH^{\infty}=I;\ g(z_n)=B(z_n)f_n(z_n)=B(z_n)\text{ for all }n;$$

$$g_n\left(z_k\right)=0 \text{ for } n\neq k \text{ and } \sum_{n=1}^{\infty}\left|g_n\left(z\right)\right|\leq M \text{ for all } z\in D.$$

By lemma 1.2 (with $BH^\infty$ instead of $H^\infty$) we have $g_n\to 0$ weakly in $BH^\infty=I$ but:

$$\operatorname{dist}\left(\bar{q}.g_n,\ I\right)=\operatorname{dist}\left(g_n,q.I\right)=\inf\left\{\sup_{z\in D}\left|g_n(z)-q(z).y(z)\right|:y\in I\right\}\geq$$

$$\geq\inf_{z\in D}\left\{\left|g_n\left(z_n\right)-q\left(z_n\right)y\left(z_n\right)\right|:y\in I\right\}=\left|B\left(z_n\right)\right|$$

and $\left|B\left(z_n\right)\right|$ do not turn to zero, because $B$ is a finite Blaschke product.

Thus $\bar{q}\notin\left(I,L^\infty\right)_b$, and the theorem is proved.

Since $z^pH^\infty$ is an algebra, the space $\left(z^pH^\infty\right)_b$ is a closed subalgebra of $L^\infty$ and $z^pH^\infty\subset\left(z^pH^\infty\right)_b$. If $f\in H^\infty$ then $f.z^pg\in z^pH^\infty$ for every $g\in H^\infty$ and we obtain that $H^\infty\subset\left(z^pH^\infty\right)_b$

**REFERENCES**:

[1] J. Garnett, Bounded analytic functions, Springer, Graduate Texts in Mathematics 236, New York, 2007.

[2] Borisova G., K. Kirchev, Solitonic combinations and commuting nonselfadjoint operators, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2015, Volume 424, Issue 1, 21-48

[3] Kirchev K., G. Borisova, Nondissipative Curves in Hilbert Spaces Having a Limit of the Corresponding Correlation Function, Integral Equations Operator Theory, 2001, 40, 309-341.

[4] U. Daepp, P. Gorkin, R. Mortini, Finitely generated radical ideals in $H^\infty$ Proc. Amer. Math. Soc. 116 (1992) 483–488.

[5] J. Cima, R. Timoney, The Dunford-Pettis property for certain planar uniform algebra, Michigan Math. J. 34 (1987), 99-104.

[6] J. Cima, Sv. Janson, K. Yale, Completely continuous Hankel operators on $H^\infty$ and Bourgain algebras, Proc. Amer. Math. Soc., 105 (1989), 121-125.

[7] P. Gorkin, K. Izuchi, R. Mortini, Bourgain algebras of Douglas algebras, Can. J. Math., 44 (4), (1992), 797-804.

**Miroslav Kolev Hristov**
University of Shumen, Faculty of Mathematics and Informatics
115, Universitetska Str.9700 Shumen, Bulgaria
E-mail: miroslav.hristov@shu.bg

Годишник на Шуменски университет „Епископ Константин Преславски“
Факултет по математика и информатика, том XIX C, 2018, стр. 157 - 163

# DETERMINATION OF LOSSES AT WORK ON THE INFORMATION SYSTEM IN CONDITIONS THE EFFECTS OF POSSIBLE THREATS

**ATANAS I. NACHEV, VIKTOR V. DZHELEPOV, VIKTORIA R. YANAKIEVA**

***ABSTRACT:*** *Determining the exact requirements for security for a given organization is essential for implementing the proper security measures. Such measures are designed to protect information systems from security breaches. The Internet and computer networking requires a new security measures and policies to reduce the threats and challenges inherent from these new technologies and software applications and network devices.*

*This paper presents a losses assessment method which is designed to enable the organization to reduce security threats by deploying the most proper security measures, countermeasures, and policies.*

***KEYWORDS***: *information security losses assessment, countermeasures, malicious attacks.*

# ОПРЕДЕЛЯНЕ НА ЗАГУБИТЕ ПРИ РАБОТА НА ИНФОРМАЦИОННА СИСТЕМА В УСЛОВИЯ НА ВЪЗДЕЙСТВИЯ НА ВЪЗМОЖНИ ЗАПЛАХИ

**АТАНАС И. НАЧЕВ, ВИКТОР В. ДЖЕЛЕПОВ, ВИКТОРИЯ Р. ЯНАКИЕВА**

Характерна особеност на Информационни системи (ИС), реализирана с използване на мрежови структури е, че те могат да се намират в няколко работни състояния [1, 2]. Това е свързано с факта, че при отказ на отделни техни елементи или при преднамерно въздействие върху тях, в преобладаващите случаи не се предизвиква отказ на системата като цяло, а само нарушаване в една или друга степен на качеството им на функциониране. С други думи Информационната система от напълно работоспособно състояние преминава в състояние на частична работоспособност. Тази особеност налага въвеждането на критерии, като функционална надеждност и ефективност с отчитане на посочената специфика. Ще разгледаме това по-подробно при следната постановка:

Нека Информационна система реализира $n$ задачи. Под функционална надеждност в отношение изпълнението на $i-$та, $i=\overline{1,n}$, задача се разбира вероятността $P_{\phi i}$, че системата е в състояние да я изпълни в даден момент $t$. Функционалната надеждност по отношение на решаването на всички $n$ задачи се задава чрез матрицата

(1) $$P_{\phi} = \{P_{\phi i}\}, i=\overline{1,n},$$

която може да се представи в следния табличен вид (табл. 1):

**Таблица 1**

| Индекс (номер) $i$ на реализираната задача от ИС | 1 | 2 | 3 | . . . | n |
|---|---|---|---|---|---|
| Вероятност $P_{\phi i}$ за решаването на съответната задача | $P_{\phi 1}$ | $P_{\phi 2}$ | $P_{\phi 3}$ | . . . | $P_{\phi n}$ |

Нека $i-$та, $i=\overline{1,n}$, задача се изпълнява от $M_i$ технически средства, като за зададен цикъл на функциониране $T_{цф}$ тя се реализира $N_i$ пъти. При всяко изпълнение на $i-$та задача, $j-$то устройство реализира своите функции за време $t_{i,j}$. Сумарната продължителност $T_{i,j}$ на работа на това устройство за времето $T_{цф}$ с решаване на $i-$та задача ще бъде:

(2) $$T_{i,j}=N_i t_{i,j}.$$

Вероятността $p_j\left(T_{i,j}\right)$ за безотказна работа на $j-$то устройство при изпълнение на $i-$та задача за времето на функциониране $T_{цф}$ на информационната система е:

(3) $$p_j\left(T_{i,j}\right)=p_{a\,j}\left(T_{i,j}\right).p_{p\,j}\left(T_{ij}\right),$$

където $p_{a\,j}\left(T_{i,j}\right)$ е вероятността за безотказна работа на на $j-$то устройство, а $p_{p\,j}\left(T_{ij}\right)$ вероятност на устойчива негова работа в условия на външни въздействия при решаване на $i-$та задача в продължение на сумарното време $T_{i,j}$.

Нека $K_{Г\,j}$ коефициентът на готовност на $j-$то устройство за изпълнение на разглежданата задача. Тогава за цикъла $T_{цф}$ на функциониране на ИС вероятността $P_{фi}$ за решаване на $i-$та задача ще се определи, като

(4) $$P_{\phi i} = \prod_{j=1}^{M_i} K_{\Gamma j}\, p_j\left(T_{i\,j}\right).$$

Ще обозначим чрез $\lambda_j$ интензивността за невъзможност за нормално функциониране на $j-$то устройство. Ако $\lambda_{a\,j}$ е интензивността на откази на апаратната част на $j-$то устройство, участващо в реализиране на съответната задача от ИС, а $\lambda_{p\,j}$ интензивността на откази поради външно въздействие, при условие, че $\lambda_{a\,j} = const$ и $\lambda_{p\,j} = const$, то

(5) $$p_{a\,j} = \exp\left(-\lambda_{a\,j} T_{i\,j}\right),$$

(6) $$p_{p\,j} = \exp\left(-\lambda_{p\,j} T_{i\,j}\right).$$

Тогава (4) ще приеме вида:

(7) $$P_{\phi i} = \prod_{j=1}^{M_i} K_{\Gamma j}\, \exp\left(-\lambda_{a\,j} T_{i\,j}\right) \exp\left(\lambda_{p\,j}\, T_{i\,j}\right).$$

Ако обработката на информацията се извършва от един централен възел, който за сумарното времето $T_i$ от цикъла $T_{ц\phi}$ на функциониране на ИС е ангажиран с решаването на $i-$та задача, изразът (6.7) ще се преобразува в:

(8)

$$P_{\phi i} = K_{\Gamma 0}\, P_0\left(T_i\right) \prod_{j=1}^{M_i} K_{\Gamma j}\, \exp\left(-\lambda_{a\,j} T_{i\,j}\right) \exp\left(\lambda_{p\,j}\, T_{i\,j}\right),$$

където $К_{Г0}$ е коефициент на готовност, а $P_0(T_i)$- вероятност за безотказна работа на централния възел за времето $T_i$, $К_{Гi}$-на готовност на $j-$ то устройство, $T_{ij}-$ сумарна продължителност на работа на $j-$то устройство от състава на технически средства за решаване на $i-$та задача за времето $T_{цф}$ на функциониране на ИС.

Ще обозначим чрез $E_{0i}$ ефективността от работата на ИС с решаването на $i-$та задача за времето $T_{цф}$. Тогава реалната ефективност $E_i$ от решаването на тази задача, с отчитане на разглежданите смущаващи въздействия ще се определи, като:

(9) $$E_i = P_{фi}\, E_{0i}\,.$$

Ако всички задачи, решавани от ИС са с еднаква тежест (важност), общата ефективност от работата на Информационната система ще е:

(10) $$E = \sum_{i=1}^{n} E_i\;.$$

Ще въведем термина коефициент $К_e$ на ефективно използване на ИС, под който ще разбираме:

(11) $$К_e = \frac{E}{\sum_{i=1}^{n} E_{0i}}.100\%\,.$$

За случай на безотказна работа на средствата на ИС $K_e = 100\%$.

Като правило различните задачи, решавани от ИС в процеса на управление на съответния обект са различна важност. Това ще го оценим чрез коефициента $\alpha_i$, $i = \overline{1,n}$ на значимост на $i -$ та задача, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$. Тогава (10) ще има вида:

(12) $$E = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i E_i .$$

Коефициентът на ефективност в такъв случай ще се определи, като:

$$K_e = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i E_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i E_{0i}} .100\% .$$

**ЛИТЕРАТУРА**:

[1] Начев А. И., Структурнофункционална надеждност на компютърни мрежи, София, Военно издателство, 2002.

[2] Начев А. И, Общосистемно проектиране на Автоматизирани системи за управление, София, За буквите, О‘ писменех, 2014.

[3] Начев А. И., Надеждност на програмното осигуряване. На примера на програмни системи и ткомплекси, Шумен, Университетско издателство „Епископ Константин Преславски“, 2017.

**Атанас Иванов Начев**
Университет по библиотекознание и информационни технологии

E-mail: anatchev@abv.bg

**Виктор Веселинов Джелепов**
Шуменски университет „Епископ Константин Преславски“
E-mail: v.djelepov@shu.bg

**Виктория Янакиева**
Шуменски университет „Епископ Константин Преславски“
E-mail: v.yanakieva@shu.bg

Годишник на Шуменски университет „Епископ Константин Преславски“
Факултет по математика и информатика, том XIX C, 2018, стр. 165 - 169

# MODELS OF INTENSITY OF SOFTWARE DENIAL

**ATANAS I. NACHEV, VIKTORIA R. YANAKIEVA**

***ABSTRACT***: A characteristic feature of the intensity of failure of both technical devices and software is its change over time. The theory of technical reliability distinguishes three main stages of this amendment. Typically, are used models to describe the time-lag intensity of failures, linear decrease of the intensity of failures, exponential failure models.

***KEYWORDS***: intensity of software denial, software failure models

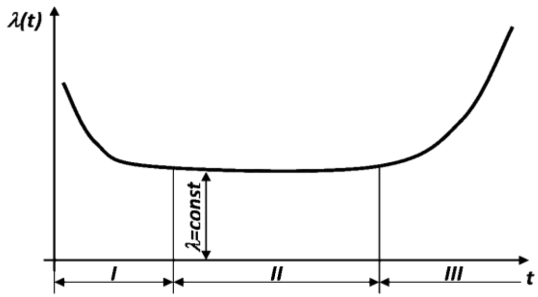
# МОДЕЛИ НА ИНТЕНЗИВНОСТТА НА ОТКАЗИТЕ НА ПРОГРАМНОТО ОСИГУРЯВАНЕ

**АТАНАС И. НАЧЕВ, ВИКТОРИЯ Р. ЯНАКИЕВА**

Характерна особеност на интензивността на възникване на откази, както на технически изделия, така и на програмното осигуряване, е изменението й във времето. В теорията на техническата надеждност се разграничат три основни етапа на това изменение [2]. Те могат да се представят съответно чрез участъците I, II и III на фиг. 1.

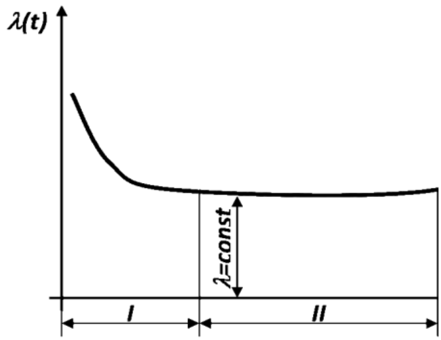
Участъкът I е свързан с възникването на откази в началния период на експлоатация на технически изделия и на програмното осигуряване и за него е характерно намаляване на интензивността на отказите във времето.

За участъка II се приема интензивността за възникване на откази постоянна величина.




**Фиг. 1**

Участъкът III се отнася за случаи на увеличаване на интензивността на възникване на отказите. Характерен е за технически изделия. При тях отказите в този период са резултат, основно, от настъпили изменения в резултат на износване и стареене. По отношение на програмното осигуряване не е характерен, поради факта, че отказите на софтуера не са свързани с протичащи в него физически процеси. Ето защо по отношение на програмното осигуряване могат да се дефинират два основни етапа на изменение във времето на интензивността на настъпващите откази - фиг. 2:




**Фиг. 2**

В теорията и практиката на надеждността на програмното осигуряване най-често се използват [1, 2]:

- модели, описващи постоянна във времето интензивност на отказите;
- модели на линейно намаляне на интензивността на отказите;
- експоненциални модели на отказите.

## Модел на постоянна интензивност на отказите

Описва участък II от фиг. 2. Отнасят се за периода на стабилна работа на програмното осигуряване.

Нека в израза $p(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(t)dt\right)$, известен като основен закон на надеждността положим $\lambda(t) = \lambda = \cos t$. В резултат на това ще получим:

$$p(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda dt\right) = e^{-\lambda t}.$$

## Експоненциален модел на интензивността на отказите

При рязко увеличаване или намаляне на интензивностите на отказите може да се използва следния модел на тяхното описване [2]:

$$\lambda(t) = Ce^{\lambda t};$$

$$f(t) = C\exp(\alpha t)\exp\left\{-\left(\frac{C}{\alpha}\right)[\exp(\alpha t) - 1]\right\};$$

$$p(t) = \exp\left\{-\left(\frac{C}{\alpha}\right)\left[\exp(-\alpha t) - 1\right]\right\}.$$

Характерът на интензивността на отказите зависи от конкретните значения на константите $C$ и $\alpha$.

**Описване на интензивността на отказите чрез степенна функция**

Ще разгледаме случай, когато времето до възникване на отказ се описва чрез разпределението на Вейбул-Гнеденко [1]. За него е характерна плътност на разпределение на вероятността до възникване на отказ $f(t) = \beta t^{\beta-1} T_0^{\beta} \exp\left[-\left(\frac{t}{T_0}\right)^{\beta}\right]$ и вероятност за безотказна работа $p(t) = \int_t^{\infty} f(t)dt = 1 - \int_0^t f(t)dt = \exp\left[-\left(\frac{t}{T_0}\right)^{\beta}\right]$. От това следва, че интензивността на възникване на отказите може да се опише чрез степенната функция от вида:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{p(t)} = \frac{\beta t^{\beta-1}}{T_0^{\beta}}.$$

С подбиране на стойностите на параметъра $\beta$ могат да се опишат случаи на намаляваща $(\beta < 1)$, постоянна $(\beta = 1)$ и нарастваща $(\beta > 1)$ интензивности на отказите.

**ЛИТЕРАТУРА:**

[1] Начев А. И., Надеждност на програмното осигуряване. На примера на програмни системи и комплекси, Шумен, Университетско издателство „Епископ Константин Преславски, 2017.

[2] Начев А. И., Структурнофункционална надеждност на компютърни мрежи, София, Военно издателство, 2002.

[3] Кобзарь А. И., Прикладная математическая статистика, Физматлит, Москва, 2006.

**Атанас Иванов Начев**
Университет по библиотекознание и информационни технологии
E-mail: anatchev@abv.bg

**Виктория Янакиева**
Шуменски университет „Епископ Константин Преславски“
E-mail: v.yanakieva@shu.bg

# СЪДЪРЖАНИЕ