

# **ГОДИШНИК**

**НА ШУМЕНСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ  
„ЕПИСКОП КОНСТАНТИН ПРЕСЛАВСКИ“**

**Том XX C**

**ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И  
ИНФОРМАТИКА**

---

**ANNUAL**

**OF KONSTANTIN PRES LAVSKY  
UNIVERSITY OF SHUMEN**

**Vol. XX C**

**FACULTY OF MATHEMATICS AND  
COMPUTER SCIENCE**

**ШУМЕН  
2019**

**Главен редактор:** проф. д.м.н. Иво Михайлов

**Редакционна колегия:** проф. д.н. Борислав Стоянов  
проф. д-р Димчо Станков  
проф. д.н. Наталия Павлова  
проф. д-р Найден Ненков  
доц. д-р Корнелия Тодорова

© Факултет по математика и информатика

© Университетско издателство

„Епископ Константин Преславски“

**ISSN 1311-834X**

## UNRAMIFIED COHOMOLOGY AND NOETHER'S PROBLEM\*

IVO M. MICHAILOV, IVAN S. IVANOV

**ABSTRACT:** *In this survey we discuss some classical methods and results concerning the present state of Noether's problem and related topics (e.g. Bogomolov multipliers, unramified cohomology).*

**KEYWORDS:** *Noether's problem, Bogomolov multiplier, unramified cohomology*

**2010 Math. Subject Classification:** *primary 14E08, 14M20; secondary 13A50, 12F12*

### 1 Introduction

Let  $K$  be a field,  $G$  a finite group and  $V$  a faithful representation of  $G$  over  $K$ . Then there is a natural action of  $G$  upon the field of rational functions  $K(V)$ .

*The rationality problem* (also known as *Noether's problem* when  $G$  acts on  $V$  by permutations) then asks whether the field of  $G$ -invariant functions  $K(V)^G$  is rational (i.e., purely transcendental) over  $K$ .

A question related to the above mentioned is whether  $K(V)^G$  is stably rational, that is, whether there exist independent variables  $x_1, \dots, x_r$  such that  $K(V)^G(x_1, \dots, x_r)$  becomes a purely transcendental extension of  $K$ .

This problem has close connection with Lüroth's problem and the inverse Galois problem.

By the noname lemma, if  $V$  and  $V'$  are two faithful representations of  $G$  over  $K$ , then  $K(V \oplus V')^G$  is rational over both  $K(V)^G$  and

---

\*This work is partially supported by a project No RD-08-118/04.02.2019 of Shumen University.

$K(V')^G$ . Thus the stable rationality of  $K(V)^G$  over  $K$  does not depend on the choice of  $V$ .

In 1969 and 1972, Swan [13] and Voskresenskii [15] constructed examples for which  $\mathbb{Q}(V)^G$  is not rational over  $\mathbb{Q}$ . (For example if  $G$  is a cyclic group of order 47, 113 and 233.) However their methods do not work over an algebraically closed field of characteristic 0.

In 1984, Saltman [11] gave the first example of a group  $G$  such that  $\mathbb{C}(V)^G$  is not stably rational over  $\mathbb{C}$  using the unramified cohomology group  $H_{\text{nr}}^2(\mathbb{C}(V)^G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$  as an obstruction. In a subsequent work Bogomolov [1] made an indepth study of this cohomology group.

More precisely, Bogomolov proved that  $H_{\text{nr}}^2(\mathbb{C}(V)^G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$  is canonically isomorphic to

$$B_0(G) = \bigcap_A \ker\{\text{res}_G^A : H^2(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow H^2(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})\}$$

where  $A$  runs over all the bicyclic subgroups of  $G$  (a group  $A$  is called bicyclic if  $A$  is either a cyclic group or a direct product of two cyclic groups).

Using this isomorphism, he was able to compute explicitly this cohomology group when  $G$  is the central extension of an  $\mathbb{F}_p$ -vector space by another and thus to produce new examples of finite groups  $G$  for which  $\mathbb{C}(V)^G$  is not stably rational over  $\mathbb{C}$ .

Let  $k$  be a field of characteristic 0,  $\bar{k}$  be an algebraic closure of  $k$ . For any positive integer  $n$ , we denote by  $\mu_n$  the  $n$ -th roots of unity in  $k$  and for  $j$  in  $\mathbb{Z}$  we put

$$\mu_n^{\otimes j} = \begin{cases} \mu_n^{\otimes j-1} \otimes \mu_n & \text{if } j > 1, \\ \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, & \text{if } j = 0, \\ \text{Hom}(\mu_n^{\otimes -j}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}), & \text{if } j < 0 \end{cases}$$

For  $i > 0$ , we consider the Galois cohomology groups

$$H^i(k, \mu_n^{\otimes j}) = H^i(\text{Gal}(\bar{k}/k), \mu_n^{\otimes j})$$

as well as their direct limits

$$H^i(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)) = \varinjlim H^i(k, \mu_n^{\otimes j}).$$

For any function field  $K$  over  $k$ , we denote by  $\mathcal{P}(K/k)$  the set of discrete valuation rings  $A$  of rank 1 such that  $k \subset A \subset K$  and such that the fraction field  $\text{Fr}(A)$  of  $A$  is  $K$ . If  $A$  belongs to  $\mathcal{P}(K/k)$ , then let  $\kappa_A$  be its residue field and, for any strictly positive integer  $i$  and any  $j$  in  $\mathbb{Z}$ ,

$$\partial_A : H^i(K, \mu_n^{\otimes j}) \rightarrow H^{i-1}(\kappa_A, \mu_n^{\otimes j-1})$$

be the corresponding residue map. They induce residue maps

$$\partial_A : H^i(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)) \rightarrow H^{i-1}(\kappa_A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j-1)).$$

Recall that the Brauer group over  $K$  is defined by  $\text{Br}(K) = H^2(K, K^{s*})$ , where  $K^s$  is the separable closure of  $K$ .  $\text{Br}(K)$  is a torsion group and the  $n$ -torsion part of the Brauer group is isomorphic to  $H^2(K, \mu_n)$ .

We have also the residue map

$$\partial_A : \text{Br}(K) \rightarrow H^1(\kappa_A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

**Definition 1.1.** The unramified cohomology groups are the groups

$$H_{\text{nr}}^i(K, \mu_n^{\otimes j}) = \bigcap_{A \in \mathcal{P}(K/k)} \ker\{H^i(K, \mu_n^{\otimes j}) \xrightarrow{\partial_A} H^{i-1}(\kappa_A, \mu_n^{\otimes j-1})\}.$$

**Definition 1.2.** The unramified Brauer group is

$$\text{Br}_{\text{nr}}(K) = \bigcap_{A \in \mathcal{P}(K/k)} \ker\{\text{Br}(K) \xrightarrow{\partial_A} H^1(\kappa_A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})\}.$$

**Definition 1.3.** Here we collect some definitions about fields.

- A field  $L$  is a function field over a field  $K$  if it is generated by a finite number of elements as a field over  $K$ .
- A function field  $L$  over  $K$  is rational over  $K$  if there exist indeterminates  $T_1, \dots, T_m$  and an isomorphism  $L \simeq K(T_1, \dots, T_m)$  over  $K$ .
- Two function fields  $L$  and  $M$  over  $K$  are stably isomorphic if there exist indeterminates  $U_1, \dots, U_l, T_1, \dots, T_m$  and an isomorphism  $L(U_1, \dots, U_l) \simeq M(T_1, \dots, T_m)$  over  $K$ . A function field  $L$  is stably rational over  $K$  if  $L$  is stably isomorphic to  $K$ .
- A function field  $L$  over  $K$  is unirational over  $K$  if there exist indeterminates  $T_1, \dots, T_m$  and an injection  $L \hookrightarrow K(T_1, \dots, T_m)$  over  $K$ .

**Theorem 1.1.** (*Colliot-Thélène and Ojanguren [2]*) *If the function fields  $K$  and  $L$  are stably isomorphic over  $k$  then*

$$H_{\text{nr}}^i(K, \mu_n^{\otimes j}) \simeq H_{\text{nr}}^i(L, \mu_n^{\otimes j}).$$

*In particular, if  $K$  is stably rational then  $H_{\text{nr}}^i(K, \mu_n^{\otimes j}) = \{0\}$ .*

One can also show that the unramified Brauer group depends only on the stable rationality class of the field. This is the invariant which was used by Artin and Mumford. The unramified cohomology groups may be considered as generalizations of the unramified Brauer group. Indeed, if  $i = 2$ , the unramified cohomology groups are isomorphic to the  $n$ -torsion part of the unramified Brauer group:

$$\text{Br}_{\text{nr}}(K)_{(n)} \simeq H_{\text{nr}}^2(K, \mu_n).$$

We have the following relations between the various kind of rationalities:  $L$  rational over  $K \Rightarrow L$  stably rational over  $K$ ; and  $L$  stably rational over  $K \Rightarrow L$  unirational over  $K$ .

Peyre [9] found examples when  $H_{\text{nr}}^i(K, \mu_n^{\otimes i}) \neq \{0\}$  for  $i = 2, 3, 4$ . The function field  $K$  can be taken unirational, but from Colliot-Thélène and Ojanguren's Theorem it follows that  $K$  is not stably rational.

In 2008 Peyre [10] also published an example of a group  $G$  such that  $H_{\text{nr}}^3(\mathbb{C}(V)^G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \neq \{0\}$  (and hence  $\mathbb{C}(V)^G$  not stably rational over  $\mathbb{C}$ ) although the unramified cohomology group  $H_{\text{nr}}^2(\mathbb{C}(V)^G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$  is trivial.

Kunyavskii called  $H_{\text{nr}}^2(\mathbb{C}(V)^G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$  the Bogomolov multiplier, and we will denote it by  $B_0(G)$ .

## 2 Cohomological invariants

Now, let us fix a ground field  $k_0$ , and consider the category  $\text{Fields}/_{k_0}$  of field extensions  $k$  of  $k_0$  and two functors

$$A : \text{Fields}/_{k_0} \longrightarrow \text{Sets} \quad \text{and} \quad H : \text{Fields}/_{k_0} \longrightarrow \text{Abelian Groups}.$$

**Definition 2.1.** An  $H$ -invariant of  $A$  is a morphism of functors  $a : A \rightarrow H$ .

Here, we view  $H$  as a functor with values in Sets. Hence,  $a : A \rightarrow H$  means giving, for every  $k \in \text{Fields}/_{k_0}$ , a map  $a_k : E \mapsto a(E)$  of  $A(k)$  into  $H(k)$  such that, if  $\phi : k \rightarrow k'$  is a morphism in  $\text{Fields}/_{k_0}$ , the diagram

$$\begin{array}{ccc} A(k) & \xrightarrow{a_k} & H(k) \\ \downarrow & & \downarrow \\ A(k') & \xrightarrow{a_{k'}} & H(k') \end{array}$$

is commutative.

Our aim will be to determine explicitly in some cases the group  $\text{Inv}(A, H)$  of all such invariants. Consider a finitely generated extension  $K/k_0$ ; let  $C$  be a finite  $\Gamma_{k_0}$ -module.

**Definition 2.2.** An element  $a \in H(K, C)$  is said to be unramified over  $k_0$  if, for every discrete valuation  $v$  of  $K$  which is trivial on  $k_0$ , the residue of  $a$  at  $v$  is 0.

**Definition 2.3.** There is a natural embedding  $H(k_0) \rightarrow \text{Inv}_{k_0}(A, H)$ ; namely, if  $h \in H(k_0)$ , we define the invariant  $a_h$  by setting  $a_h(x) = \text{image of } h \text{ in } H(k)$  for every  $x \in A(k)$ . Such an invariant is called constant. Suppose we have fixed a base point for  $A$ . We say that  $a$  is normalized if  $a$  vanishes on the base point.

**Theorem 2.1.** (Serre [3]) *If  $K/k_0$  is rational, every unramified cohomology class in  $H(K, C)$  is constant, i.e., belongs to  $H(k_0, C)$ .*

**Theorem 2.2.** (Serre [3]) *If  $a \in \text{Inv}_{k_0}(G, C)$  is unramified over  $k_0$ , and if Noether's problem for  $G$  has an affirmative answer over  $k_0$ , then  $a$  is constant.*

**Corollary 2.3.** (Serre [3]) *Suppose that Noether's problem for  $G$  has an affirmative answer over  $k_0$  and that  $a$  is normalized and unramified. Then  $a = 0$ .*

Serre uses invariants of the trace forms to find these examples.

**Corollary 2.4.** (Serre [3]) *Let  $G$  be a group with a 2-Sylow subgroup which is cyclic of order  $\geq 8$ . Then Noether's problem for  $G$  has a negative answer.*

**Corollary 2.5.** (Serre [3]) *Let  $G$  be a group with a 2-Sylow subgroup which is isomorphic to the quaternion group  $Q_{16}$  of order 16. Then Noether's problem for  $G$  has a negative answer.*

### 3 The Bogomolov multiplier

We list some of the groups having a trivial Bogomolov multiplier (apart from the groups Noether's problem has an affirmative answer):



- (i) abelian extensions of cyclic groups (Bogomolov [1]);
- (ii) groups such that the Sylow  $p$ -subgroups are cyclic for odd  $p$ , and either cyclic, or dihedral, or generalized quaternion for  $p = 2$  (Bogomolov [1]);
- (iii) simple groups (Kunyavskii [5]);
- (iv) Blackburn groups (Kang, Kunyavskii [4]);
- (v) unitriangular matrix groups over  $\mathbb{F}_p$  and the quotients of their lower central series (Michailov [6]);
- (vi) extraspecial  $p$ -groups (Kang, Kunyavskii [4]);
- (vii) central products of groups with trivial Bogomolov multiplier (open problem posed by Kang and Kunyavskii [4]).

**Theorem 3.1.** *Let  $\theta : G_1 \rightarrow G_2$  be a group homomorphism such that its restriction  $\theta|_{K_1} : K_1 \rightarrow K_2$  is an isomorphism, where  $K_1 \leq Z(G_1)$  and  $K_2 \leq Z(G_2)$ . Let  $G$  be a central product of  $G_1$  and  $G_2$ , i.e.,  $G = E/N$ , where  $E = G_1 \times G_2$  and  $N = \{ab : a \in K_1, b \in K_2, \theta(a) = b^{-1}\}$ . If  $B_0(G_1/K_1) = B_0(G_1) = B_0(G_2) = 0$  then  $B_0(G) = 0$ .*

*Proof.* Moravec [8] studied the functor  $B_0(G)$ , and in particular he found the five term exact sequence

$$B_0(E) \rightarrow B_0(E/N) \rightarrow \frac{N}{\langle \mathcal{K}(E) \cap N \rangle} \rightarrow E^{ab} \rightarrow (E/N)^{ab} \rightarrow 0,$$

where  $E$  is any group,  $N$  a normal subgroup of  $E$  and  $\mathcal{K}(E)$  denotes the set of commutators in  $E$ .

If we assume that  $N$  is a central subgroup of  $E$ , we derive explicitly a three term exact sequence

$$(3.1) \quad B_0(E) \xrightarrow{\eta_*} B_0(E/N) \xrightarrow{\xi_*} \frac{N \cap [E, E]}{\langle \mathcal{K}(E) \cap N \rangle}.$$

We have that  $B_0(E) \simeq B_0(G_1) \times B_0(G_2) = 0$ . Then from the exact sequence (3.1) it follows that

$$B_0(G) \simeq B_0(G)/\eta_*(B_0(E)) \simeq N_1/N_0,$$

where  $N_1 = N \cap [E, E]$ ,  $N_0 = \langle \mathcal{K}(E) \cap N \rangle$ . Therefore, we need to show that  $N_0 = N_1$ , which we achieve by calculations with commutators (for the details see [7, Theorem 3.1]).  $\square$

**Corollary 3.2.** *If  $G$  is an extra-special  $p$ -group of order  $p^{2n+1}$  (for any  $n \geq 1$ ), then  $B_0(G) = 0$ .*

**REFERENCES:**

- [1] F. A. Bogomolov, The Brauer group of quotient spaces by linear group actions, *Math. USSR Izv.* **30** (1988), 455–485.
- [2] J.-L. Colliot-Thélène and M. Ojanguren, Variétés unirationnelles non rationnelles: audelà de l'exemple d'Artin et Mumford, *Invent. Math.* **97** (1989), no. 1, 141–158.
- [3] S. Garibaldi, A. Merkurjev and J.-P. Serre, “Cohomological invariants in Galois cohomology”, *AMS Univ. Lecture Series* vol. **28**, Amer. Math. Soc., Providence, 2003.
- [4] Kang M. C., B. Kunyavskii, The Bogomolov multiplier of rigid finite groups, *Arch. Math.* **102**, No. 3 (2014), 209–218.
- [5] B. E. Kunyavskii, The Bogomolov multiplier of finite simple groups, *Cohomological and geometric approaches to rationality problems*, 209–217, *Progr. Math.*, **282**, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2010.
- [6] I. Michailov, Bogomolov multipliers for unitriangular groups, *C. R. Acad. Bulg. Sci.* **68** No.6 (2015), 689–696.
- [7] I. Michailov, Bogomolov multipliers for some  $p$ -groups of nilpotency class 2, *Acta Mathematica Sinica, English Series*, May 2016, Volume **32**, Issue 5, pp 541-552
- [8] Moravec P., Unramified Brauer groups of finite and infinite groups, *Amer. J. Math.* **134** (2012), 1679–1704.

- [9] E. Peyre, Unramified cohomology and rationality problems, *Math. Ann.* **296** (1993), no. 2, 247–268.
- [10] E. Peyre, Unramified cohomology in degree 3 and Noether's problem, *Inventiones mathematicae* 2008, Volume **171**, Issue 1, pp 191–225.
- [11] D. J. Saltman, Noether's problem over an algebraically closed field, *Invent. Math.* **77** (1984), 71–84.
- [12] I. R. Šafarevič, The Lüroth problem, *Proc. Steklov Inst. Math.* **183** (1991), 241–246.
- [13] R. Swan, Invariant rational functions and a problem of Steenrod, *Inventiones Mathematicae*, **7** (2): 148–158, 1969.
- [14] R. Swan, Noether's problem in Galois theory, in “Emmy Noether in Bryn Mawr”, edited by B. Srinivasan and J. Sally, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [15] V. E. Voskresenskii, Algebraic groups and their birational invariants, *Translations of Mathematical Monographs*, vol. **179**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998. Translated from the Russian manuscript by Boris Kunyavski [Boris E. Kunyavskii].

**Ivo Michailov**

Faculty of Mathematics and Informatics, Shumen University,  
Universitetska str. 115, 9700 Shumen, Bulgaria  
e-mail: ivo\_michailov@yahoo.com

**Ivan Ivanov**

Faculty of Mathematics and Informatics, Shumen University,  
Universitetska str. 115, 9700 Shumen, Bulgaria  
e-mail: slaveicov@abv.bg



## NECESSARY AND SUFFICIENT CONDITION FOR THE EXISTENCE OF A POSITIVE DEFINITE SOLUTION OF A MATRIX EQUATION\*

VEJDI I. HASANOV

**ABSTRACT:** *In this paper we study a matrix equation. We give a necessary and sufficient condition for the existence of a positive definite solution of the considered equation. We determine a set of matrices containing all positive definite solutions. Moreover, we propose a basic fixed point iteration for finding a positive definite solution. The theoretical results are illustrated by numerical examples.*

**KEYWORDS:** *Nonlinear matrix equation, positive definite solution*

**2010 Math. Subject Classification:** *65F10; 15A24*

### 1 Introduction

We consider the nonlinear matrix equation

$$(1) \quad X - A^*XA - B^*X^{-1}B = I,$$

where  $A, B$  are  $n \times n$  complex matrices,  $I$  is the identity matrix, and  $A^*$  denotes the conjugate transpose of  $A$ .

Eq. (1) has been introduced by Ali in [1] where an iterative method for computation a positive definite solution is proposed. In [2] by using the fixed point theorem for mixed monotone operator in a normal cone Gao has proved that the equation  $X - A^*X^pA - B^*X^{-q}B = I$  with  $0 < p, q < 1$  always has the unique positive definite solution. The equation  $X - A^*XA + B^*X^{-1}B = I$  has been investigated in [3].

---

\*This paper is partially supported by Scientific Research Grant RD-08-93/01.02.2019 of the Konstantin Preslavsky University of Shumen

Eq. (1) can be interpreted as a combination of the well-known equations  $X - A^*XA = I$  [4, 5] and  $X - B^*X^{-1}B = I$  [6, 7].

In addition, there are some contributions in the literature to the solvability and numerical solutions of the matrix equation  $X + A^*X^{-1}A - B^*X^{-1}B = I$  [8, 9]. Konstantinov et al. [10] have investigated for the sensitivity of the equation  $A_0 + \sum_{i=1}^k \sigma_i A_i^* X^{p_i} A_i = 0$ , which is more general type of Eq. (1).

Motivated by [1, 2, 3], we study Eq. (1) for the existence of a positive definite solution and bounds of the solutions and iterative methods for obtaining of a solution. In addition, we consider some numerical examples to illustrate the theoretical results.

Throughout this paper,  $\mathcal{C}^{n \times n}$  denotes the set of  $n \times n$  complex matrices and  $\mathcal{H}^n$  – the set of  $n \times n$  Hermitian matrices.  $A > 0$  ( $A \geq 0$ ) means that  $A$  is a Hermitian positive definite (semidefinite) matrix. If  $A - B > 0$  (or  $A - B \geq 0$ ) we write  $A > B$  (or  $A \geq B$ ). For  $N \geq M > 0$  we use  $[M, N]$  to denote the set of matrices  $\{X : M \leq X \leq N\}$ . We use  $\rho(A)$  and  $\|A\|$  to denote the spectral radius and the spectral norm ( $\|A\| = \sqrt{\rho(A^*A)}$ ) of a  $n \times n$  matrix  $A$ , respectively.

## 2 A necessary and sufficient condition

Firstly, we will present some preliminaries.

**Lemma 1.** [5] *Let  $A, Q$  be square matrices.*

- (a) *If  $\rho(A) < 1$ , the Stain's equation  $X - A^*XA = Q$  has a unique solution  $P_Q$  and  $P_Q \geq 0$  ( $P_Q > 0$ ), when  $Q \geq 0$  ( $Q > 0$ ).*
- (b) *If there is some  $P > 0$  such that  $P - A^*PA$  is positive definite (semidefinite), then  $\rho(A) < 1$  ( $\rho(A) \leq 1$ ).*

In [1], it has been obtained the following necessary conditions for the existence of a positive definite solution and its lower bound.

**Theorem 1.** [1, Theorem 2.1.] *Let  $X$  be a positive definite solution of Eq. (1). Then*

- (i)  $\rho(A) < 1$ ,
- (ii)  $\rho(X^{-1}B) < 1$ ,
- (iii)  $X \geq M$ , where  $M$  is the unique positive definite solution of the equation  $X - A^*XA = I$ .

Now, we give a necessary and sufficient condition for the existence of a positive definite solution of Eq. (1) and an upper bound of all the solutions.

**Theorem 2.** *Eq. (1) has a positive definite solution  $X$ , if and only if  $\rho(A) < 1$ . Moreover, the all positive definite solutions are in  $[M, N]$ , where  $M$  and  $N$  are the unique solutions of the equations  $X - A^*XA = I$  and  $X - A^*XA = I + B^*M^{-1}B$ , respectively.*

*Proof:* Let  $X$  be a positive definite solution of Eq. (1). Then by Theorem 1 it follows  $\rho(A) < 1$ .

Let  $\rho(A) < 1$ , then by Lemma 1 (i) the equation  $X - A^*XA = Q$  has a unique positive definite solution for arbitrary  $Q > 0$ . Let  $M$  and  $N$  be the unique solutions of the equations  $X - A^*XA = I$  and  $X - A^*XA = I + B^*M^{-1}B$ , respectively. Once again, by Lemma 1 (i) we have  $M \leq N$ .

Now, we consider a map  $F$ , defined by

$$(2) \quad F(X) = I + A^*XA + B^*X^{-1}B, \quad X > 0.$$

We will show that  $F([M, N]) \subset [M, N]$ . Let  $X \in [M, N]$ . Then

$$\begin{aligned} F(X) &= I + A^*XA + B^*X^{-1}B \\ &\geq I + A^*MA = M, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(X) &= I + A^*XA + B^*X^{-1}B \\ &\leq I + A^*XA + B^*X^{-1}B = N. \end{aligned}$$

Therefore, for all  $X \in [M, N]$ ,  $F(X) \in [M, N]$ . Since  $[M, N]$  is a convex, closed and bounded set and the map  $F$  is continuous on  $[M, N]$ , by Brouwer's fixed point theorem [11, p.17] it follows that there exists a solution  $X \in [M, N]$  of Eq. (1).  $\square$

### 3 Basic fixed point iteration

In [1] Ali has investigated the iterative method

$$(3) \quad \begin{cases} X_0 = I, Y_0 = \beta I, \beta > 1 \\ X_{k+1} = I + A^* X_k A + B^* Y_k^{-1} B, \quad k = 0, 1, \dots \\ Y_{k+1} = I + A^* Y_k A + B^* X_k^{-1} B \end{cases}$$

for computing a positive definite solution of Eq. (1) based on the mixed monotone operator  $G(X, Y) = I + A^* X A + B^* Y^{-1} B$ . It was proven that the sequences  $\{X_k\}$  and  $\{Y_k\}$  defined in (3) with  $\beta \geq \frac{1 + \|B\|^2}{1 - \|A\|^2}$  are convergent to a unique positive definite solution of Eq. (1) under condition  $\|A\|^2 + \|B\|^2 < 1$ . Moreover,  $\{X_k\}$  and  $\{Y_k\}$  have following properties:

$$(4) \quad X_0 \leq X_1 \leq \dots \leq X_k \leq Y_k \leq \dots \leq Y_1 \leq Y_0.$$

We note that the iterative method (3) can be used with  $X_0 = M$  and  $Y_0 = N$ , where the matrices  $M$  and  $N$  are from Theorem 2. From (4) we conclude that if  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|Y_k - X_k\| = 0$ , then Eq. (1) has a unique positive definite solution.

We consider the basic fixed point iteration (BFPI):

$$(5) \quad Z_{k+1} = I + A^* Z_k A + B^* Z_k^{-1} B, \quad k = 0, 1, \dots, \quad Z_0 \in [X_0, Y_0],$$

where  $X_0$  and  $Y_0$  are initial value in method (3).

We will prove that  $X_k \leq Z_k \leq Y_k$  for all  $k = 0, 1, \dots$ . We have  $X_0 \leq Z_0 \leq Y_0$  by definition. Assume that  $X_k \leq Z_k \leq Y_k$ . Then

$$\begin{aligned} Z_{k+1} &= I + A^* Z_k A + B^* Z_k^{-1} B \\ &\leq I + A^* Y_k A + B^* X_k^{-1} B = Y_{k+1} \end{aligned}$$



and

$$\begin{aligned} Z_{k+1} &= I + A^*Z_kA + B^*Z_k^{-1}B \\ &\geq I + A^*X_kA + B^*Y_k^{-1}B = X_{k+1}. \end{aligned}$$

Therefore  $X_k \leq Z_k \leq Y_k$  for all  $k = 0, 1, \dots$ . Thus, we conclude that if  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|Y_k - X_k\| = 0$ , then the BFPI (5) converges to a unique positive definite solution of Eq. (1).

#### 4 Numerical experiments

In this section we carry out numerical experiments for computing the positive definite solutions of Eq. (1) by iterative methods (3) and (5) with  $X_0 = M$ ,  $Y_0 = N$  and  $Z_0 = (M + N)/2$ , respectively.

Let us  $res(X) = \|X - A^*XA - B^*X^{-1}B - I\|_\infty$ . As practical stopping criterions we use  $\|Y_k - X_k\|_\infty \leq tol$  and  $\|Z_k - Z_{k-1}\|_\infty \leq tol$  for methods (3) and (5), respectively, where  $k$  is the number of iterations.

We use the Matlab function *dlyap* for computing the unique positive definite solutions  $M$  and  $N$  of the equations  $X - A^*XA = I$  and  $X - A^*XA = I + B^*M^{-1}B$ , respectively.

**Example 1.**[1] We consider Eq. (1) with matrix coefficients

$$A = \frac{1}{56} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 2 \\ -1 & -6 & 3 & 4 \\ -4 & 3 & 7 & 5 \\ 1 & 8 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{70} \begin{pmatrix} 7 & 9 & 6 & 8 \\ 7 & 5 & 8 & 3 \\ 9 & 8 & 6 & 7 \\ 11 & 5 & 9 & 3 \end{pmatrix}.$$

In Table 1 we report the results of experiments for Example 1 with  $tol = 10^{-10}$  by using iterative methods (3) and (5).

**Example 2.** We consider Eq. (1) with matrix coefficients

$$A = \frac{1}{200} \begin{pmatrix} 41 & 15 & 23 & 35 & 66 \\ 25 & 12 & 27 & 45 & 21 \\ 23 & 27 & 28 & 16 & 24 \\ 15 & 45 & 16 & 52 & 65 \\ 66 & 21 & 24 & 65 & 35 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 23 & 21 & 23 & 25 & 32 \\ 21 & 45 & 60 & 42 & 33 \\ 23 & 24 & 34 & 18 & 17 \\ 13 & 42 & 18 & 44 & 30 \\ 32 & 33 & 26 & 30 & 26 \end{pmatrix}.$$

Table 1: Numerical results for Example 1

| (3)  | BFPI (5)                                 |
|--|--|
| $k = 11$   | $k = 10$                                 |
| $\ Y_{11} - X_{11}\ _{\infty} = 6.98e - 11$            | $\ Z_{10} - Z_9\ _{\infty} = 5.89e - 11$ |
| $res\left(\frac{X_{11}+Y_{11}}{2}\right) = 5.72e - 13$ | $res(Z_{10}) = 5.53e - 12$               |

In Table 2 we report the results of experiments for Example 1 by using iterative methods (3) and (5) with  $tol = 10^{-10}$  and  $tol = 10^{-14}$ , respectively.

Table 2: Numerical results for Example 2 for

| (3)  | BFPI (5)                                      |
|--|---|
| $tol = 10^{-10}$   |   |
| $k = 169$  | $k = 73$                                      |
| $\ Y_{169} - X_{169}\ _{\infty} = 9.42e - 11$            | $\ Z_{73} - Z_{72}\ _{\infty} = 9.73e - 11$   |
| $res\left(\frac{X_{169}+Y_{169}}{2}\right) = 4.89e - 15$ | $res(Z_{73}) = 7.06e - 11$                    |
| $tol = 10^{-14}$   |   |
| $k = 225$  | $k = 102$                                     |
| $\ Y_{225} - X_{225}\ _{\infty} = 9.77e - 15$            | $\ Z_{102} - Z_{101}\ _{\infty} = 9.33e - 15$ |
| $res\left(\frac{X_{225}+Y_{225}}{2}\right) = 1.78e - 15$ | $res(Z_{102}) = 6.66e - 15$                   |

The spectral radii of the matrices  $A$  in Example 1 and 2 are  $\rho(A) = 0.1579$  and  $\rho(A) = 0.8813$ , respectively. For computing a positive definite solution of Eq. (1) with BFPI (5) we need less iterations than iterative method (3).

**REFERENCES:**

[1] Ali A., For the matrix equation  $X - A^*XA - B^*X^{-1}B = I$ , In: MATTEX 2018, Conference proceeding, 1, (2018), 161-166. (in Bulgarian)

- 
- 
- [2] Gao, D., Iterative methods for solving the nonlinear matrix equation  $X - A^*X^pA - B^*X^{-q}B = I$  ( $0 < p, q < 1$ ), *Advances in Linear Algebra and Matrix Theory*, **7**, (2017), 72-78.
- [3] Hasanov V., Positive definite solutions of a linearly perturbed matrix equation, submitted
- [4] Kh.D. Ikramov, *Numerical solution of Matrix Equations*, Moscow, Nauka, 1985. (in Russian).
- [5] P. Lancaster, M. Tismenetsky, *The Theory of Matrices*, 2nd ed. San Diego (CA), Academic Press, 1985.
- [6] Ferrante A., Levy B., Hermitian solutions of the equation  $X = Q + NX^{-1}N^*$ , *Linear Algebra Appl.*, **247**, (1996), 359-373.
- [7] C.-H. Guo, P. Lancaster, Iterative Solution of Two Matrix Equations, *Math. Comput.*, **68**, (1999), 1589-1603.
- [8] Berzig M., Duan X., Samet B., Positive definite solution of the matrix equation  $X = Q - A^*X^{-1}A + B^*X^{-1}B$  via Bhaskar-Lakshmikantham fixed point theorem, *Mathematical Sciences*, **6**(27), (2012).
- [9] Ali A., Hasanov V., On some sufficient conditions for the existence of a positive definite solution of the matrix equation  $X + A^*X^{-1}A - B^*X^{-1}B = I$ , In: Pasheva V, Popivanov N, Venkov G, eds., 41st International Conference "Applications of Mathematics in Engineering and Economics" AMEE'15. *AIP Conf. Proc.* 1690, 060001 (2015), doi:10.1063/1.4936739.
- [10] Konstantinov M., Petkov P., Popchev I., Angelova V., Sensitivity of the matrix equation  $A_0 + \sum_{i=1}^k \sigma_i A_i^* X^{p_i} A_i = 0$ ,  $\sigma_i = \pm 1$ , *Appl. Comput. Math.*, **10**, (2011), 409-427.
- [11] Deimling K., *Nonlinear functional analysis*, Berlin, Springer-Verlag, 1985.

**Vejdi Ismailov Hasanov**

Konstantin Preslavsky University of Shumen

Faculty of Mathematics and Informatics

Shumen, Bulgaria

v.hasanov@shu.bg



## RECOVERING SPACE CURVES BY MÖBIUS INVARIANTS\*

RADOSTINA P. ENCHEVA

**ABSTRACT:** *One subgroup of the Möbius group in the Euclidean 3-space  $\mathbb{R}^3$  is induced by the group of rotations on the unit 3-sphere in the Euclidean 4-space  $\mathbb{R}^4$  via a stereographic projection. We find two functions as Möbius invariants and they determine a Frenet space curve up to a transformation of the considered group. We use these invariants to construct space curves and for that purpose we apply an algorithm in the computer system Mathematica.*

**KEYWORDS:** *Möbius group, Frenet space curves, Stereographic projection*

**2010 Math. Subject Classification:** *51B10, 53A55*

### 1 Introduction

The three dimensional unit sphere  $\mathbb{S}^3$ , centered at the origin  $O$  and embedded in the four-dimensional Euclidean space  $\mathbb{R}^4$ , is mapped via the stereographic projection  $\pi$  with a center at a point  $P \in \mathbb{S}^3$  onto an equatorial hyperplane  $\xi \subset \mathbb{R}^4$  through the origin  $O$  with a normal vector  $\overrightarrow{OP}$ . We consider the hyperplane  $\xi$  as a three-dimensional Euclidean space  $\mathbb{R}^3$ . The group of rigid motion on the sphere  $\mathbb{S}^3$  coincides with the group of rotations  $SO(4)$  in  $\mathbb{R}^4$  about the origin  $O$ . This group induces in  $\mathbb{R}^3$  via the stereographic projection  $\pi$  a subgroup  $M_0$  of the Möbius group  $\text{Möb}(3)$  in  $\mathbb{R}^3$ . For that group it is naturally to apply the algebra of quaternions  $\mathbb{H}$ , where  $\mathbb{H}_0 \subset \mathbb{H}$  is the set of pure quaternions (with zero real parts). If  $w \in \mathbb{H}$  is a quaternion then the norm of  $w$  is denoted by

---

\*This paper is (partially) supported by the National Scientific Program "Information and Communication Technologies for a Single Digital Market in Science, Education and Security (ICTinSES)", financed by the Ministry of Education and Science.

$\|w\|$ , the quaternion  $\bar{w} \in \mathbb{H}$  is the conjugate quaternion of  $w$  and  $\|w\|^2 = w \cdot \bar{w} = \bar{w} \cdot w$ . The transformations from the group  $M_0$  can be represented by the quaternion formalism

$$F(q) = (A \cdot q + B) \cdot (B \cdot q + A)^{-1},$$

where  $A, B \in \mathbb{H}$ ,  $q \in \mathbb{H}_0$ ,  $\|A\|^2 + \|B\|^2 = 1$  and  $A \cdot \bar{B} + B \cdot \bar{A} = 0$ , identifying  $\mathbb{H}_0$  with  $\mathbb{R}^3$  (Theorem 3 in [2]).

It is well-known that the Euclidean curvature  $\varkappa$  and the Euclidean torsion  $\tau$  determine the space curves up to orientation preserving motions in  $\mathbb{R}^3$ . This fundamental theorem in the classical curve theory is extended to the orientation preserving similarity group in [1]. Recovering a space curve by a pair of real functions up to an orientation preserving motion or a similarity transformation is based on the mentioned theorems. The Euclidean geometry of curves on  $S^3 \subset \mathbb{R}^4$  is carried naturally on  $\mathbb{R}^3$  by the stereographic projection  $\pi$  and it can be interpreted with respect to the subgroup  $M_0 \subset \text{Möb}(3)$  in  $\mathbb{R}^3$ . The differential geometry of curves with respect to the Möbius group is developed by Udo Hertrich-Jeromin in [7]. In the presented paper it is used a different approach. Relations between the Euclidean differential-geometric invariants of curves on the sphere  $S^3$  and the corresponding curves in  $\mathbb{R}^3$  via the stereographic projection  $\pi$  are found. These relations determine invariants of curves with respect to the group  $M_0$ . They have an essential roll of recovering the curves in  $\mathbb{R}^3$  up to transformations from the considered group. The case of plane curves, recovering by one Möbius invariant, is explored in [3] and [4].

## 2 Preliminaries

Let  $K = O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3\vec{e}_4$  be a right-handed Cartesian coordinate system in  $\mathbb{R}^4$ . For any two vectors  $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3, x^4)$  and  $\mathbf{y} = (y^1, y^2, y^3, y^4)$  in  $\mathbb{R}^4$  the canonical inner product  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$  is defined by  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^4 x^i y^i$ . We denote the norm of the vector  $\mathbf{x}$  by  $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$ . The inner product and the norm of vectors in  $\mathbb{R}^3$  are determined in a

similar way.

Let  $\mathbb{S}^3 = \{(x^1, x^2, x^3, x^4) \in \mathbb{R}^4 \mid (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2 = 1\}$  be the unit sphere in  $\mathbb{R}^4$ , centered at the origin  $O$ , and let  $l = (x^1, x^2, x^3, x^4)$ ,  $x^1 \neq 1$  be the position vector of an arbitrary point on  $\mathbb{S}^3$ , different from the pole  $P(1, 0, 0, 0)$ . Denoting by  $(u^1, u^2, u^3)$  the coordinates of any position vector  $u$  of an arbitrary point in the equatorial hyperplane  $\xi \equiv \mathbb{R}^3$  with respect to the Cartesian coordinate system  $K' = O\vec{e}'_1\vec{e}'_2\vec{e}'_3$  in  $\mathbb{R}^3$ , where  $\vec{e}'_1 = \vec{e}_2$ ,  $\vec{e}'_2 = \vec{e}_3$ ,  $\vec{e}'_3 = \vec{e}_4$ , the stereographic map  $\pi : \mathbb{S}^3 \setminus \{P\} \rightarrow \mathbb{R}^3$  is given by the equalities  $u^i = \frac{x^{i+1}}{1-x^1}$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

For the reverse map  $\pi^{-1}$  we have the equalities

$$\begin{aligned} x^1 &= \frac{(u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2 - 1}{(u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2 + 1}, \\ x^i &= \frac{2u^{i-1}}{(u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2 + 1}, \quad i = 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Making the infinity  $\infty$  correspond to the pole  $P$ , the stereographic projection  $\pi$  and the reverse map  $\pi^{-1}$  are bijective conformal maps.

We consider the parametric equations of the sphere  $\mathbb{S}^3$  in the form

$$l(u^1, u^2, u^3) = \left\{ \frac{\|u\|^2 - 1}{\|u\|^2 + 1}, \frac{2u^1}{\|u\|^2 + 1}, \frac{2u^2}{\|u\|^2 + 1}, \frac{2u^3}{\|u\|^2 + 1} \right\}.$$

The standard orthogonal tangential frame field  $\left\{ \frac{\partial l}{\partial u^1}, \frac{\partial l}{\partial u^2}, \frac{\partial l}{\partial u^3} \right\}$  at any point of the sphere  $\mathbb{S}^3$ , except the point  $P$ , is given by

$$\begin{aligned} l_1 = \frac{\partial l}{\partial u^1} &= \mu \cdot \left\{ u^1, \frac{1 - (u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2}{2}, -u^1 u^2, -u^1 u^3 \right\} \\ l_2 = \frac{\partial l}{\partial u^2} &= \mu \cdot \left\{ u^2, -u^1 u^2, \frac{1 + (u^1)^2 - (u^2)^2 + (u^3)^2}{2}, -u^2 u^3 \right\} \\ l_3 = \frac{\partial l}{\partial u^3} &= \mu \cdot \left\{ u^3, -u^1 u^3, -u^2 u^3, \frac{1 + (u^1)^2 + (u^2)^2 - (u^3)^2}{2} \right\}, \end{aligned}$$

where  $\mu = \frac{4}{(1 + \|\mathbf{u}\|^2)^2}$  and  $l_1^2 = l_2^2 = l_3^2 = \mu$ .

A regular space curve in  $\mathbb{R}^3$  with a nowhere vanishing Euclidean curvature is called a Frenet space curve. For a given Frenet space curve  $c : \mathbf{u}(s) = (u^1(s), u^2(s), u^3(s))$  in  $\mathbb{R}^3$ , parameterized by an arc-length parameter  $s$ , we denote by  $'$  the differentiation with respect to  $s$ . Applying the Frenet equations for the derivatives (see [5]), it is easy to prove the equalities

$$(1) \quad \begin{aligned} \langle \mathbf{u}', \mathbf{u}''' \rangle &= - \langle \mathbf{u}'', \mathbf{u}'' \rangle = -\varkappa^2, \\ \langle \mathbf{u}'', \mathbf{u}''' \rangle &= \left( \frac{\mathbf{u}''^2}{2} \right)' = \varkappa \varkappa', \quad \langle \mathbf{u}' \times \mathbf{u}''', \mathbf{u}'' \rangle = -\varkappa^2 \tau, \end{aligned}$$

where  $\varkappa$  and  $\tau$  are the Euclidean curvature and the Euclidean torsion of  $c$ , respectively.

**Lemma 2.1.** *Let  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(s)$  be a vector function in  $\mathbb{R}^3$  with coordinate functions  $v^k(s) = \sum_{i,j=1}^3 \Gamma_{ij}^k u^i u^j$ ,  $k = 1, 2, 3$ , where  $\Gamma_{ij}^k$  are the Christoffel symbols for the sphere  $\mathbb{S}^3$  and  $u^i = u^i(s)$ ,  $i = 1, 2, 3$  are the coordinate functions of the unit speed curve  $c : \mathbf{u} = \mathbf{u}(s)$ . Then*

$$\mathbf{v} = \sqrt{\mu} \cdot \mathbf{u} - \mu \cdot \left( \frac{1}{\mu} \right)' \cdot \mathbf{u}'$$

and

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}''' \rangle &= \varkappa^2 \mu \left( \frac{1}{\mu} \right)' - \sqrt{\mu} \left( \frac{\sqrt{\mu} + \frac{\mu^2}{4} \left( \frac{1}{\mu} \right)^2 - \frac{\mu}{2} \left( \frac{1}{\mu} \right)''}{\sqrt{\mu}} \right)', \\ v^2 = \mu \mathbf{u}^2, \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}' \rangle &= -\frac{\mu}{2} \left( \frac{1}{\mu} \right)', \langle \mathbf{u}' \times \mathbf{u}''', \mathbf{v} \rangle = \sqrt{\mu} \langle \mathbf{u} \times \mathbf{u}', \mathbf{u}'' \rangle', \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}'' \rangle &= -\sqrt{\mu} - \frac{\mu^2}{4} \left( \frac{1}{\mu} \right)^2 + \frac{\mu}{2} \left( \frac{1}{\mu} \right)'', \\ \langle \mathbf{u}' \times \mathbf{u}'', \mathbf{v} \rangle &= \mu \langle \mathbf{u} \times \mathbf{u}', \mathbf{u}'' \rangle. \end{aligned}$$

*Proof.* The Christoffel symbols  $\Gamma_{ij}^k$  for the sphere  $\mathbb{S}^3$  are given by

$$(2) \quad \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k = \begin{cases} -\sqrt{\mu} \cdot u^j, & k = i; \\ \sqrt{\mu} \cdot u^k, & k \neq i = j; \\ 0, & k \neq i \neq j. \end{cases}$$

Hence,

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^3 \Gamma_{ij}^1 u^i u^j &= \Gamma_{11}^1 (u^1)^2 + 2\Gamma_{12}^1 u^1 u^2 + 2\Gamma_{13}^1 u^1 u^3 + \Gamma_{22}^1 (u^2)^2 + \\ &+ \Gamma_{33}^1 (u^3)^2 = -\sqrt{\mu} u^1 (u^1)^2 - 2\sqrt{\mu} u^2 u^1 u^2 - 2\sqrt{\mu} u^3 u^1 u^3 + \\ &+ \sqrt{\mu} u^1 (u^2)^2 + \sqrt{\mu} u^1 (u^3)^2 = -2\sqrt{\mu} u^1 (u^1 u^1 + u^2 u^2 + u^3 u^3) + \\ &+ \underbrace{\sqrt{\mu} u^1 ((u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2)}_{=1} = -\sqrt{\mu} (\mathbf{u}^2)' u^1 + \sqrt{\mu} u^1. \end{aligned}$$

Similarly,  $\sum_{i,j=1}^3 \Gamma_{ij}^2 u^i u^j = -\sqrt{\mu} (\mathbf{u}^2)' u^2 + \sqrt{\mu} u^2$  and  $\sum_{i,j=1}^3 \Gamma_{ij}^3 u^i u^j = -\sqrt{\mu} (\mathbf{u}^2)' u^3 + \sqrt{\mu} u^3$ . Since  $(\mathbf{u}^2)' = \|\mathbf{u}\|^{2'} = \left( \frac{2}{\sqrt{\mu}} - 1 \right)' = \sqrt{\mu} \left( \frac{1}{\mu} \right)'$ , we get the expression of the vector function  $\mathbf{v}$ . The next scalar products in the statement of the lemma are obtained by (1) and

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}' \rangle = \frac{\sqrt{\mu}}{2} \left( \frac{1}{\mu} \right)' \text{ after the necessary differentiations.} \quad \square$$

The proofs of the next lemmas are routine, replacing the Christoffel symbols by (2).

**Lemma 2.2.** Let  $\mathbf{w} = \mathbf{w}(s)$  be a vector function in  $\mathbb{R}^3$  with coordinate functions  $w^k(s) = \sum_{i,j=1}^3 \Gamma_{ij}^k u^i u^{j'}$ ,  $k = 1, 2, 3$ , where  $\Gamma_{ij}^k$  are the Christoffel symbols for the sphere  $\mathbb{S}^3$  and  $u^i = u^i(s)$ ,  $i = 1, 2, 3$  are the coordinate functions of the unit speed curve  $c : \mathbf{u} = \mathbf{u}(s)$ . Then

$$\mathbf{w} = -\frac{\mu}{2} \left( \frac{1}{\mu} \right)' \cdot \mathbf{u}'' + \frac{1}{4} \left( 4\sqrt{\mu} + \mu^2 \left( \frac{1}{\mu} \right)'^2 - 2\mu \left( \frac{1}{\mu} \right)'' \right) \cdot \mathbf{u}'$$

and

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{w}, \mathbf{u}'' \rangle &= -\frac{\mu}{2} \left( \frac{1}{\mu} \right)' \mu^2, \quad \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle = 0, \\ \langle \mathbf{w}, \mathbf{u}' \rangle &= -\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}'' \rangle = \sqrt{\mu} + \frac{\mu^2}{4} \left( \frac{1}{\mu} \right)'^2 - \frac{\mu}{2} \left( \frac{1}{\mu} \right)'' . \end{aligned}$$

**Lemma 2.3.** Let  $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}(s)$  be a vector function in  $\mathbb{R}^3$  with coordinate functions  $\eta^k(s) = \sum_{i,j=1}^3 \Gamma_{ij}^k u^i (u' \times u'')^j$ ,  $k = 1, 2, 3$ , where  $\Gamma_{ij}^k$  are the Christoffel symbols for the sphere  $\mathbb{S}^3$ ,  $u^i = u^i(s)$ ,  $i = 1, 2, 3$  are the coordinate functions of the unit speed curve  $c : \mathbf{u} = \mathbf{u}(s)$  and  $(u' \times u'')^j$ ,  $j = 1, 2, 3$  are the coordinate functions of the vector product  $\mathbf{u}' \times \mathbf{u}''$  in  $\mathbb{R}^3$ . Then

$$\boldsymbol{\eta} = -\frac{\mu}{2} \left( \frac{1}{\mu} \right)' \cdot (\mathbf{u}' \times \mathbf{u}'') - \sqrt{\mu} \langle \mathbf{u} \times \mathbf{u}', \mathbf{u}'' \rangle \cdot \mathbf{u}'.$$

and

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\eta}, \mathbf{u}'' \rangle &= \langle \boldsymbol{\eta}, \mathbf{v} \rangle = 0, \\ \langle \boldsymbol{\eta}, \mathbf{u}' \rangle &= -\langle \mathbf{u}' \times \mathbf{u}'', \mathbf{v} \rangle = -\sqrt{\mu} \langle \mathbf{u} \times \mathbf{u}', \mathbf{u}'' \rangle . \end{aligned}$$

Let  $c$  be a Frenet space curve in  $\mathbb{R}^3$ . We denote by  $\gamma$  the stereographic pre-image of  $c$  on the sphere  $\mathbb{S}^3$ , i.e.  $\pi(\gamma) = c$ . Let  $\mathbf{l} = \mathbf{l}(\sigma)$ ,  $\sigma \in J$  be the vector parametric equation of  $\gamma$ , parameterized by an arc-length

parameter  $\sigma$ . We have that  $l^2 = 1$ ,  $l'^2 = 1$  and  $\langle l, l' \rangle = 0$ ,  $\langle l, l'' \rangle = -1$ ,  $\langle l, l''' \rangle = 0$ . The vector field  $l + l''$  is orthogonal to  $l$  and  $(l + l'')^2 = l'^2 - 1 \geq 0$ . A curve  $\gamma$  is said to be regular if  $(l + l'')^2 = l'^2 - 1 > 0$  for every  $\sigma \in J$ . A moving frame  $ltnb$  at any point of a regular curve  $\gamma$  on  $\mathbb{S}^3$  is introduced as follows:  $t = l'$ ,  $n = \frac{l + l''}{\|l + l''\|}$  and  $b$  is the unique vector, determined by the condition  $ltnb$  to be a right-handed orthonormal frame. The function  $\tilde{\kappa} = \|l + l''\| = \sqrt{l'^2 - 1} > 0$  is called a spherical curvature of  $\gamma$ . The vector field

$$n' + \tilde{\kappa}t = -\frac{\tilde{\kappa}'}{\tilde{\kappa}^2}(l + l'') + \frac{1 + \tilde{\kappa}^2}{\tilde{\kappa}}l' + \frac{1}{\tilde{\kappa}}l''$$

has the direction of the vector  $b$ . So, we can put  $n' + \tilde{\kappa}t = \tilde{\tau}b$ . The function  $\tilde{\tau}$  is called a spherical torsion of  $\gamma$ . For the moving frame  $ltnb$  we obtain the following Frenet type formulas

$$l' = t, \quad t' = -l + \tilde{\kappa}n, \quad n' = -\tilde{\kappa}t + \tilde{\tau}b, \quad b' = -\tilde{\tau}n.$$

If we denote by  $\nabla_t$  the covariant differentiation along the curve  $\gamma$  on  $\mathbb{S}^3$  then  $\nabla_t t = \tilde{\kappa}n$ ,  $\nabla_t n = -\tilde{\kappa}t + \tilde{\tau}b$  and  $\nabla_t b = -\tilde{\tau}n$ . Hence,  $\tilde{\kappa} = \|\nabla_t t\|$  and  $\tilde{\tau} = -\langle \nabla_t b, n \rangle$  (see [6]).

### 3 Main theorem

The fundamental theorem in the space curve theory states that the Euclidean curvature  $\kappa$  and the Euclidean torsion  $\tau$  determine the space curve, parameterized by an arc-length parameter, up to a rigid motion in  $\mathbb{R}^3$ . Also, the spherical curvature  $\tilde{\kappa}$  and the spherical torsion  $\tilde{\tau}$  define the curve, lying on the sphere  $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ , up to a rotation, preserving the sphere  $\mathbb{S}^3$ . Relations between the invariants  $\kappa, \tau, \tilde{\kappa}, \tilde{\tau}$  of the corresponding curves via the stereographic projection  $\pi$  will define any Frenet space curve up to transformation of the group  $M_0$ .

**Theorem 3.1.** *Let  $c$  be a Frenet space curve in  $\mathbb{R}^3$ , parameterized by an arc-length parameter  $s$ , and let  $\gamma$  be its stereographic pre-image on*

the sphere  $\mathbb{S}^3$ , i.e.  $\pi(\gamma) = c$ . If  $\varkappa = \varkappa(s)$  and  $\tau = \tau(s)$  are the Euclidean curvature and the Euclidean torsion of the curve  $c$  and  $\tilde{\varkappa} = \tilde{\varkappa}(s)$  and  $\tilde{\tau} = \tilde{\tau}(s)$  are the spherical curvature and the spherical torsion of the curve  $\gamma$  then

$$(3) \quad \tilde{\varkappa}^2 = \frac{1}{\mu} \varkappa^2 - 1 - \frac{3\mu}{4} \left(\frac{1}{\mu}\right)^{\prime 2} + \left(\frac{1}{\mu}\right)''$$

$$(4) \quad \tilde{\tau} = \frac{\cos \theta}{\mu \tilde{\varkappa}} \varkappa \tau - \frac{\sin \theta}{\mu \tilde{\varkappa}} \varkappa',$$

where

$$(5) \quad \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{\mu \varkappa \tilde{\varkappa}}} \left( \varkappa^2 - \frac{1}{4} \mu^2 \left(\frac{1}{\mu}\right)^{\prime 2} + \frac{1}{2} \mu \left(\frac{1}{\mu}\right)'' - \sqrt{\mu} \right).$$

*Proof.* Let  $\mathbf{l} = \mathbf{l}(s)$  be a vector parametric equation of  $\gamma$  and  $\sigma = \sigma(s)$  be its arc-length function. If  $c : \mathbf{u}(s) = (u^1(s), u^2(s), u^3(s))$  then  $\dot{\mathbf{l}} = \frac{d\mathbf{l}}{ds} = \sum_{i=1}^3 (u^i)' \mathbf{l}_i$ . The form  $d\sigma = \sqrt{\mu} ds$  is the linear element of the curve  $\gamma$  on the sphere  $\mathbb{S}^3$ . Thus, the unit tangent vector field is represented by  $\mathbf{t} = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \dot{\mathbf{l}}$ . Applying the covariant differentiation  $\nabla_{\mathbf{t}}$  we obtain that

$$(6) \quad \nabla_{\mathbf{t}} \mathbf{t} = \sum_{k=1}^3 \left( \frac{1}{\mu} (u^k)'' + \frac{1}{\mu} v^k + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\mu}\right)' (u^k)' \right) \mathbf{l}_k,$$

where  $v^k = v^k(s)$ ,  $k = 1, 2, 3$  are the coordinate functions of the vector function  $\mathbf{v}$ , defined in Lemma 2.1. Hence,  $\tilde{\varkappa}^2 =$

$$= \|\nabla_{\mathbf{t}} \mathbf{t}\|^2 = \frac{1}{\mu} \varkappa^2 + \frac{1}{\mu} v^2 + \frac{\mu}{4} \left(\frac{1}{\mu}\right)^{\prime 2} + \frac{2}{\mu} \langle \mathbf{u}'', \mathbf{v} \rangle + \left(\frac{1}{\mu}\right)' \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}' \rangle$$

and replacing with the equalities in Lemma 2.1 we get (3). The stereographic projection  $\pi$  and the reverse map  $\pi^{-1}$  are conformal maps and the differential  $\pi_*^{-1}$  of the reverse map  $\pi^{-1}$  is a similarity transformation between the corresponding tangent spaces with a coefficient  $\sqrt{\mu}$ . If  $T = \mathbf{u}'$ ,  $N = \frac{\mathbf{u}''}{\varkappa}$ ,  $B = T \times N = \frac{\mathbf{u}' \times \mathbf{u}''}{\varkappa}$  are the Frenet frame vector field along the curve  $c$  then  $\pi_*^{-1}(N) = \frac{1}{\varkappa} \sum_{i=1}^3 (u^i)'' l_i$  and  $\pi_*^{-1}(B) = \frac{1}{\varkappa} \sum_{i=1}^3 (u' \times u'')^i l_i$ . Vectors  $\pi_*^{-1}(N)$  and  $\pi_*^{-1}(B)$ , lying in the plane, determined by vectors  $\mathbf{n}$  and  $\mathbf{b}$ , are orthogonal and let  $\theta = \angle(\mathbf{n}, \pi_*^{-1}(N))$ . Then  $\mathbf{n} = \frac{\cos \theta}{\sqrt{\mu}} \pi_*^{-1}(N) + \frac{\sin \theta}{\sqrt{\mu}} \pi_*^{-1}(B)$ . Hence,

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \langle \mathbf{n}, \pi_*^{-1}(N) \rangle = \frac{1}{\tilde{\varkappa} \varkappa \sqrt{\mu}} \langle \nabla_t \mathbf{t}, \sum_{i=1}^3 (u^i)'' l_i \rangle$$

and

$$\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \langle \mathbf{n}, \pi_*^{-1}(B) \rangle = \frac{1}{\tilde{\varkappa} \varkappa \sqrt{\mu}} \langle \nabla_t \mathbf{t}, \sum_{i=1}^3 (u' \times u'')^i l_i \rangle.$$

Using (6) we obtain that  $\cos \theta = \frac{1}{\tilde{\varkappa} \varkappa \sqrt{\mu}} (\mathbf{u}''^2 + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}'' \rangle) = \frac{1}{\tilde{\varkappa} \varkappa \sqrt{\mu}} (\varkappa^2 + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}'' \rangle)$ , whence applying Lemma 2.1 we get (5). Also,

$$(7) \quad \sin \theta = \frac{1}{\tilde{\varkappa} \varkappa \sqrt{\mu}} \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}' \times \mathbf{u}'' \rangle = \frac{1}{\tilde{\varkappa} \varkappa} \langle \mathbf{u} \times \mathbf{u}', \mathbf{u}'' \rangle.$$

Observing that  $\pi$  is an orientation preserving map in odd dimension, we have that  $\mathbf{b} = \frac{-\sin \theta}{\sqrt{\mu}} \pi_*^{-1}(N) + \frac{\cos \theta}{\sqrt{\mu}} \pi_*^{-1}(B) =$

$= -\frac{1}{\varkappa\sqrt{\mu}} \sum_{i=1}^3 (\sin \theta (u^i)'' - \cos \theta (u' \times u'')^i) l_i$ . Therefore, using the covariant differentiation technique, we get

$$\begin{aligned} \nabla_t \mathbf{b} &= \frac{1}{\sqrt{\mu}} \nabla_i \mathbf{b} = -\frac{1}{\sqrt{\mu}} \sum_{k=1}^3 \left[ \frac{1}{\varkappa\sqrt{\mu}} (\sin \theta (w^k + (u^k)''') - \right. \\ &\left. - \cos \theta (\eta^k + (u' \times u'')^k)) + \left( \frac{\sin \theta}{\varkappa\sqrt{\mu}} \right)' (u^k)'' - \left( \frac{\cos \theta}{\varkappa\sqrt{\mu}} \right)' (u' \times u'')^k \right] l_k. \end{aligned}$$

Thus,

$$\begin{aligned} \tilde{\tau} &= -\langle \nabla_t \mathbf{b}, n \rangle = -\frac{1}{\tilde{\varkappa}} \langle \nabla_t \mathbf{b}, \nabla_t t \rangle = \frac{\sqrt{\mu}}{\tilde{\varkappa}} \left[ \frac{\sin \theta}{\varkappa\mu\sqrt{\mu}} \cdot \right. \\ &\left( \underbrace{\langle w, u'' \rangle + \langle u''', u'' \rangle + \langle w, v \rangle + \langle u''', v \rangle}_A \right) + \frac{\sin \theta}{2\varkappa\sqrt{\mu}} \left( \frac{1}{\mu} \right)' \cdot \\ &\left( \underbrace{\langle w, u' \rangle + \langle u''', u' \rangle}_B \right) - \frac{\cos \theta}{\varkappa\mu\sqrt{\mu}} \cdot \\ &\left( \underbrace{\langle \eta, u'' \rangle + \langle u' \times u''', u'' \rangle + \langle \eta, v \rangle + \langle u' \times u''', v \rangle}_C \right) - \\ &\quad - \frac{\cos \theta}{2\varkappa\sqrt{\mu}} \left( \frac{1}{\mu} \right)' \underbrace{\langle \eta, u' \rangle}_D + \\ &\left. + \frac{1}{\mu} \left( \frac{\sin \theta}{\varkappa\sqrt{\mu}} \right)' \left( \underbrace{\varkappa^2 + \langle u''', v \rangle}_E \right) - \frac{1}{\mu} \left( \frac{\cos \theta}{\varkappa\sqrt{\mu}} \right)' \underbrace{\langle u' \times u'', v \rangle}_F \right] = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\tilde{\varkappa}} \left[ \frac{\sin \theta}{\varkappa \mu} .A + \frac{\sin \theta}{2\varkappa} \left( \frac{1}{\mu} \right)' .B - \frac{\cos \theta}{\varkappa \mu} .C - \frac{\cos \theta}{2\varkappa} \left( \frac{1}{\mu} \right)' .D + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{\mu}} \left( \frac{\sin \theta}{\varkappa \sqrt{\mu}} \right)' .E - \frac{1}{\sqrt{\mu}} \left( \frac{\cos \theta}{\varkappa \sqrt{\mu}} \right)' .F. \right]$$

Applying the lemmas 2.1, 2.2, 2.3 and taking account of the equalities (1), (5), (7) we have that  $A = -\varkappa \varkappa' + \sqrt{\mu}(\varkappa \tilde{\varkappa} \cos \theta)'$ ,  $-B = E = \sqrt{\mu} \varkappa \tilde{\varkappa} \cos \theta$ ,  $C = -\varkappa^2 \tau + \sqrt{\mu}(\varkappa \tilde{\varkappa} \sin \theta)'$ ,  $-D = F = \sqrt{\mu} \varkappa \tilde{\varkappa} \sin \theta$ . Replacing the found expressions in the equality above we obtain (4) after simple rearranges and simplifications.  $\square$

#### 4 Möbius invariants of space curves

It is obvious that the arc-length function  $\sigma = \sigma(s)$  is an invariant with respect to the group  $M_0$ . Let us denote by  $S_\sigma(s)$  the Schwarzian derivative of the function  $\sigma = \sigma(s)$ . Then we have that

$$S_\sigma(s) = \left( \frac{\sigma''}{\sigma'} \right)' - \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma''}{\sigma'} \right)^2 = \frac{1}{2} \left[ \frac{3}{4} \mu^2 \left( \frac{1}{\mu} \right)'^2 - \mu \left( \frac{1}{\mu} \right)'' \right].$$

If  $s = s(\sigma)$  is the reverse function of  $\sigma$  then we get  $0 = S_{\sigma \circ s}(\sigma) = S_\sigma(s) \left( \frac{ds}{d\sigma} \right)^2 + S_s(\sigma) \Rightarrow S_\sigma(s) = -\mu S_s(\sigma)$  applying the chain rule for the Schwarzian derivatives. The functions  $\tilde{\varkappa}$  and  $\tilde{\tau}$  from Theorem 3.1 can be expressed in terms of the arc-length parameter  $\sigma$ . We set  $\mathfrak{K}(\sigma) = \tilde{\varkappa}^2(\sigma)$ ,  $\mathfrak{T}(\sigma) = \tilde{\tau}(\sigma)$  and we obtain that

$$(8) \quad \mathfrak{K}(\sigma) = \frac{1}{\mu} \varkappa^2 - 1 + 2S_s(\sigma) \\ \mathfrak{T}(\sigma) = \frac{1}{\mu \sqrt{\mathfrak{K}}} \left( \varkappa \tau \cos \theta - \sqrt{\mu} \frac{d\varkappa}{d\sigma} \sin \theta \right),$$

$$\text{where } \cos \theta = \frac{1}{\varkappa \sqrt{\mu \mathfrak{K}}} \left( \varkappa^2 + \mu S_s(\sigma) + \frac{1}{8\mu} \left( \frac{d\mu}{d\sigma} \right)^2 - \sqrt{\mu} \right).$$

**Corollary 4.1.** *The functions  $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}(\sigma)$  and  $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}(\sigma)$ , define by (8), are invariants under the group  $M_0$ .*

*Proof.* The proof is omitted.  $\square$

**Theorem 4.2** (Uniqueness theorem). *Let  $I \subset \mathbb{R}$  be an open interval and let  $c_i : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $i = 1, 2$  be two Frenet space curves, parameterized by the same arc-length parameter  $\sigma$  of their stereographic pre-images  $\gamma_i$ ,  $i = 1, 2$ , respectively, on the sphere  $\mathbb{S}^3$  in  $\mathbb{R}^4$ . Assume that the curves  $c_1$  and  $c_2$  have the same invariants  $\mathfrak{K}_i = \mathfrak{K}_i(\sigma)$ ,  $\mathfrak{T}_i = \mathfrak{T}_i(\sigma)$ ,  $i = 1, 2$ , defined by (8) for any  $\sigma \in I$ . Then there exists a transformation  $F \in M_0$  such that  $c_2 = F(c_1)$ .*

*Proof.* Since  $\mathfrak{K}_1 = \mathfrak{K}_2$  and  $\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T}_2$  then the spherical stereographic pre-images  $\gamma_1$  and  $\gamma_2$  of the curves  $c_1$  and  $c_2$ , respectively, via the stereographic projection  $\pi$ , have the same spherical curvatures and torsions. Therefore, there exists a rotation  $\rho \in SO(4)$  such that  $\gamma_2 = \rho(\gamma_1)$ . Hence,  $c_2 = \pi(c_1) = \pi \circ \rho(\gamma_1) = \pi \circ \rho \circ \pi^{-1}(c_1)$ , where  $F = \pi \circ \rho \circ \pi^{-1} \in M_0$  and the proof is completed.  $\square$

**Theorem 4.3** (Existence theorem). *Let  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f > 0$  and  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  be given  $C^\infty$ -functions, defined on the same interval  $I \subset \mathbb{R}$ . Let  $\mathbf{c}_0 \in \mathbb{R}^3$  and  $\mathbf{e}_1^0, \mathbf{e}_2^0, \mathbf{e}_3^0$  be a right-handed orthonormal frame at  $\mathbf{c}_0$  in the Euclidean space  $\mathbb{R}^3$ . There exists a unique Frenet space curve  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  which satisfies the conditions:*

- (a) *there exists  $\sigma_0 \in I$ , such that  $c(\sigma_0) = \mathbf{c}_0$ , and the Frenet frame of  $c$  at  $\mathbf{c}_0$  is  $\mathbf{e}_1^0, \mathbf{e}_2^0, \mathbf{e}_3^0$ ;*
- (b) *for any  $\sigma \in I$   $\mathfrak{K}(\sigma) = f^2(\sigma)$  and  $\mathfrak{T}(\sigma) = g(\sigma)$ .*

*Proof.* Let  $\mathbf{l}_0 = \pi^{-1}(\mathbf{c}_0)$  and  $\mathbf{t}_0 = \pi_*^{-1}(\mathbf{e}_1^0)$ ,  $\mathbf{n}_0 = \pi_*^{-1}(\mathbf{e}_2^0)$ ,  $\mathbf{b}_0 = \pi_*^{-1}(\mathbf{e}_3^0)$ . Let us consider a matrix-valued function  $\mathcal{E}(\sigma) = (\mathbf{l}(\sigma), \mathbf{t}(\sigma), \mathbf{n}(\sigma), \mathbf{b}(\sigma))^T$ . Solving the system of first order linear differential equations



$$\frac{d}{d\sigma}\mathcal{E} = \mathcal{A}(\sigma)\mathcal{E}, \text{ with a given matrix } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & f & 0 \\ 0 & -f & 0 & g \\ 0 & 0 & -g & 0 \end{pmatrix} \text{ and ini-}$$

tial conditions  $\mathbf{l}_0, \mathbf{t}_0, \mathbf{n}_0, \mathbf{b}_0$  we obtain a unique solution  $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\sigma)$ , determined for all  $\sigma \in I$  and  $\mathcal{E}(\sigma_0) = (\mathbf{l}_0, \mathbf{t}_0, \mathbf{n}_0, \mathbf{b}_0)^T$  for some  $\sigma_0 \in I$ . It is routine to prove that the matrix  $\mathcal{E}$  is orthogonal. This means that the vectors  $\mathbf{l}(\sigma), \mathbf{t}(\sigma), \mathbf{n}(\sigma), \mathbf{b}(\sigma)$  form an orthogonal frame in  $\mathbb{R}^4$  for any  $\sigma \in I$ . Let  $\gamma$  be a spherical curve, defined by the vector function  $\mathbf{l} = \mathbf{l}(\sigma)$  and let  $c = \pi(\gamma)$ . It is clear that the conditions (a) and (b) in the statement of the theorem are fulfilled for the space curve  $c$ .  $\square$

The proof of the last theorem give us an algorithm of recovering space curves up to a transformation from the group  $M_0$ .

**Algorithm.** *Recovering space curves by two functions  $f = f(\sigma) > 0$  and  $g = g(\sigma)$  for any  $\sigma \in I$ .*

1. Choose initial conditions:  $\mathbf{c}_0, \mathbf{e}_1^0, \mathbf{e}_2^0, \mathbf{e}_3^0$ ;
2. Find the vectors  $\mathbf{l}_0 = \pi^{-1}(\mathbf{c}_0), \mathbf{t}_0 = \pi_*^{-1}(\mathbf{e}_1^0), \mathbf{n}_0 = \pi_*^{-1}(\mathbf{e}_2^0), \mathbf{b}_0 = \pi_*^{-1}(\mathbf{e}_3^0)$ ;

3. Solve the differential equation  $\frac{d}{d\sigma}\mathcal{E} = \mathcal{A}(\sigma)\mathcal{E}$ ,

$$\text{where } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & f & 0 \\ 0 & -f & 0 & g \\ 0 & 0 & -g & 0 \end{pmatrix}, \text{ and initial conditions, determined}$$

in Step 1., for  $\mathcal{E}(\sigma_0) = (\mathbf{l}_0, \mathbf{t}_0, \mathbf{n}_0, \mathbf{b}_0)^T$ ;

4. The curves  $\gamma$ , with vector function  $\mathbf{l} = \mathbf{l}(\sigma)$ , and  $c = \pi(\gamma)$  are found.

The next two examples illustrate the considered conformal invariants of a space curve in  $\mathbb{R}^3$ . For the calculations and visualizations we use the computer system Mathematica.

**Example 4.4.** *Let*

$$c : \mathbf{u}(\sigma) = \left\{ \cos \left( \sqrt{2} \tan \left( \frac{\sigma}{2} \right) \right), \sin \left( \sqrt{2} \tan \left( \frac{\sigma}{2} \right) \right), \sqrt{2} \tan \left( \frac{\sigma}{2} \right) \right\}$$

be a helix in  $\mathbb{R}^3$ , parameterized by an arc-length parameter  $\sigma$  of its spherical stereographic pre-image. Then  $\mathfrak{K}(\sigma) = \frac{1}{4 \cos^4 \left( \frac{\sigma}{2} \right)}$  and  $\mathfrak{T}(\sigma) = \frac{\cos \sigma}{1 + \cos \sigma}$ .

**Example 4.5.** *Let  $\mathfrak{K}(\sigma) = \sigma^2$ ,  $\mathfrak{T}(\sigma) = 0.6\sigma$ ,  $\mathbf{c}_0 = (0, 0, 0)$ ,  $\mathbf{e}_1^0 = (0, 0, 1)$ ,  $\mathbf{e}_2^0 = (0, 1, 0)$ . Then, applying the algorithm above, where  $f(\sigma) = \sigma$ , and  $g(\sigma) = 0.6\sigma$ , we obtain the Frenet space curve, depicted in Fig.1.*

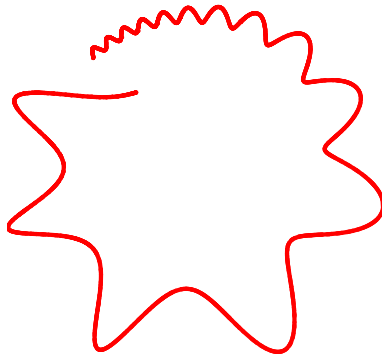


Fig. 1:  $\mathfrak{K}(\sigma) = \sigma^2$ ,  $\mathfrak{T}(\sigma) = 0.6\sigma$

**REFERENCES:**

- [1] Encheva R. and Georgiev G., Similar Frenet Curves, *Result. Math.*, **55** no. **3-4** (2009) 359-372.
- [2] Encheva, R.P., Möbius transformations induced by rotations on the three-sphere, MATTEX 2016, *Conference proceedings*, vol. **1** (2016) 43-50.
- [3] Encheva R., Recovering Plane Curves by One of Their Conformal Invariants, *Proceedings* vol. **53**, book 6.1, Mathematics, Informatics and Physics, Ruse, (2014) 22-27.
- [4] Encheva R., Family of Plane Curves in the Extended Gauss Plane Generated by One Function, Wolfram Demonstrations Project, Published: July 8, 2013 <http://demonstrations.wolfram.com/FamilyOfPlaneCurvesInTheExtendedGaussPlaneGeneratedByOneFunc/>
- [5] Künel W., Differential geometry: Curves-Surfaces-Manifolds, Second Edition, ISBN: 0-8218-3988-8, AMS, 2006.
- [6] Tazawa Y. , Curves and surfaces in the three dimensional sphere placed in the space of quaternions, *Innovation in mathematics, Transactions on Engineering Sciences*, vol. **15** (1997) 459-466.
- [7] Udo Hertrich-Jeromin, Introduction to Möbius Differential Geometry, London Math. Soc. L. N. Series 300, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

**Radostina Petrova Encheva**

Konstantin Preslavsky University of Shumen

Shumen, Bulgaria

r.encheva@shu.bg



## COMMUTING NONSELFADJOINT OPERATORS AND WAVE EQUATIONS\*

GALINA S. BORISOVA, MIROSLAV K. HRISTOV,  
TZONIO G. TZONEV

**ABSTRACT:** *In this paper we present results concerning commuting nonselfadjoint operators and corresponding generalized open systems and matrix wave equations, using Livšic nonselfadjoint operator theory. These results describe the existence and uniqueness of the solutions of the boundary value problem for solutions of the matrix wave equations for output of the generalized open system in the case of  $n$ -tuples of commuting nonselfadjoint bounded operators, when one of them belongs to a larger class of nonselfadjoint nondissipative operators.*

**KEYWORDS:** *Dissipative operator, Operator colligation, Triangular model, Coupling, Open system, Matrix wave equation.*

**2010 Math. Subject Classification:** 47A48, 35M12

### 1 Preliminary results

In this section we will present some preliminary results concerning commuting nonselfadjoint operators generating generalized open systems, corresponding collective motions, and matrix wave equations (considered by G.S. Borisova and K.P. Kirchev in [4]). These essential results are obtained in the case of  $n$ -tuples of commuting nonselfadjoint bounded operators when one of them belongs to a larger class of nondissipative operators, presented as couplings of dissipative and antidissipative operators and they are obtained in [3].

---

\*This paper is partially supported by Scientific Research Grant RD-08-61/2019 of University of Shumen and by the Bulgarian Ministry of Education and Science under the National Program for Research "Young Scientists and Postdoctoral Students".

Let us consider commuting nonselfadjoint bounded linear operators  $A_1, \dots, A_n$  ( $A_k A_s = A_s A_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ ) in a Hilbert space  $H$ . Let these operators be embedded in a *commutative regular colligation*

$$(1) \quad X = (A_1, \dots, A_n; H, \Phi, E; \sigma_1, \dots, \sigma_n, \{\gamma_{ks}\}, \{\tilde{\gamma}_{ks}\}, \\ k, s = 1, \dots, n)$$

where  $E$  is another Hilbert space,  $\Phi$  is a bounded linear mapping of  $H$  into  $E$ ,  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ ,  $\{\gamma_{ks}\}$ ,  $\{\tilde{\gamma}_{ks}\}$ , ( $k, s = 1, 2, \dots, n$ ) are bounded linear selfadjoint operators in  $E$  (where  $\gamma_{ks} = \gamma_{ks}^* = -\gamma_{sk}$ ) and they satisfy the next conditions:

$$(2) \quad (A_k - A_k^*)/i = \Phi^* \sigma_k \Phi,$$

$$(3) \quad \sigma_s \Phi A_k^* - \sigma_k \Phi A_s^* = \gamma_{ks} \Phi,$$

$$(4) \quad \tilde{\gamma}_{ks} = \gamma_{ks} + i(\sigma_k \Phi \Phi^* \sigma_s - \sigma_s \Phi \Phi^* \sigma_k)$$

for  $k, s = 1, 2, \dots, n$ . Instead of the term "regular colligation" one can use the term "vessel", that has been coined in [11].

In what follows, we assume that  $\dim E < \infty$  (which includes the most of important cases) and  $\bigcap_{k=1}^n \ker \sigma_k = \{0\}$ . If  $\text{range } \Phi = E$ , the colligation  $X$  is called a *strict colligation*.

The system-theoretic interpretation of  $n$ -operator colligation leads to an open  $n$ -dimensional system. We consider the generalized open system (introduced by G.S. Borisova and K.P. Kirchev in [4]) from the form

$$(5) \quad \begin{cases} i \frac{1}{\varepsilon_k} \frac{\partial}{\partial x_k} f(x) + A_k f(x) = \Phi^* \sigma_k u(x), & k = 1, 2, \dots, n, \\ v(x) = u(x) - i \Phi f(x), \end{cases}$$

where  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $f(x)|_{\Gamma_+} = f_0(x)$  ( $\Gamma_+ = \partial\mathbb{R}_+^n$ ),  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \mathbb{C}$  are constants and the vector functions

$$\begin{aligned} u(x) &= u(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad v(x) = v(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ f(x) &= f(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

are the input, the output, and the internal state of the open system (5). (In the cases, considered by M.S. Livšić, the open systems are when  $\varepsilon_1 = \dots = \varepsilon_n = 1$ .)

Direct calculations show ([4], Theorem 6.1) that the system (5) has a solution if the function  $f_0(x)$  on  $\Gamma_+$  satisfies the equations from (5) and the vector function  $u(x)$  is a solution of the system

$$(6) \quad \sigma_k \left( -i \frac{1}{\varepsilon_s} \frac{\partial u}{\partial x_s} \right) - \sigma_s \left( -i \frac{1}{\varepsilon_k} \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) + \gamma_{sk} u = 0,$$

( $k, s = 1, 2, \dots, n$ ), i.e. following M.S. Livšić and Y. Avishai [12]  $u(x)$  satisfies the matrix wave equations (6).

The system (5) is over determined in the case when  $n \geq 3$ . To avoid this one has to consider the additional conditions for the operators  $\{\sigma_k, \gamma_{ks}\}$ ,  $k, s = 1, 2, \dots, n$ , when  $\det \sigma_n \neq 0$ . These conditions have been introduced by V. Zolotarev in the paper [14] and have the form:

$$(7) \quad \begin{aligned} \sigma_n^{-1} \sigma_k \sigma_n^{-1} \sigma_s &= \sigma_n^{-1} \sigma_s \sigma_n^{-1} \sigma_k, \\ \sigma_n^{-1} \gamma_{kn} \sigma_n^{-1} \gamma_{sn} &= \sigma_n^{-1} \gamma_{sn} \sigma_n^{-1} \gamma_{kn}, \\ \sigma_n^{-1} \sigma_k \sigma_n^{-1} \gamma_{sn} + \sigma_n^{-1} \gamma_{kn} \sigma_n^{-1} \sigma_s &= \\ &= \sigma_n^{-1} \gamma_{kn} \sigma_n^{-1} \gamma_{sn} + \sigma_n^{-1} \gamma_{sn} \sigma_n^{-1} \gamma_{kn} \end{aligned}$$

$k, s = 1, 2, \dots, n-1$ . The conditions (7) follow from the equalities of the mixed partial derivatives  $\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_s} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_s \partial x_k}$ ,  $k, s = 1, 2, \dots, n$ . Then from (6) it follows that

$$(8) \quad \gamma_{ks} = \sigma_s \sigma_n^{-1} \gamma_{kn} - \sigma_k \sigma_n^{-1} \gamma_{sn}, \quad k, s = 1, 2, \dots, n.$$

Consequently, when  $\sigma_n$  is invertible matrix, the commutative regular colligation is determined by the matrices  $\{\sigma_k\}_{k=1}^n$ ,  $\{\gamma_{kn}\}_{k=1}^{n-1}$ , satisfying

the conditions (7) and other operators  $\gamma_{ks}$ ,  $k, s = 1, 2, \dots, n$  are defined by the equalities (8) (see [4]).

The selfadjoint operators  $\tilde{\gamma}_{ks}$ , defined by (4), satisfy analogous relations as  $\gamma_{ks}$  ( $k, s = 1, 2, \dots, n$ ), i.e.

$$\tilde{\gamma}_{ks} = \tilde{\gamma}_{ks}^* = -\tilde{\gamma}_{sk}, \quad \sigma_k \Phi A_s - \sigma_s \Phi A_k = \tilde{\gamma}_{ks} \Phi,$$

$$\sigma_n^{-1} \sigma_k \sigma_n^{-1} \tilde{\gamma}_{sn} + \sigma_n^{-1} \tilde{\gamma}_{kn} \sigma_n^{-1} \sigma_s = \sigma_n^{-1} \sigma_s \sigma_n^{-1} \tilde{\gamma}_{kn} + \sigma_n^{-1} \tilde{\gamma}_{sn} \sigma_n^{-1} \sigma_k,$$

$$\sigma_n^{-1} \tilde{\gamma}_{kn} \sigma_n^{-1} \tilde{\gamma}_{sn} = \sigma_n^{-1} \tilde{\gamma}_{sn} \sigma_n^{-1} \tilde{\gamma}_{kn}, \quad \tilde{\gamma}_{ks} = \sigma_s \sigma_n^{-1} \tilde{\gamma}_{kn} - \sigma_k \sigma_n^{-1} \tilde{\gamma}_{sn}$$

Now in the case when  $n \geq 3$  we consider the colligation from the form

$$(9) \quad X = (A_1, \dots, A_n; H, \Phi, E; \sigma_1, \dots, \sigma_n, \{\gamma_{kn}\}, \{\tilde{\gamma}_{kn}\}, \\ k = 1, 2, \dots, n-1)$$

instead of the commuting regular colligation (1).

Next, if the input  $u(x)$  of the generalized open system (5), corresponding to the commutative regular colligation (1), satisfies the matrix wave equations (6), then the output  $v(x)$  from (5) satisfies the system (or matrix wave equations)

$$(10) \quad \sigma_k \left( -i \frac{1}{\varepsilon_s} \frac{\partial v}{\partial x_s} \right) - \sigma_s \left( -i \frac{1}{\varepsilon_k} \frac{\partial v}{\partial x_k} \right) + \tilde{\gamma}_{ks} v = 0,$$

$k, s = 1, 2, \dots, n$  (see [4], Theorem 6.2).

Let us consider the case when one of the operators  $A_1, A_2, \dots, A_n$  is a coupling of dissipative and antidissipative operators with real absolutely continuous spectra (for example,  $A_1$ ) and  $\varepsilon_1 = 1$ . (The operator  $B$  is said to be a coupling in a Hilbert space  $H$ , if  $B$  has the representation

$$(11) \quad B = P_1 B P_1 + P_1 B P_2 + P_2 B P_2,$$

where  $P_1, P_2$  are orthogonal projectors in  $H$ ) Without loss of generality we can suppose that  $A_1 = B$ , where  $B$  is the triangular model of this



coupling (introduced by G.S. Borisova in [1] and investigated by G.S. Borisova and K.P. Kirchev in [6], [7]):

$$(12) \quad Bf(w) = \alpha(w)f(w) - i \int_{a'}^w f(\xi)\Pi(\xi)S^*\Pi^*(w)d\xi + \\ + i \int_w^{b'} f(\xi)\Pi(\xi)S\Pi^*(w)d\xi + i \int_{a'}^w f(\xi)\Pi(\xi)L\Pi^*(w)d\xi,$$

where  $f = (f_1, f_2, \dots, f_p) \in H = \mathbf{L}^2(\Delta; \mathbb{C}^p)$ ,  $\Delta = [a', b']$ ,  $L : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$ ,  $\det L \neq 0$ ,  $L^* = L$ ,  $L = J_1 - J_2 + S + S^*$ ,

$$(13) \quad J_1 = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{m-r} \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \widehat{S} & 0 \end{pmatrix},$$

$r$  is the number of positive eigenvalues and  $m - r$  is the number of negative eigenvalues of the matrix  $L$ ,  $\Pi(w)$  is a measurable  $p \times m$  ( $1 \leq p \leq m$ ) matrix function on  $\Delta$ , whose rows are linearly independent at each point of a set of positive measure, the matrix function  $\widetilde{\Pi}(w) = \Pi^*(w)\Pi(w)$  satisfies the conditions  $\text{tr } \widetilde{\Pi}(w) = 1$ ,  $\widetilde{\Pi}(w)J_1 = J_1\widetilde{\Pi}(w)$ ,  $\|\widetilde{\Pi}(w_1) - \widetilde{\Pi}(w_2)\| \leq C|w_1 - w_2|^{\alpha_1}$  for all  $w_1, w_2 \in \Delta$  for some constant  $C > 0$ ,  $\alpha_1$  is an appropriate constant with  $0 < \alpha_1 \leq 1$  (see [6]), (where  $\|\cdot\|$  is the norm in  $\mathbb{C}^m$ ) and the function  $\alpha : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  satisfies the conditions:

- (i) the function  $\alpha(w)$  is continuous strictly increasing on  $\Delta$ ;
- (ii) the inverse function  $\sigma(u)$  of  $\alpha(w)$  is absolutely continuous on  $[a, b]$  ( $a = \alpha(a')$ ,  $b = \alpha(b')$ );
- (iii) the function  $\sigma'(u)$  is continuous and satisfies the relation  $|\sigma'(u_1) - \sigma'(u_2)| \leq C|u_1 - u_2|^{\alpha_2}$ , ( $0 < \alpha_2 \leq 1$ ) for all  $u_1, u_2 \in [a, b]$  and for some constant  $C > 0$ .

The operator  $B$  from (12) satisfies the condition  $(B - B^*)/i = \Phi^*L\Phi$ , where the operator  $\Phi : H \rightarrow H$  is defined by the equality

$$\Phi f(w) = \int_{a'}^{b'} f(w)\Pi(w)dw$$

and  $B$  has the representation (11),  $P_1 f(w) = f(w)\Pi(w)J_1 Q(w)$  and  $P_2 f(w) = f(w)\Pi(w)J_2 Q(w)$ , where  $Q(w)$  is  $m \times p$  smooth matrix function on  $\Delta$  satisfying the condition  $\Pi(w)Q(w) = I$ .

The existence of the wave operators

$$W_{\pm}(B^*, B) = s - \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{ixB^*} e^{-ixB}$$

of the couple of operators  $(B, B^*)$  as strong limits has been established and their explicit form has been obtained in [6] and [2], i.e.

$$(14) \quad W_{\pm}(B^*, B) = s - \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{ixB^*} e^{-ixB} = \tilde{S}_{\mp}^* \tilde{S}_{\mp}.$$

The explicit form of the operators  $\tilde{S}_{\mp}$  on the right hand side of the relation (14) for the operator  $B$  with triangular model (12) has been obtained in [6] in the terms of the multiplicative integrals and the finite dimensional analogue of the classical gamma function (introduced in [6]) and presented by (16).

To avoid complications of writing we consider the case when  $\alpha(w) = w$ , i.e. the operator  $B$  has the form

$$(15) \quad \begin{aligned} Bf(w) = & w f(w) - i \int_{a'}^w f(\xi) \Pi(\xi) S^* \Pi^*(w) d\xi + \\ & + i \int_w^{b'} f(\xi) \Pi(\xi) S \Pi^*(w) d\xi + i \int_{a'}^w f(\xi) \Pi(\xi) L \Pi^*(w) d\xi, \end{aligned}$$

Then the operators  $\tilde{S}_{\mp}$  take the form (see, for example, [6], [4]).

$$(16) \quad \tilde{S}_{\pm} f(w) = (\hat{S}_{\pm} f(w)) T_{\pm}, \quad \hat{S}_{\pm} f = \tilde{S}_{11} f + \tilde{S}_{22} f + \tilde{S}_{12}^{\pm} f,$$

$$S_{\pm} f(w) = (\hat{S}_{\pm} f(w)) T_{\pm} \Pi(w) (J_1 |t|^{i\tilde{\Pi}_1(w)} J_1 + J_2 |t|^{-i\tilde{\Pi}_2(w)} J_2) Q(w),$$

$$\begin{aligned} T_{\pm} h = & h (J_1 U_{2a'}(w) w^{i\tilde{\Pi}_1(w)} e^{\mp \frac{\pi}{2} \tilde{\Pi}_1(w)} \mathbf{\Gamma}^{-1} (I + i\tilde{\Pi}_1(w)) J_1 + \\ & + J_2 \tilde{U}_{2a'}(w) w^{-i\tilde{\Pi}_2(w)} e^{\pm \frac{\pi}{2} \tilde{\Pi}_2(w)} \mathbf{\Gamma}^{-1} (I - i\tilde{\Pi}_2(w)) J_2) \Pi^*(w) \end{aligned}$$

( $\forall h \in \mathbb{C}^m$ ),

$$\begin{aligned}\tilde{S}_{kk}f(w) &= \int_{a'}^x \tilde{f}'(\xi) \int_{a'}^w e^{\frac{(-1)^{k+1}i\tilde{\Pi}_1(v)}{v-\xi}} dv d\xi J_k, \\ \tilde{S}_{12}^\pm f(w) &= - \int_{a'}^{b'} \tilde{f}'(\xi) \tilde{F}_\xi^\mp(w, b') d\xi S, \\ U_{2\xi}(w) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\xi}^{w-\delta} e^{\frac{-i\tilde{\Pi}_1(v)}{v-w}} dv e^{i \int_{\xi}^{w-\delta} \frac{\tilde{\Pi}_1(w)}{v-w} dv}, \\ \tilde{U}_{2\xi}(w) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\xi}^{w-\delta} e^{\frac{i\tilde{\Pi}_2(v)}{v-w}} dv e^{-i \int_{\xi}^{w-\delta} \frac{\tilde{\Pi}_2(w)}{v-w} dv}, \\ \Gamma(\varepsilon I - iT(u)) &= \int_0^\infty e^{-x} e^{((\varepsilon-1)I - iT(u)) \ln x} dx \quad (\varepsilon > 0). \\ \tilde{\Pi}_k(w) &= J_k \tilde{\Pi}(w) J_k = J_k \Pi^*(w) \Pi(w) J_k, \\ \tilde{f}(w) &= f(w) Q^*(w),\end{aligned}$$

$k = 1, 2$ . In the last equality,  $m \times p$  matrix function  $Q(w)$  is smooth on  $\Delta$  and satisfies the condition  $\Pi(w)Q(w) = I$ .

## 2 The main results

Let us consider commuting nonselfadjoint bounded linear operators  $A_1, \dots, A_n$  with  $A_1 = B$ ,  $B$  from the form (15) and let they be embedded in the regular colligation

$$X = (A_1 = B, \dots, A_n; H = \mathbf{L}^2(\Delta, \mathbb{C}^p), \Phi, E = \mathbb{C}^m; \{\sigma_k\}, \{\tilde{\gamma}_{kn}\}, k = 1, \dots, n-1).$$

(Here the operators  $\Phi, \{\sigma_k\}, \{\tilde{\gamma}_{kn}\}, k = 1, \dots, n-1$ , are stated as in Section 1.)

Let  $\hat{H}$  be the principal subspace of the colligation  $X$  from the form (1) and  $A_1 = B$ , where  $B$  is the triangular model (12), i.e.

$$(17) \quad \hat{H} = \overline{\text{span}} \{A_1^{m_1} \dots A_n^{m_n} \Phi^* E, m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}.$$

Let  $\tilde{H}$  be the set of solutions of the system (10)

$$(18) \quad v_h(x_1, \dots, x_n) = \Phi e^{i(\varepsilon_1 x_1 A_1 + \dots + \varepsilon_n x_n A_n)} h, \quad h \in \hat{H}.$$

Let the operator  $U : \hat{H} \rightarrow \tilde{H}$  be defined by the equality

$$(19) \quad Uh = \Phi e^{i(\varepsilon_1 x_1 A_1 + \dots + \varepsilon_n x_n A_n)} h = v_h(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad h \in \hat{H}.$$

From Theorem 6 [3] it follows that the equality

$$(20) \quad \begin{aligned} & \langle v_{h_1}(x_1, \dots, x_n), v_{h_2}(x_1, \dots, x_n) \rangle = \\ & = \lim_{x_1 \rightarrow +\infty} (e^{ix_1 A_1} h_1, e^{ix_1 A_1} h_2)_+ \\ & + \int_0^\infty (\sigma_n v_{h_1}(x_1, 0, \dots, 0), v_{h_2}(x_1, 0, \dots, 0)) dx_1 = \\ & = (\tilde{S}_+^* \tilde{S}_+ h_1, h_2)_+ \\ & + \int_0^\infty (\sigma_1 v_{h_1}(x_1, 0, \dots, 0), v_{h_2}(x_1, 0, \dots, 0)) dx_1, \end{aligned}$$

defines a scalar product in the space  $\tilde{H}$  of solutions  $v_h(x)$  from (18) ( $h \in \hat{H}$ ,  $\varepsilon_1 = 1$ ,  $A_1 = B$ ).

The equalities (20) and  $\langle v_{h_1}, v_{h_2} \rangle = (h_1, h_2)$  imply also that the operator  $U$ , defined by (19), is an isometric one and  $\langle v_{h_1}, v_{h_2} \rangle = \langle Uh_1, Uh_2 \rangle = (h_1, h_2)$ ,  $h_1, h_2 \in \hat{H}$ .

Following the introduced terminology by M.S. Livšić in [8] the functions  $v_h(x_1, \dots, x_n)$  and  $v_h(x_1, 0, \dots, 0)$  are said to be the output representation and the mode of the element  $h \in \tilde{H}$  correspondingly.

The case of two commuting nonselfadjoint operators  $(A_1, A_2)$  where  $A_1$  is a dissipative operator (i.e.  $(A_1 - A_1^*)/i \geq 0$ ) with zero limit  $\lim_{x_1 \rightarrow \infty} (e^{ix_1 A_1} h, e^{ix_1 A_1} h) = 0$  ( $h \in H$ ) (i.e. the characteristic operator function  $W(1, 0, z) = W_{A_1}(z)$  is an inner function),  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ , considered by M.S. Livšić in [8], and the case of  $n$  commuting nonselfadjoint operators  $(A_1, \dots, A_n)$ , where  $A_1$  is a dissipative operator with nonzero limit  $\lim_{x_1 \rightarrow \infty} (e^{ix_1 A_1} h, e^{ix_1 A_1} h) \neq 0$  ( $h \in$

$H$ ), considered by G.S. Borisova and K.P. Kirchev in [5], show that a given mode  $v_0(x_1)$  determines uniquely the corresponding output representation  $v(x_1, \dots, x_n)$  by the equations (10) and  $v(x_1, 0, \dots, 0) = v_0(x_1)$  in the region of an existence and uniqueness of the solutions (see [13]). The case when  $n = 2$ ,  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$  for operators  $A_1, A_2$  with  $\det \sigma_2 \neq 0$  and with an assumption for an existence of the limit  $\lim_{x_1 \rightarrow \infty} (e^{ix_1 A_1} h, e^{ix_1 A_1} h)$  has been considered in [11].

The next theorem solves a similar problem for the output and the mode

$$v_h(x_1, \dots, x_n), \quad v_h(0, \dots, 0, x_n)$$

correspondingly in the case of  $n$  operators ( $n \geq 3$ ) with nonzero constants  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ , when  $A_1 = B$  is a coupling of dissipative and antidissipative operators with real absolutely continuous spectra, which ensures the existence of the limit  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{ixB} f, e^{ixB} f)$ , obtained explicitly in [6]. In this case we essentially use the conditions of V.A. Zolotarev [14].

We consider now the boundary value problem for solutions of the partial differential equations

$$(21) \quad \begin{cases} \sigma_n \left( -i \frac{1}{\varepsilon_k} \frac{\partial v}{\partial x_k} \right) - \sigma_k \left( -i \frac{1}{\varepsilon_n} \frac{\partial v}{\partial x_n} \right) + \tilde{\gamma}_{kn} v = 0, \\ (k = 1, 2, \dots, n-1) \\ v(0, \dots, 0, x_n) = v_0(x_n) \end{cases}$$

which are restrictions to  $\mathbb{R}^n$  of entire functions on  $\mathbb{C}^n$ . We will denote by  $(z_1, \dots, z_n)$  the coordinates on  $\mathbb{C}^n$  and by  $(x_1, \dots, x_n)$  the coordinates on  $\mathbb{R}^n$ .

**Theorem 1.** *Let  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \{\tilde{\gamma}_{kn}\}$  ( $k = 1, 2, \dots, n-1$ ) be  $m \times m$  hermitian matrices with  $\det \sigma_n \neq 0$  and they satisfy the conditions of V.A. Zolotarev (7). Then*

$$(22) \quad 1) \text{ if } v(x_1, \dots, x_n) \text{ is a solution of} \\ \sigma_n \frac{1}{\varepsilon_k} \frac{\partial v}{\partial x_k} - \sigma_k \frac{1}{\varepsilon_n} \frac{\partial v}{\partial x_n} + i \tilde{\gamma}_{kn} v = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n-1,$$

which is a restriction to  $\mathbb{R}^n$  of entire function on  $\mathbb{C}^n$ , and  $v(0, \dots, 0, x) = 0$  for all  $x \in \mathbb{R}$ , then  $v(x_1, \dots, x_n) = 0$ ;

2) if  $\{v_l(x_1, \dots, x_n)\}$  is a sequence of solutions of (22) which are restrictions to  $\mathbb{R}^n$  of entire function on  $\mathbb{C}^n$ , satisfying the condition  $v_l(x, 0, \dots, 0) \rightarrow g(x)$  as  $l \rightarrow \infty$  ( $\forall x \in \mathbb{R}$ ), where  $g(x)$  is a function on  $\mathbb{R}$  which is infinitely differentiable in a neighbourhood of 0 and there exists a constant  $C$  such that

$$(23) \quad \lim_{l \rightarrow \infty} \left( \left( \frac{\partial v_l}{\partial x_n^k}(0, \dots, 0) - \frac{d^k g}{dx^k}(0) \right) / C^k \right) = 0$$

uniformly according to  $k$ , then there exists a solution  $v(x_1, \dots, x_n)$  of (22) which is a restriction to  $\mathbb{R}^n$  of an entire function on  $\mathbb{C}^n$ , such that  $v(0, \dots, 0, x) = g(x)$  for all  $x \in \mathbb{R}$  and the sequence  $v_l(z_1, \dots, z_n) \rightarrow v(z_1, \dots, z_n)$  as  $l \rightarrow \infty$  uniformly on compact subset on  $\mathbb{C}^n$ .

*Proof.* At first we will prove 1). Let  $v(x_1, \dots, x_n)$  be a solution of (22) and a restriction to  $\mathbb{R}^n$  of an entire function on  $\mathbb{C}^n$ . Let

$$(24) \quad v(0, \dots, 0, x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Now we have

$$(25) \quad \frac{\partial v}{\partial x_n}(0, \dots, 0, x) = 0.$$

Then from (22) we obtain that

$$(26) \quad \frac{1}{\varepsilon_k} \sigma_n \frac{\partial v}{\partial x_k}(0, \dots, 0, x) - \frac{1}{\varepsilon_n} \sigma_k \frac{\partial v}{\partial x_n}(0, \dots, 0, x) + \tilde{i}\tilde{\gamma}_{kn} v(0, \dots, 0, x) = 0$$

( $\forall k = 1, 2, \dots, n - 1$ ). The equalities (24), (25) and the condition  $\det \sigma_n \neq 0$  imply that

$$(27) \quad \frac{\partial v}{\partial x_k}(0, \dots, 0, x) = 0 \quad \forall k = 1, 2, \dots, n - 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Now from (25) and (22) we obtain that

$$(28) \quad \frac{\partial^{r_n} v}{\partial x_n^{r_n}}(0, \dots, 0, x) = 0 \quad \forall r_n = 1, 2, \dots, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

and

$$(29) \quad \frac{1}{\varepsilon_k} \sigma_n \frac{\partial^{r_n} v}{\partial x_n^{r_n-1} \partial x_k} - \frac{1}{\varepsilon_n} \sigma_k \frac{\partial^{r_n} v}{\partial x_n^{r_n}} + i\tilde{\gamma}_{kn} \frac{\partial^{r_n-1} v}{\partial x_n^{r_n-1}} = 0.$$

Using (28), (24) and  $\det \sigma_n \neq 0$  the equality (29) takes the form

$$(30) \quad \frac{\partial^{r_n} v}{\partial x_n^{r_n-1} \partial x_k}(0, \dots, 0, x) = 0 \quad \forall r_n = 1, 2, \dots, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

From the equality (29) after differentiating with respect to  $x_k$  we obtain

$$(31) \quad \sigma_n \frac{1}{\varepsilon_k} \frac{\partial^{r_n+1} v}{\partial x_n^{r_n-1} \partial x_k^2} - \sigma_k \frac{1}{\varepsilon_n} \frac{\partial^{r_n+1} v}{\partial x_n^{r_n} \partial x_k} + i\tilde{\gamma}_{kn} \frac{\partial^{r_n} v}{\partial x_n^{r_n} \partial x_k} = 0.$$

Now from (30) and (31) it follows that

$$(32) \quad \frac{\partial^{r_n+1} v}{\partial x_n^{r_n-1} \partial x_k^2}(0, \dots, 0, x) = 0 \quad \forall r_n = 1, 2, \dots$$

Analogously to (32) by induction we obtain that

$$(33) \quad \frac{\partial^{r_n+r_k} v}{\partial x_n^{r_n} \partial x_k^{r_k}}(0, \dots, 0, x) = 0$$

$\forall r_n, r_k = 1, 2, \dots, \forall k = 1, 2, \dots, n-1.$

Now we consider the equality

$$(34) \quad \sigma_n \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} - \sigma_1 \frac{1}{\varepsilon_n} \frac{\partial v}{\partial x_n} + i\tilde{\gamma}_{1n} v = 0.$$

Then

$$(35) \quad \sigma_n \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2 \partial x_1} - \sigma_1 \frac{1}{\varepsilon_n} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2 \partial x_n} + i\tilde{\gamma}_{1n} \frac{\partial v}{\partial x_2} = 0$$

and hence in the point  $(0, \dots, 0, x)$  we obtain that

$$(36) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x_2 \partial x_1}(0, \dots, 0, x) = 0$$

which follows from (33) and (27).

From the equality (26) we have

$$(37) \quad \sigma_n \frac{1}{\varepsilon_k} \frac{\partial^2 v}{\partial x_k^2} - \sigma_k \frac{1}{\varepsilon_n} \frac{\partial^2 v}{\partial x_k \partial x_n} + i\tilde{\gamma}_{kn} \frac{\partial v}{\partial x_k} = 0$$

and consequently from (30) and (27) it follows that

$$(38) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x_k^2}(0, \dots, 0, x) = 0 \quad \forall k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Now from (37) we obtain that (after differentiating with respect to  $x_k$ )

$$(39) \quad \sigma_n \frac{1}{\varepsilon_k} \frac{\partial^3 v}{\partial x_k^3} - \sigma_k \frac{1}{\varepsilon_n} \frac{\partial^3 v}{\partial x_k^2 \partial x_n} + i\tilde{\gamma}_{kn} \frac{\partial^2 v}{\partial x_k^2} = 0.$$

Then (38) and (33) imply that

$$(40) \quad \frac{\partial^3 v}{\partial x_k^3}(0, \dots, 0, x) = 0 \quad \forall k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Analogously by induction we obtain that

$$(41) \quad \frac{\partial^{r_k} v}{\partial x_k^{r_k}}(0, \dots, 0, x) = 0 \quad \forall k = 1, 2, \dots, n-1, \quad \forall r_k = 1, 2, \dots$$

From (35) (after differentiating with respect to  $x_2$ ) we have

$$(42) \quad \sigma_n \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\partial^3 v}{\partial x_2^2 \partial x_1} - \sigma_1 \frac{1}{\varepsilon_n} \frac{\partial^3 v}{\partial x_2^2 \partial x_n} + i\tilde{\gamma}_{1n} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} = 0$$



and consequently using (38) and (30) it follows that

$$(43) \quad \frac{\partial^3 v}{\partial x_2^2 \partial x_1} (0, \dots, 0, x) = 0.$$

Analogously we obtain that

$$(44) \quad \sigma_n \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\partial^{r_2+1} v}{\partial x_2^{r_2} \partial x_1} - \sigma_1 \frac{1}{\varepsilon_n} \frac{\partial^{r_2+1} v}{\partial x_2^{r_2} \partial x_n} + i\tilde{\gamma}_{1n} \frac{\partial^{r_2} v}{\partial x_2^{r_2}} = 0$$

and then

$$(45) \quad \frac{\partial^{r_2+1} v}{\partial x_2^{r_2} \partial x_1} (0, \dots, 0, x) = 0, \quad \forall r_2 = 1, 2, \dots$$

Next, after differentiating of (44) with respect to  $x_n$  it follows that

$$(46) \quad \sigma_n \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\partial^{r_2+2} v}{\partial x_n \partial x_2^{r_2} \partial x_1} - \sigma_1 \frac{1}{\varepsilon_n} \frac{\partial^{r_2+1} v}{\partial x_2^{r_2} \partial x_n^2} + i\tilde{\gamma}_{1n} \frac{\partial^{r_2} v}{\partial x_n \partial x_2^{r_2}} = 0$$

and then

$$(47) \quad \frac{\partial^{r_2+2} v}{\partial x_n \partial x_2^{r_2} \partial x_1} (0, \dots, 0, x) = 0, \quad \forall r_2 = 1, 2, \dots$$

The equality (47) follows from (33).

Analogously from (44) (after differentiating with respect to  $x_n$  and induction) we have

$$(48) \quad \sigma_n \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\partial^{r_2+r_n+1} v}{\partial x_n^{r_n} \partial x_2^{r_2} \partial x_1} - \sigma_1 \frac{1}{\varepsilon_n} \frac{\partial^{r_2+r_n+1} v}{\partial x_2^{r_2} \partial x_n^{r_n+1}} + i\tilde{\gamma}_{1n} \frac{\partial^{r_2+r_n} v}{\partial x_n^{r_n} \partial x_2^{r_2}} = 0$$

and hence

$$(49) \quad \frac{\partial^{r_2+r_n+1} v}{\partial x_n^{r_n} \partial x_2^{r_2} \partial x_1} (0, \dots, 0, x) = 0, \quad \forall r_2, r_n = 1, 2, \dots$$

After differentiating of (48) with respect to  $x_1$  and using (49) we obtain that

$$(50) \quad \sigma_n \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\partial^{r_2+r_n+2\nu}}{\partial x_n^{r_n} \partial x_2^{r_2} \partial x_1^2} - \sigma_1 \frac{1}{\varepsilon_n} \frac{\partial^{r_2+r_2+2\nu}}{\partial x_2^{r_2} \partial x_n^{r_n+1} \partial x_1} + \\ + i\tilde{\gamma}1n \frac{\partial^{r_2+r_n+1\nu}}{\partial x_n^{r_n} \partial x_2^{r_2} \partial x_1} = 0,$$

and hence

$$(51) \quad \frac{\partial^{r_2+r_n+2\nu}}{\partial x_n^{r_n} \partial x_2^{r_2} \partial x_1^2} (0, \dots, 0, x) = 0, \quad \forall r_2, r_n = 1, 2, \dots$$

Analogously from (50) and (51) we obtain that

$$(52) \quad \sigma_n \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\partial^{r_1+r_2+r_n\nu}}{\partial x_n^{r_n} \partial x_2^{r_2} \partial x_1} - \sigma_1 \frac{1}{\varepsilon_n} \frac{\partial^{r_n+r_2+r_2+\nu}}{\partial x_2^{r_2} \partial x_n^{r_n+1}} + \\ + i\tilde{\gamma}1n \frac{\partial^{r_2+r_n\nu}}{\partial x_n^{r_n} \partial x_2^{r_2} \partial x_1^{r_1-1}} = 0$$

and

$$(53) \quad \frac{\partial^{r_1+r_2+r_n+\nu}}{\partial x_1^{r_1} \partial x_2^{r_2} \partial x_n^{r_n}} (0, \dots, 0, x) = 0, \quad \forall r_1, r_2, r_n = 1, 2, \dots$$

Analogously to the equality (53) it can be obtained that

$$(54) \quad \frac{\partial^{r_k+r_j+r_n\nu}}{\partial x_k^{r_k} \partial x_j^{r_j} \partial x_n^{r_n}} (0, \dots, 0, x) = 0,$$

$\forall k \neq j, k, j = 1, 2, \dots, n-1, \forall r_k, r_j, r_n = 1, 2, \dots$  Now from the equality (48) (using differentiating with respect to  $x_3$ ) it follows that

$$(55) \quad \sigma_n \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\partial^{r_2+r_n+2\nu}}{\partial x_3 \partial x_n^{r_n} \partial x_2^{r_2} \partial x_1} - \sigma_1 \frac{1}{\varepsilon_n} \frac{\partial^{r_2+r_n+2\nu}}{\partial x_3 \partial x_2^{r_2} \partial x_n^{r_n+1}} + \\ + i\tilde{\gamma}1n \frac{\partial^{r_2+r_n\nu}}{\partial x_3 \partial x_n^{r_n} \partial x_2^{r_2}} = 0$$

and then using (54) we obtain that

$$(56) \quad \frac{\partial^{r_2+r_n+2\nu}}{\partial x_3 \partial x_n^{r_n} \partial x_2^{r_2} \partial x_1} (0, \dots, 0, x) = 0.$$

Then analogously to obtaining (55) it follows that

$$(57) \quad \sigma_n \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\partial^{r_3+r_2+r_n+1} v}{\partial x_3^{r_3} \partial x_n^{r_n} \partial x_2^{r_2} \partial x_1} - \sigma_1 \frac{1}{\varepsilon_n} \frac{\partial^{r_3+r_2+r_n+1} v}{\partial x_3^{r_3} \partial x_2^{r_2} \partial x_n^{r_n+1}} + \\ + i\tilde{\gamma}_{1n} \frac{\partial^{r_3+r_2+r_n} v}{\partial x_3^{r_3} \partial x_n^{r_n} \partial x_2^2} = 0$$

and

$$(58) \quad \frac{\partial^{r_2+r_3+r_n+1} v}{\partial x_3^{r_3} \partial x_n^{r_n} \partial x_2^2 \partial x_1} (0, \dots, 0, x) = 0.$$

Then from (57) we obtain that

$$(59) \quad \frac{\partial^{r_1+r_2+r_3+r_n} v}{\partial x_1^{r_1} \partial x_2^{r_2} \partial x_3^{r_3} \partial x_n^{r_n}} (0, \dots, 0, x) = 0$$

$\forall r_1, r_2, r_3, r_n = 1, 2, \dots$  Analogously and consecutively we obtain that

$$(60) \quad \frac{\partial^{r_1+r_2+\dots+r_n} v}{\partial x_1^{r_1} \partial x_2^{r_2} \dots \partial x_n^{r_n}} (0, \dots, 0, x) = 0$$

$\forall r_1, r_2, \dots, r_n = 1, 2, \dots$

But  $v(x_1, \dots, x_n)$  is a solution of (22) which is a restriction on  $\mathbb{R}^n$  of an entire function on  $\mathbb{C}^n$ . Then the entire function  $v(z_1, \dots, z_n)$  has the representation

$$(61) \quad v(z_1, \dots, z_n) = \sum_{r_1 \geq 0, \dots, r_n \geq 0} \frac{1}{r_1! r_2! \dots r_n!} \frac{\partial^{r_1+r_2+\dots+r_n} v}{\partial z_1^{r_1} \partial z_2^{r_2} \dots \partial z_n^{r_n}} (0, \dots, 0, x) \cdot \\ \cdot z_1^{k_1} \dots z_{n-1}^{r_{n-1}} (z_n - x)^{r_n}.$$

The equality (61) together with (60) implies that

$$v(z_1, \dots, z_n) = 0, \quad \forall (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$$

and consequently

$$(62) \quad v(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Now if  $v_1(x_1, \dots, x_n)$  and  $v_2(x_1, \dots, x_n)$  are different solutions of the partial differential equations

$$(63) \quad \begin{aligned} \sigma_n \frac{1}{\varepsilon_k} \frac{\partial v}{\partial x_k} - \sigma_k \frac{1}{\varepsilon_n} \frac{\partial v}{\partial x_n} + i\tilde{\gamma}_{kn}v &= 0, \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \\ v(0, \dots, 0, x) &= g(x) \end{aligned}$$

i.e.  $v_1(x_1, \dots, x_n)$  and  $v_2(x_1, \dots, x_n)$  satisfy the conditions

$$v_1(0, \dots, 0, x) = g(x), \quad v_2(0, \dots, 0, x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

then the relation (62) implies that

$$v_1(x_1, \dots, x_n) = v_2(x_1, \dots, x_n).$$

Hence if the system (63) has the solution, this solution is unique.

Now we will prove 2). Let  $\{v_l(x_1, \dots, x_n)\}$  be a sequence of solutions of (22) satisfying the conditions in 2). Using the assumption (23) it follows that for all  $\varepsilon > 0$  there exists  $N$  such that for all  $l, s > N$  the next inequality holds

$$(64) \quad \left\| \frac{\partial^k v_l}{\partial x_n^k}(0, \dots, 0) - \frac{\partial^k v_s}{\partial x_n^k}(0, \dots, 0) \right\| < \varepsilon |\varepsilon_n| C^k$$

$\forall k = 1, 2, \dots$

After differentiation of the equality (22)  $r$  times with respect to  $x_n$  we obtain that

$$(65) \quad \sigma_n \frac{1}{\varepsilon_k} \frac{\partial^{r+1} v_l}{\partial x_n^r \partial x_k} - \sigma_k \frac{1}{\varepsilon_n} \frac{\partial^{r+1} v_l}{\partial x_n^{r+1}} + i\tilde{\gamma}_{kn} \frac{\partial^r v_l}{\partial x_n^r} = 0,$$

$(\forall l = 1, 2, \dots, \forall k = 1, 2, \dots, n-1)$ . Then from (65) it follows that

$$(66) \quad \begin{aligned} & \sigma_n \frac{1}{\varepsilon_k} \frac{\partial^{r_n+1} v_l}{\partial x_n^{r_n} \partial x_k} - \sigma_n \frac{1}{\varepsilon_k} \frac{\partial^{r_n+1} v_s}{\partial x_n^{r_n} \partial x_k} = \\ & = \sigma_k \frac{1}{\varepsilon_n} \frac{\partial^{r_n+1} v_l}{\partial x_n^{r_n+1}} - \sigma_k \frac{1}{\varepsilon_n} \frac{\partial^{r_n+1} v_s}{\partial x_n^{r_n+1}} - i\tilde{\gamma}_{kn} \left( \frac{\partial^{r_n} v_l}{\partial x_n^{r_n}} - \frac{\partial^{r_n} v_s}{\partial x_n^{r_n}} \right) = 0 \end{aligned}$$

( $\forall k = 1, 2, \dots, n-1$ ). But from (64) and (66) we have

$$\begin{aligned}
 & \left\| \frac{1}{\varepsilon_k} \frac{\partial^{r_n+1} v_l}{\partial x_n^{r_n} \partial x_k} (0, \dots, 0) - \frac{1}{\varepsilon_k} \frac{\partial^{r_n+1} v_s}{\partial x_n^{r_n} \partial x_k} (0, \dots, 0) \right\| = \\
 & = \left\| \sigma_n^{-1} \sigma_k \frac{1}{\varepsilon_n} \left( \frac{\partial^{r_n+1} v_l}{\partial x_n^{r_n+1}} (0, \dots, 0) - \frac{\partial^{r_n+1} v_s}{\partial x_n^{r_n+1}} (0, \dots, 0) \right) - \right. \\
 & \quad \left. - i \sigma_n^{-1} \tilde{\gamma}_{kn} \left( \frac{\partial^{r_n} v_l}{\partial x_n^{r_n}} (0, \dots, 0) - \frac{\partial^{r_n} v_s}{\partial x_n^{r_n}} (0, \dots, 0) \right) \right\| < \\
 & < \left\| \sigma_n^{-1} \sigma_k \right\| \frac{\varepsilon}{|\varepsilon_n|} C^{r_n+1} + \left\| \sigma_n^{-1} \tilde{\gamma}_{kn} \right\| \varepsilon C^{r_n} = \\
 & = \varepsilon \left( \left\| \sigma_n^{-1} \sigma_k \right\| \frac{C}{|\varepsilon_n|} + \left\| \sigma_n^{-1} \tilde{\gamma}_{kn} \right\| \right) C^{r_n},
 \end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned}
 (67) \quad & \left\| \frac{\partial^{r_n+1} v_l}{\partial x_n^{r_n} \partial x_k} (0, \dots, 0) - \frac{\partial^{r_n+1} v_s}{\partial x_n^{r_n} \partial x_k} (0, \dots, 0) \right\| < \\
 & < \varepsilon |\varepsilon_k| \left( \left\| \sigma_n^{-1} \sigma_k \right\| \frac{C}{|\varepsilon_n|} + \left\| \sigma_n^{-1} \tilde{\gamma}_{kn} \right\| \right) C^{r_n} = \varepsilon C_k C^{r_n},
 \end{aligned}$$

( $\forall k = 1, 2, \dots, n-1, \forall r_n = 1, 2, \dots$ ), where we have denoted

$$(68) \quad C_k = |\varepsilon_k| \left( \left\| \sigma_n^{-1} \sigma_k \right\| \frac{C}{|\varepsilon_n|} + \left\| \sigma_n^{-1} \tilde{\gamma}_{kn} \right\| \right)$$

We apply consecutively similar considerations and it can be obtained that

$$\begin{aligned}
 (69) \quad & \left\| \frac{\partial^{r_1+r_2+\dots+r_n} v_l}{\partial x_1^{r_1} \partial x_2^{r_2} \dots \partial x_n^{r_n}} (0, \dots, 0) - \frac{\partial^{r_1+r_2+\dots+r_n} v_s}{\partial x_1^{r_1} \partial x_2^{r_2} \dots \partial x_n^{r_n}} (0, \dots, 0) \right\| < \\
 & < \varepsilon C_1^{r_1} C_2^{r_2} \dots C_{n-1}^{r_{n-1}} C^{r_n}
 \end{aligned}$$

( $\forall k = 1, 2, \dots, n-1, \forall r_n = 1, 2, \dots$ ), where  $C_k$  has the form (68).

But  $v_l(z_1, \dots, z_n)$  is entire function and then for all  $l, s > N$  we have (70)

$$\begin{aligned} & \|v_l(z_1, \dots, z_n) - v_s(z_1, \dots, z_n)\| = \\ = & \left\| \sum_{k_1, k_2, \dots, k_n} \frac{1}{k_1! k_2! \dots k_n!} \frac{\partial^{k_1+k_2+\dots+k_n} v_l}{\partial z_1^{k_1} \partial z_2^{k_2} \dots \partial z_n^{k_n}}(0, \dots, 0, 0) z_1^{k_1} \dots z_{n-1}^{k_{n-1}} z_n^{k_n} - \right. \\ & \left. - \sum_{k_1, k_2, \dots, k_n} \frac{1}{k_1! k_2! \dots k_n!} \frac{\partial^{k_1+k_2+\dots+k_n} v_s}{\partial z_1^{k_1} \partial z_2^{k_2} \dots \partial z_n^{k_n}}(0, \dots, 0, 0) z_1^{k_1} \dots z_{n-1}^{k_{n-1}} z_n^{k_n} \right\| \leq \\ \leq & \sum_{k_1, k_2, \dots, k_n} \frac{1}{k_1! k_2! \dots k_n!} \varepsilon C_1^{r_1} C_2^{r_2} \dots C_{n-1}^{r_{n-1}} C_n^{r_n} |z_1|^{k_1} |z_2|^{k_2} \dots |z_n|^{k_n} = \\ = & \varepsilon e^{C_1|z_1|+C_2|z_2|+\dots+C_{n-1}|z_{n-1}|+C|z_n|}. \end{aligned}$$

Consequently  $\{v_l(z_1, \dots, z_n)\}$  is uniformly convergent sequence on the compact sets in  $\mathbb{C}^n$ . The theorem is proved.  $\square$

If the matrices  $\sigma_1, \dots, \sigma_n, \{\gamma_{kn}\}$  are selfadjoint  $m \times m$  matrices, satisfying the conditions of V.A. Zolotarev (7),  $\{\gamma_{ks}\}$  ( $k, s = 1, 2, \dots, n-1$ ) are defined by the equality (8), and the matrices  $\{\tilde{\gamma}_{ks}\}$  ( $k, s = 1, 2, \dots, n$ ) are defined by (4), the Theorem 1 implies that the solution  $v(x_1, \dots, x_n)$  of the system (22) satisfies the system (10).

In the case when the selfadjoint operators  $\{\sigma_k\}_1^n$  and  $\{\gamma_{ks}\}$  satisfy the conditions (7) and the operators  $\{\tilde{\gamma}_{ks}\}$  are defined by (4), then the system

$$\begin{cases} \sigma_k \left( -i \frac{1}{\varepsilon_s} \frac{\partial v}{\partial x_s} \right) - \sigma_s \left( -i \frac{1}{\varepsilon_k} \frac{\partial v}{\partial x_k} \right) + \tilde{\gamma}_{sk} v = 0 \\ v(0, \dots, 0, x) = g(x), \quad x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

( $k, s = 1, 2, \dots, n$ ) (i.e. (10)) has a unique solution satisfying the condition  $v(0, \dots, 0, x) = g(x)$ , which is a restriction to  $\mathbb{R}^n$  of an entire function on  $\mathbb{C}^n$ .

**REFERENCES:**

[1] G. S. Borisova, A new form of the triangular model of M.S. Livšic for a class of nondissipative operators, *Comptes Rendus de l'Académie bulgare des Sciences*, Tome **53**, No10, (2000), 9-12.

- 
- 
- [2] G. S. Borisova, The operators  $A_\gamma = \gamma A + \bar{\gamma} A^*$  for a class of nondissipative operators  $A$  with a limit of the corresponding correlation function, *Serdica Math. J.*, **29**, 2003, 109-140.
- [3] G. S. Borisova, Commuting nonselfadjoint operators, open systems, and wave equations, *Comptes Rendus de l'Académie bulgare des Sciences*, submitted.
- [4] G. S. Borisova, K.P. Kirchev, Solitonic combinations and commuting nonselfadjoint operators, *Journal of mathematical analysis and applications*, **424** (2015), 21-48.
- [5] K. P. Kirchev, G. S. Borisova, Commuting nonselfadjoint operators and their characteristic operator-functions, *Serdica Math. J.*, **23**, 1997, 313-334.
- [6] K. P. Kirchev, G. S. Borisova, Nondissipative curves in Hilbert space-shaving a limit of the corresponding correlation function, *Integral Equation Operator Theory*, **40**, 2001, 309-341.
- [7] K. P. Kirchev, G. S. Borisova, Triangular models and asymptotics of continuous curves with bounded and unbounded semigroup generators, *Serdica Math. J.*, **31**, 2005, 95-174.
- [8] M. S. Livšić, Commuting nonselfadjoint operators and mapping of vector bundles on algebraic curves, *Oper. Theory: Adv. Appl.* 19, 1986, 255-277 (proceedings Workshop Amsterdam, June Y-7, 1985, Birkhauser).
- [9] M. S. Livšić, Commuting nonselfadjoint operators in Hilbert space, *Lecture Notes in Math.* 1272, Springer-Verlag, 1987, 1-39.
- [10] M. S. Livšić, What is a particle from the standpoint of system theory, *Integral Equations and Operator Theory*, vol. **14**, 1991, 552-563.
- [11] M. S. Livšić, N. Kravitsky, A.S. Markus, V. Vinnikov, Theory of commuting nonselfadjoint operators, Kluwer Academic Publisher Group, Dordrecht: Springer 1995.
- [12] M. S. Livšić, Y. Avishai, A Study of Solitonic Combinations Based on the Theory of Commuting Non-Self-Adjoint Operators, *Linear Algebra and its Applications*, 122/123/124: 357-414, 1989.

- [13] S. Mysohata, Theory of Partial Differential Equations, Moscow, 1977 (in Russian).
- [14] V. A. Zolotarev, Time cones and a functional model on a Riemann surface, *Math. USSR-Sb.* **181** (1990), 965-995 (English translation of *Math. sb.* 70 (1991), 399-429).

**Galina S. Borisova**

Faculty of Mathematics and Informatics

Konstantin Preslavsky University of Shumen, 9712 Shumen, Bulgaria

e-mail: g.borisova@shu.bg

**Miroslav K. Hristov**

Faculty of Mathematics and Informatics

Konstantin Preslavsky University of Shumen, 9712 Shumen, Bulgaria

e-mail: miroslav.hristov@shu.bg

**Tzonio G. Tzonev**

Faculty of Mathematics and Informatics

Konstantin Preslavsky University of Shumen, 9712 Shumen, Bulgaria

e-mail: tz.tzonev@shu.bg



## OVERVIEW OF CRYPTOGRAPHIC ALGORITHMS FOR VIDEO FILES\*

**GEORGI G. DIMITROV, KRASIMIR M. KORDOV**

**ABSTRACT:** *Proving the efficiency, reliability and security of every cryptographic algorithm requires extensive cryptographic analysis. In this paper we overview the most used indicators concerning encryption of video files. In order to perform successful video encryption and cryptographic analysis it is important to analyze the video structure for further processing.*

**KEYWORDS:** *Cryptographic analysis, Cryptographic algorithms, Cryptography, Video files, Video cryptography*

**2010 Math. Subject Classification:** 94A60, 68P25, 68U10, 62B10

### 1 Introduction

In general, cryptography is an ancient science for secret communication with transforming messages into unreadable kind, impossible to read from third parties. Cryptographic analysis has the opposite purpose, to uncover secret messages, restoring their initial look.

In the first signs of cryptography the messages were only text symbols transformed into different symbols, but later complex of mathematical algorithms for message transformations appeared for more successful encryption. In modern cryptography the information is mostly digital, stored and transferred with computer system which inflicts/calls for different approaches. Encrypting digital data requires processing the information as a sequence of digits.

Applying a cryptographic algorithm to a specific type of file is one the most used approaches to prove the properties and the quality

---

\*This paper is (partially) supported by Scientific Research Grant RD-08-71/29.01.2019 of Konstantin Preslavski University of Shumen

of the encryption process. Digital video files are widely used for data information carriers in modern days, which also makes them usable in encryption algorithms.

Processing video files for their encryption and decryption is related to the structure of the video files type. The standard digital video files contain header information (that includes meta data about the file such as file size, video compression, number of frames, etc.), array of frames containing static images building the video file. Encryption process is focused on transforming the frames, leaving no information of the original look of the (visual) information.

The other sections of this paper describe the most used cryptographic analysis tests concerning digital video files.

## **2 Visual Analysis**

The visual analysis compares frames from plain video files with their corresponding encrypted files. The goal of this test is to see with naked eye if there is any similarity between the compared frames. The good cryptographic algorithms successfully transform the encrypted frames without any trace of color values of the original pixels from the plain files. This can be achieved by replacing the color value or/and changing pixels positions. The replacement process is called substitution and the position changing process is called permutation. Those processes are often realized by using pseudo-random generators (PRG) [14, 15, 16] for chaotic pixel value and position changing. PRGs [10, 12, 17] provide endless bit stream used for extracting random numbers for color and/or position values.

Video encryption algorithms are implemented to work with video files with gray scale color (8 bit color) or color videos with RGB color scheme (8 bits for Red color, 8 bits for Green color and 8 bits for Blue color).

Figure 1 represents the results of encryption algorithms for gray scale video files from Ref. [18] and color video file from Ref. [7].

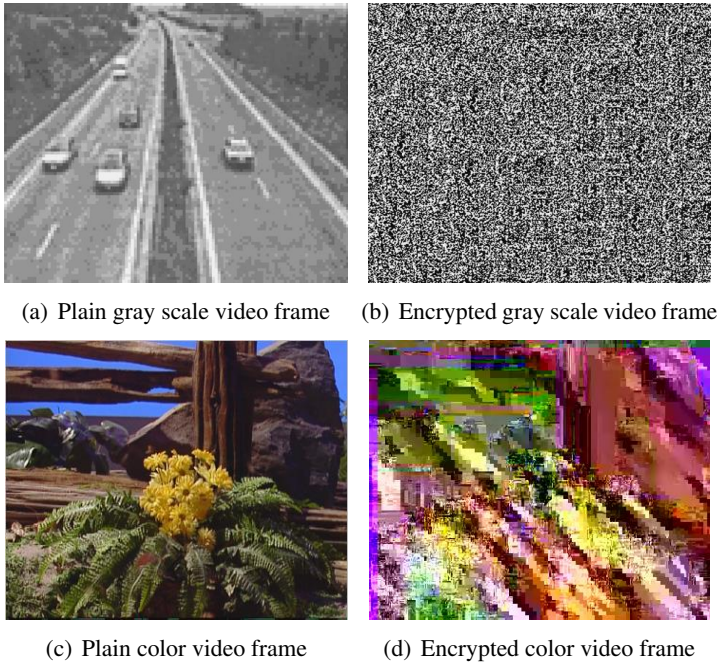


Figure 1: Visual Analysis - comparison of video frames

### 3 Key-space Analysis

One of the most important elements of every cryptographic system is the secret key. Usually the secret key is composed by the initial variables of the cryptographic system and the variety of the possible initial values builds the key-space. According to the IEEE floating point standards the key-space should be greater than  $2^{100}$  to be considered large enough to withstand against brute-force attacks. Usually the cryptographic systems are based on PRGs and the key space is entirely composed by the initial values of the used pseudo-random generator.

Table 1 gives examples of obtained key-spaces in cryptographic systems.

| Reference | Key-space | Reference | Key-space |
|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Ref. [13] | $2^{126}$ | Ref. [11] | $2^{149}$ |
| Ref. [5]  | $2^{172}$ | Ref. [2]  | $2^{179}$ |
| Ref. [3]  | $2^{199}$ | Ref. [4]  | $2^{199}$ |

Table 1: Key-space Analysis

#### 4 Histogram Analysis

The histogram analysis compares the frames (processed as images) of plain video files with their corresponding encrypted frames. Image histograms represent the tonal distribution of the colors in the images.

Figure 2 is an example of histogram analysis of a color image. Figure 2(a) represent red color distribution and Figure 2(b) - red color distribution after the encryption. Figures 2(c), 2(d), 2(e) and 2(f) show the corresponding Green and Blue channels.

Other examples of histogram analysis are proposed in [6, 8, 9]

#### 5 Correlation Analysis

The correlation analysis is a statistical test assessing the values' dependence. This test can be applied to video encryption algorithms with the adjacent pair of pixel values of the encrypted frames. The correlation analysis is performed by calculating the correlation coefficient values which are always in range  $[-1, 1]$  and if the values are between  $|1, 0.7|$  it is considered that we have strong dependence between the initial values, if the correlation coefficient is between  $|0.7, 0.3|$  we have medium dependence between the measured values, and if the correlation coefficient is between  $|0.3, 0|$  we have weak dependence of the initial values. When the correlation coefficient is very close to zero it

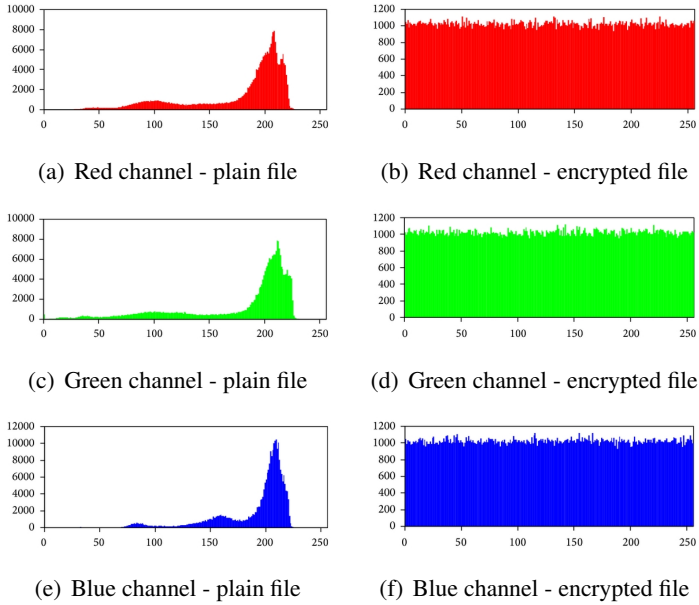


Figure 2: Histogram Analysis - comparison of Red, Green and Blue channels of a plain and encrypted image

is considered as absence of dependence between the measured values, which is indication of strong encryption.

Correlation coefficient can be calculated as follows:

$$(1) \quad r_{xy} = \frac{cov(x,y)}{\sqrt{D(x)}\sqrt{D(y)}},$$

where

$$D(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2,$$

$$D(y) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2,$$

$$cov(x, y) = \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}),$$

$N$  is the number of pixels processed from a frame (plain or encrypted),  $x_i$  and  $y_i$  are the values of corresponding pixel colors of both files,  $\bar{x}$  and  $\bar{y}$  are mean values of pixel colors for each frame, and  $cov(x, y)$  is covariance between both files.

| Reference | Direction  | Plain  | Encrypted |
|-----------|------------|--------|-----------|
| Ref. [18] | Horizontal | 0.9671 | 0.00251   |
|           | Vertical   | 0.9655 | 0.00237   |
|           | Diagonal   | 0.9683 | 0.00198   |
| Ref.[19]  | Vertical   | 0.9655 | 0.00237   |
|           | Diagonal   | 0.9683 | 0.00198   |
| Ref. [1]  | Horizontal | 0.9452 | -0.0112   |
|           | Vertical   | 0.9471 | -0.0813   |
|           | Diagonal   | 0.9127 | 0.0009    |

Table 2: File size comparison

Table 2 demonstrates that the values of the adjacent pixel colors have strong dependence before the encryption and have no dependence after the encryption (close to zero) which is indication of good cryptographic properties.

## 6 Information Entropy

In general, the entropy is statistically calculated value that measures the uncertainty in information theory. Concerning video frames, information entropy measures the probability of certain pixel value appearance. Entropy is calculated as follows:

$$(2) \quad H(X) = - \sum_{i=0}^N p(x_i) \log_2 p(x_i),$$

where  $X$  is a variable,  $p(x_i)$  is function of the probability of  $x$  to have certain value -  $x_i$ . Colors values of every pixel of the frame can be from 0 to 255 for every color of RGB scheme. For truly chaotic system the best value of entropy is  $H(X) = 8$ .

| Reference | Entropy of plain file | Entropy of encrypted file |
|-----------|-----------------------|---------------------------|
| Ref. [19] | 6.234655              | 7.997266                  |
| Ref. [9]  | 7.4318                | 7.9968                    |
| Ref. [1]  | -                     | 7.941                     |

Table 3: Information Entropy Analysis

Table 3 shows the encrypted files have Information Entropy value very close to 8, which is indicator of chaotic information behavior.

## 7 Number of Pixel Change Rate (NPCR) and Uniform Average Change Intensity (UACI)

As a part of differential analysis Numbers of Pixel Change Rate (NPCR) and Uniform Average Change Intensity (UACI) are indicators that measure the difference between compared frames from plain video file and the corresponding frames from encrypted video file. NPCR and UACI are calculated as follows:

$$(3) \quad NPCR = \frac{\sum_{i=0}^{W-1} \sum_{j=0}^{H-1} D(i, j)}{W \times H} \times 100\%,$$

$$(4) \quad UACI = \frac{1}{W \times H} \left( \sum_{i=0}^{W-1} \sum_{j=0}^{H-1} \frac{|C_1(i, j) - C_2(i, j)|}{N} \right) \times 100\%,$$

where  $W$  and  $H$  are width and height of the frames.

| Reference | NPCR      | UACI      |
|-----------|-----------|-----------|
| Ref. [8]  | 99.5850 % | 28.6210 % |
| Ref. [9]  | 99.6149 % | 13.8349 % |

Table 4: NPCR and UACI

Table 4 represents some of the obtained results of cryptographic algorithms. The difference of the plain and the encrypted file is almost 100%.

## 8 Conclusion

Cryptographic algorithms are designed for information security. Part of developing a new encryption models is proving they are reliable enough. This can be achieved by applying the algorithm to the specific file types for further cryptographic analysis. One of the used file types are digital video files.

In this paper we overview the base cryptographic properties for evaluation of the video encryption schemes such as visual analysis, key-space, histogram analysis, correlation analysis, information entropy, Numbers of Pixel Change Rate and Uniform Average Change Intensity.

### REFERENCES:

- [1] Deshmukh, P., Kolhe, V. (2014, February). Modified AES based algorithm for MPEG video encryption. In: International Conference on Information Communication and Embedded Systems (ICICES2014) (pp. 1-5). IEEE.
- [2] Kordov, K. (2015). Modified pseudo-random bit generation scheme based on two circle maps and XOR function. *Applied Mathematical Sciences*, **9**(3), 129-135.
- [3] Kordov, K. M. (2014, November). Modified Chebyshev map based pseudo-random bit generator. *AIP Conference Proceedings* (Vol. **1629**, No. 1, pp. 432-436). AIP.



- [4] Kordov, K. (2015). Signature Attractor Based Pseudorandom Generation Algorithm. *Advanced Studies in Theoretical Physics*, **9**(6), 287-293.
- [5] Kordov, K., Stoyanov, B. (2017). Least Significant Bit Steganography using Hitzl-Zele Chaotic Map. *International Journal of Electronics and Telecommunications*, **63**(4), 417-422.
- [6] Kordov, K., Valchev, G. (2019). Video steganography with steganalysis. *Mathematical and Software Engineering*, **5**(1), 15-22.
- [7] Lian, S., Liu, Z., Ren, Z., Wang, Z. (2005, November). Selective video encryption based on advanced video coding. In: Pacific-Rim Conference on Multimedia (pp. 281-290). Springer, Berlin, Heidelberg.
- [8] Loukhaoukha, K., Chouinard, J. Y., Berdai, A. (2012). A secure image encryption algorithm based on Rubik's cube principle. *Journal of Electrical and Computer Engineering*, 2012, **7**.
- [9] Sathishkumar, G. A., Bagan, K. B. (2011). A novel image encryption algorithm using pixel shuffling and base 64 encoding based chaotic block cipher (IMPSBEC). *WSEAS Transactions on computers*, **10**(6), 169-178.
- [10] Stoyanov, B. P. (2012, October). Chaotic cryptographic scheme and its randomness evaluation. *AIP Conference Proceedings* (Vol. **1487**, No. 1, pp. 397-404). AIP.
- [11] Stoyanov, B. P. (2014, November). Using circle map in pseudorandom bit generation. *AIP Conference Proceedings* (Vol. **1629**, No. 1, pp. 460-463). AIP.
- [12] Stoyanov, B. (2008). Improved cryptoanalysis of the self-shrinking p-adic cryptographic generator. *Advanced Studies in Software and Knowledge Engineering*, 112.
- [13] Stoyanov, B., Szczypiorski, K., Kordov, K. (2017). Yet another pseudorandom number generator. *International Journal of Electronics and Telecommunications*, **63**(2), 195-199.
- [14] Stoyanov, B., Kordov, K. (2014). Novel zaslavsky map based pseudorandom bit generation scheme. *Applied Mathematical Sciences*, **8**(178), 8883-8887.

- [15] Stoyanov, B., Kordov, K. (2013, June). Pseudorandom bit generator with parallel implementation. In: International Conference on Large-Scale Scientific Computing (pp. 557-564). Springer, Berlin, Heidelberg.
- [16] Stoyanov, B. P., Kordov, K. M. (2013, October). Cryptanalysis of a modified encryption scheme based on bent Boolean function and Feedback with Carry Shift Register. *AIP Conference Proceedings* (Vol. **1561**, No. 1, pp. 373-377). AIP.
- [17] Stoyanov, B., Kolev, M., Nachev, A. (2012). Design of a new self-shrinking 2-adic cryptographic system with application to image encryption. *European Journal of Scientific Research*, **78**(3), 362-374.
- [18] Yang, S., Sun, S. (2008). A video encryption method based on chaotic maps in DCT domain. *Progress in natural science*, **18**(10), 1299-1304
- [19] Yang, T., Li, Y., Lai, C., Dong, J., Xia, M. (2018). The improved hill encryption algorithm towards the unmanned surface vessel video monitoring system based on Internet of Things technology. *Wireless Communications and Mobile Computing*, 2018.

**Georgi Dimitrov**

Department of Computer Informatics,  
Faculty of Mathematics and Informatics,  
Konstantin Preslavski University of Shumen, 9712 Shumen, Bulgaria  
g.dimitrov@shu.bg

**Krasimir Kordov**

Department of Computer Informatics,  
Faculty of Mathematics and Informatics,  
Konstantin Preslavski University of Shumen, 9712 Shumen, Bulgaria  
krasimir.kordov@shu.bg

## TEXT STEGANOGRAPHY METHODS\*

TEODORA T. STOYANOVA, STANIMIR K. ZHELEZOV

**ABSTRACT:** Nowadays, the information protection is a highly topical issue in a number of areas. Steganography is a scientific field of application, a set of technical skills and the art of the ways to hide the fact of transmitting (availability) of information. The most common steganographic methods are reviewed and classified. The principles of the textual steganography are reviewed. A classification of the methods of textual steganography is made.

**KEYWORDS:** Steganography; Text steganography; Stego methods; Information hiding; Information security.

**2010 Math. Subject Classification:** 94A99, 68P20, 68P2530

## МЕТОДИ НА ТЕКСТОВАТА СТЕГАНОГРАФИЯ†

ТЕОДОРА Т. СТОЯНОВА, СТАНИМИР К. ЖЕЛЕЗОВ

### 1 Компютърна стеганография

В наше време защитата на информацията е много актуална в редица области. Защитата в Интернет е от голямо значение и за бизнеса, и за държавата. Банкови карти, разплащателни сметки, интернет банкиране, пазаруване от всяка точка на света от различни мобилни устройства – всичко това създава опасност от

---

\* This paper is (partially) supported by Scientific Research Grant № RD-08-96/01.02.2019 of Konstantin Preslavsky University of Shumen

† Статията е частично финансирана по проект № РД- 08-96/01.02.2019 “Защита и надеждност на данни във виртуални и web среди, графични файлове, 3D моделиране на терени” на ШУ

злоупотреби. Широко разпространение напоследък получи използването на стеганографски методи за скриване и предаване на конфиденциална информация. Скриването на факта за предаване на информация е добър начин за предотвратяване на атаки [1].

Стеганография (steganography) е научно - приложна област, съвкупност от технически умения и изкуство за начините за скриване на факта на предаване (наличие) на информация [2]. От няколко години се използва и терминът стеганология (steganology), обхващащ два смислово противоположни компонента - стеганография и стеганализ. Стеганализът (steganalysis) представлява съвкупност от методи и технологии за откриване на секретни комуникации, които използват стеганографски методи [2,3].

Най-общо в състава на една стеганографска система се включват секретно съобщение, контейнер, стегоключ, стегометод и канал за предаване на данни.

Реализацията на стеганографските методи е представена на Фиг. 1. Тя се използва при всяка стеганографска комуникация, независимо от конкретно използвания метод. В началото на схемата винаги стои изпращач, който иска да скрие съобщение, така че то да остане неразбрано от всички останали с изключение на човека получател, за когото е предназначено то [2].



Фиг. 1. Реализация на стеганографските методи

## 2 Класификация на най-разпространените стеганографски методи

Главната цел в стеганографията е да се създаде надежден начин за вграждане и извличане на данни без това да предизвика подозрение. Под данни може да се разбира всякаква информация: текст, съобщение, изображение и др., като различните видове стегосистеми скриват тези данни в различни видове носещи файлови формати. Основна цел на стеганографията е да осигури конфиденциалността на вградената информация чрез скриване на нейното съществуване.

Според съвременните схващания за стеганография тя се дели на високотехнологична и класическа.

Терминът класическа стеганография се използва само за да се формулира съвкупността от огромния брой исторически развили се методи, системи, техники, приложения и др. за скриване на факта на съществуване на съобщения и комуникации, без използване на съвременни високотехнологични способности [1,4].

Могат да бъдат изброени редица нискотехнологични стеганографски техники:

- запис на съобщение върху страничните страни на колоди от карти, подредени в условен предварително уговорен ред (след това картите се предават разбъркани);

- съставяне на съобщения чрез пробиване на дупчици с игли на букви от печатен текст в определено издание (думите се отделят с дупки между буквите);

- писмо чрез възли на конци, където всяка буква се кодира чрез различна дължина в сантиметри (напр. А - 1 см, Б - 2 см и т.н.);

- надписи на обратната страна на етикети на бутилки, флакони, буркани и др.;

- текст под залепена пощенска марка;

- акростихове и други езикови игри;

- използване на "развалена пишеща" машина, в която някои букви се печатат по-високо или по-ниско от реда (вземат се

предвид реда и броя на тези букви, а също така и междините при техните появявания);

- ръчен запис на ноти в нотна тетрадка (нотите имат значения според Морзовата азбука или друг код);

- запис във вид на кардиограма или график на технологичен процес (пак Морзова азбука - върховете на графика са точки, а тези по-ниско - тирета, и др.);

- използване на симпатични мастила;

- микроточка и др.

Класическата стеганография не е подходяща във всички ситуации или по-скоро има някои недостатъци и това е причината високотехнологичните методи да са за предпочитане:

- Бавно изпълними процедури по кодиране, декодиране и транспорт на съобщението;

- Информационният носител обикновено е лесно разрушим, лесно може да бъде компрометиран и дори загубен;

- Ограничени количества материал, това включва информационни носители и материали необходими за създаването им и това на материалите необходими за скриване и разкриване на съобщения;

- Информационните носители често са обемни и не са удобни за съхраняване за дълъг период от време;

Високотехнологичната стеганография е термин, използван от някои автори за обобщаване на направленията за скриване на съобщения с използване на комуникационните и компютърни технологии, нанотехнологиите и съвременните постижения на биологията [2].

Стегометодите позволяват скриване на данни в различни контейнери: текстови документи (електронни статии, книги, писма) в графични файлове (рисулки, банери, фотографии), видеофайлове (клипове, филми, анимация), в звукови файлове (музикални произведения, реч, природни звуци), в кода на HTML-страници, в субтитрите на филми, в съобщения, предавани с помощта на SMS, MMS, чат, блогове, и др. Текстови съобщения

могат да бъдат скрити в неизползваните области на Flash-паметите, твърдите и оптичните дискове. Като се има в предвид, че всеки вид контейнер има различни формати, а за скриване на информацията могат да се използват разнообразни методи, то се вижда колко многомерни са стеганографските задачи [2,5,6].

### **3   Текстова стеганография**

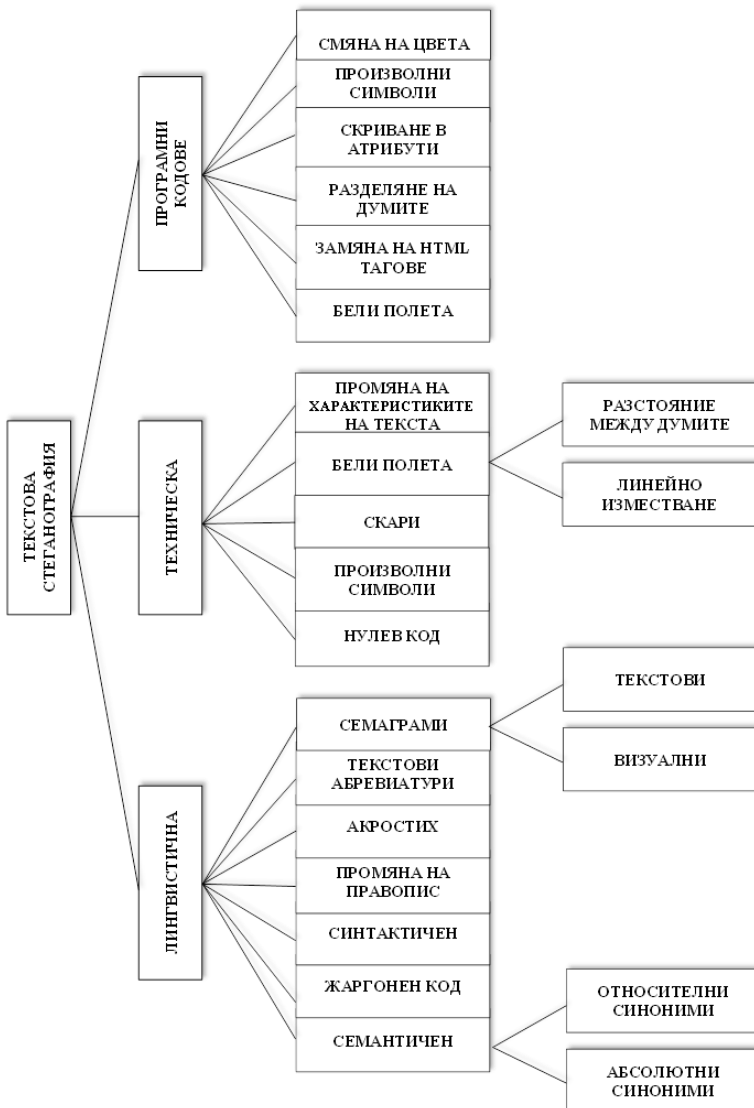
Текстовата стеганография може да включва всичко - от промяна на форматирането на съществуващия текст, до промяна на думите в текста, да генерира произволни поредици от символи и т. н. [7]. Текстовата стеганография се смята за най-трудната поради дефицита на излишна информация, която е налична в останалите мултимедийни файлове. Структурата на текстовите документи е идентична с това, което наблюдаваме, докато в други видове документи, като изображения, структурата на документа е различна от това, което наблюдаваме. Следователно, в тези документи, може да се скрие информация чрез въвеждане на промени в структурата на документа, без да се прави осезаема промяна в крайната визуализация. Текстовия файл изисква по-малко памет при съхраняване и по-бързо, както и по-лесно предаване. Това го прави предпочитан пред другите видове стеганографски методи начин за предаване на скрита информация [8].

Текстовата стеганография използва за контейнер текстови файлове. Тя има предистория от времето на пишещите машини. През осемдесетте години на XX век, за да проследи изтичането на информация от „Даунингстрийт 10” към пресата, британския министър-председател Маргарет Тачър въвежда специални текстообработващи техники, кодиращи името на оторизирания получател на документа в интервалите между думите, така че лицата, отговорни за изтичане на информация да могат да бъдат идентифицирани [1,9].

В днешно време интензивността на потоците на изцяло текстова информация в комуникационните канали за връзки в Интернет непрекъснато се увеличава. Високата интензивност на текстовия трафик дава възможност за предаване на секретни съобщения чрез директното им поставяне в съществуващите текстове, макар и с неголяма скорост, но оставяйки ги незабелязани.

На Фиг. 2 е показана класификация на видовете текстовата стеганография и нейните методи. Тя се разделя на три главни поднива – лингвистична, техническа и в програмен код.





Фиг. 2. Класификация на видовете текстова стеганография

### 3.1. Лингвистична стеганография

Лингвистичната стеганография е също дял от класическата стеганография, но при развитието на съвременните технологии, нейните стеганографски методи се реализират основно с компютърни системи и софтуерни продукти. Поради тази причина подвидовете на класическата лингвистична стеганография се запазват, като към средствата за тяхната реализация се добавят софтуерни продукти и компютърни системи.

При лингвистичната стеганография е важно да бъде съхранен съществуващия текст по смисъл и съдържание. По този начин всеки „безобиден“ текст, който не привлича внимание с външния си вид - формат, шрифт, правопис, морфология, синтаксис и лексика, може да бъде носител на скрита информация. Всички тези черти трябва да се отнасят единствено и само към темата на текста (независимо от това как е представен и на какъв носител се пренася).



Фиг. 3. Структура на лингвистичната стеганография

- **Семантичен метод**

Този метод използва синоним на думата за скриване на данни, но понякога това може да промени действителното значение на текстовия файл [10]. Определят се два синонима, които отговарят за значението на скрития бит. Примерно, съюзът „но“ може да бъде използван за носител на 0 бита, а словосъчетанието „би могло“, като носител на 1 бит.

За използване на семантичния метод за скриване на информация е необходима таблица на синонимите, показана в Таблица 1 [8]. При това трябва да се отчита възможността за повече от един синоним на една дума.

Таблица 1

|        |           |
|--------|-----------|
| Big    | Large     |
| Small  | Little    |
| Chilly | Cool      |
| Smart  | Clever    |
| Spaced | Stretched |

Таблица на синонимите

Създадените синонимни речници за целите на семантичния метод, трябва да са пълни и адекватни за дадения език. Цялата лексика на даден език се разделя на множество групи в различен обем. В рамките на групите думите са сходни, както граматически, така и семантично. В тези речници често се включват по широк обзор на синонимите, отколкото традиционно значимите за даден език от гледна точка на лексикологията. WordNet може да се използва за автоматично генериране на синонимни таблици. Проблем възниква, когато използването на синоним променя значението на кодираните данни. Например, възниква проблем с избора на двойката синоними „cool“ и „chilly“. Да наречеш някой „cool“ има много по-различно значение от „chilly“ [11].

Синонимите се разглеждат като абсолютни и относителни, еднословни и многословни.

Абсолютни синоними са тези, които са определени от лексикологията, например любов и обич, красив и хубав, различен и нееднакъв и т.н. Относителните синоними се заменят само в контекста на даден текст, примерно САЩ с Америка, ОНД с Русия и т.н. За разлика от относителните синоними,

абсолютните могат да се прилагат към синонимни замествания, независимо от контекста.

Многословните синоними са например електро ток (от електрически ток), като в традиционните синонимни речници обикновено не са включени, но за този аспект на стеганографската наука са от значение. Друг пример е съединяването на две думи, като в речниците те са малко, но в говоримия език техният брой се увеличава и те често се използват в едни и същи текстове. Тук се използват и синоними, които имат едно и също значение с повече думи, примерно: "секретен", "таен", "скрит", "конфиденциален", "негласен", "неизвестен", "засекретен", „закрит“ и дават възможност да се скрият повече битове.

Тук създадените методи се базират на синонимно перифразиране и запазване на текстовия смисъл, като по този начин се подсигурява надеждност и безопасност на вложеното съобщение.

- **Метод на жаргонния код**

В метода на жаргонния код се използва език, който се разбира от една група хора, но е безсмислен за други. Жаргонните кодове включват различни условности (терминология или невинен разговор), който предава специално послание. Тези условности предварително са известни само на хората, които трябва да получат посланието.

Този метод вероятно е най-очевидната форма на лингвистична стеганография. Съобщение, което е кодирано в много отношения прилича на заместващ шифър, но вместо да се заменят отделни букви, се променят самите думи.

- **Синтактичен метод**

Чрез поставянето на някои препинателни знаци, като например точка (.) или запетая (,) на подходящи места, може да се скрие информация в текстов файл. Този метод изисква да се

---

---

идентифицират подходящите места за поставяне на препинателни знаци [12].

Писменият език предоставя достатъчно възможности за синтактическо скриване на данни, тези възможности не се наблюдават в класическите произведения. Това е така, защото правилата за пунктуация се считат за нееднозначни, и противоречивото им използване, може да стане обект на внимание за редактора. Такива случаи са възможни, когато изменението на пунктуацията води до снижаване на възприемчивостта на текста или до предаване на текста, на съвсем различен смисъл. Затова синтактичният метод трябва да се използва много внимателно.

Към синтактическия метод се отнася и метода за изменение на стила и структурата на текста, без значително изменение на заложения смисъл. Например, изречението „съществуват не малко случаи, когато правилата на пунктуацията се явяват нееднозначни“ може да се формулира и като „правилата на пунктуацията се явяват нееднозначни в много случаи“. Такива методи се явяват още по незабележими за нарушители, в сравнение с методите за изменение на пунктуацията. Възможно е тяхното използване да не се подава на анализ на компютърна автоматизирана стеганографска система.

Ортографическият метод за скриване на информация в текста се осъществява с помощта на влагане на грешки в текста. Грешките се разпределят в текста в съответствие с ключа, който определя думите, за които е нужно да се проверяват ортографически. При наличие на грешка се счита, че кода се равнява на 1 бит, а при отсъствие 0 бита.

- **Метод на промяната в правописа**

Този метод използва едни и същи думи, които са написани по един начин на британски и американски английски [8,11]. На английски някои думи имат различен правопис, така че можем да скрием данни в текста, като заместваме тези думи показани на

Таблица 2. Този метод е съставен от две части, едната е скриваща програма, която отговаря за скриването на данни в текст. Друга е програма за извличане, която извлича данни от текста, съдържащ скрити данни. Отначало се подготвя списък, съдържащ думите, които имат различен правопис във Великобритания и САЩ. Методът на скриване търси съществуващи думи от списъка в текста, като при поставяне на дума от първата колона в изречението се скрива 0 бита, а от втората – 1 бит. По този начин данните ще бъдат скрити в съответния текст. Този метод има малък капацитет за скриване на данни в текста. Това е свързано с основния текст и неговия размер, но като цяло капацитетът му е много малък.

Таблица 2

| <b>American Spelling</b> | <b>British Spelling</b> |
|--------------------------|-------------------------|
| Favorite                 | Favourite               |
| Criticize                | Criticise               |
| Fulfill                  | Fulfil                  |
| Center                   | Centre                  |
| Dialog                   | Dialogue                |
| Medieval                 | Mediaeval               |
| Check                    | Cheque                  |
| Defense                  | Defence                 |
| Tire                     | Tyre                    |

#### Промяна в правописа

- **Метод на акростиха**

Една разновидност на лингвистичната стеганография, наричана акростих, е била една от най популярните древни стеганографски техники. Този метод е използван и през XX век в Първата световна война и от германците, и от съюзниците. Един от известните примери е в следващите стихове на руският поет Николай Гумильов [1], който е скрил името на своята любима - поетесата Анна Ахматова, в началните букви на редовете:

Ангел лег у края небосклона.  
 Наклонившись, удивлялся безднам.  
 Новый мир был синим и беззвездным.  
 Ад молчал, не слышалось ни стога.  
 Алой крови робкое биение,  
 Хрупких рук испуг и содроганье.  
 Миру лав досталось в обладанье  
 Ангела святое отраженье.  
 Тесно в мире! Пусть живет, мечтая  
 О любви, о грусти и о тени,  
 В сумраке предвечном открывая  
 Азбуку своих же откровений

- **Метод на текстовите абривиатури (акроними)**

Друг метод за скриване на информация е използването на съкращения или акроними. М. Sirali-Shahreza и М. Hassan Shirali-Shahreza от Иран са предложили използването на заместване на думи с техните съкращения [8,11.]. Предложеният от тях метод работи, както следва:

**Таблица 3**

| Акроним (0) | Превод (1)          |
|-------------|---------------------|
| 218         | Too late            |
| 2day        | Today               |
| ASAP        | As Soon As Possible |
| C           | See                 |
| U           | You                 |
| CM          | Call Me             |
| F2F         | Face to face        |

**Текстови абривиатури (акроними)**

Таблицата се състои от две колони, предварително организирана с избран списък от думи и съответните им акроними по такъв начин, че колоната с превода на акронима е "1", а съответното съкращение е с етикет "0". Този метод може да

има широко приложение в съвременните системи за текстова комуникация в реално време (чат системи). Широкото разпространение на тези системи, както и въведените като норма на общуване текстови абривиатури, позволяват предаване на стеганографска информация без никакви подозрения.

Емотиконите са емоционални икони, които се използват при онлайн чат. Тези емотикони изразяват чувството или настроението на хората, общуващи помежду си. Те могат да се разгледат и като абривиатури на по-дълги текстове, свързани с емоционални състояния. Използването на емотикони в стеганографията е доста интересно. Ванг, Чанг, Кю, Ли предлагат техника за текстова стеганография, базирана на емотикони [13].

- **Метод на семаграми**

Процесът на скриване на информацията чрез използването на знаци или символи се нарича семаграми. Тази техника включва картина, музика, чертеж, надпис или друг символ, за да се скрие информацията. Скриването на съобщение се осъществява и чрез промяна на външния вид на текст, като тип или размер на шрифта, добавяне на допълнителни интервали в него или разнообразни цветове. Текстовите семаграми се разделят на два вида - визуални и текстови.

Визуалните използват различно невинно изглеждащи обикновени символи и знаци, като драскулки, или позициониран обект в текста.

Текстовите семаграми скриват съобщението чрез промяна на външния вид на текста, чрез едва забележими промени в размера на шрифта или типа му, добавяне на допълнителни пространства (увеличаване или намаляване на разстоянието между буквите в текста, допълнителни интервали).

### **3.2. Техническа стеганография**



Техническата стеганография използва физическото форматиране на текст като място, където да скрие информация. Обикновено този метод променя съществуващия текст, за да скрие стеганографския текст чрез вмъкване на интервали, умишлено написани правописни грешки разпределени в целия текст, оразмеряване на шрифта и т.н. Въпреки, че малко количество данни могат да бъдат скрити в документ, този метод може да се прилага за почти всички видове текст, без да разкрива съществуването на скрити данни. Компютърът може да не разпознава преоформяването на шрифта като проблем, особено ако се концентрира само върху текстово съдържание в документа, обаче човек може да открие странни размери на шрифта почти веднага. Освен това, ако е наличен оригиналният текст, сравнението на този текст с предполагаемия стеганографски текст би направило променените части от текста видими.

- **Метод на нулевия код**

Тук съобщението е скрито предварително според някои определени правила, например трябва да се чете всяка втора буква от първия, третия, петия ред и т.н.

През Втората световна война е използван и така наречения „нулев шифър“ (т.е. некриптирано съобщение). Скриването на съобщение в огромен брой безполезни данни е нулев шифър. Той има вид на невинно съобщение, при което по предварителна уговорка - втората буква от всички думи, всяка пета дума и т.н. формират скрито послание.

- **Метод на произволните символи**

При този метод се генерира произволен низ, който съдържа единични букви като основния текст. Английските букви се разделят на две групи въз основа на тяхната форма, т.е. дали един символ има извивка във формата си или не (Таблица 4), дали един символ има една вертикална линия или не и т.н.

Впоследствие, когато искаме да скрием 0 бита във входния текстов файл, използваме буквите от група А сред генерираните букви, а когато искаме да скрием 1 бит, използваме буквите от група Б сред генерираните букви. [14].

Таблица 4

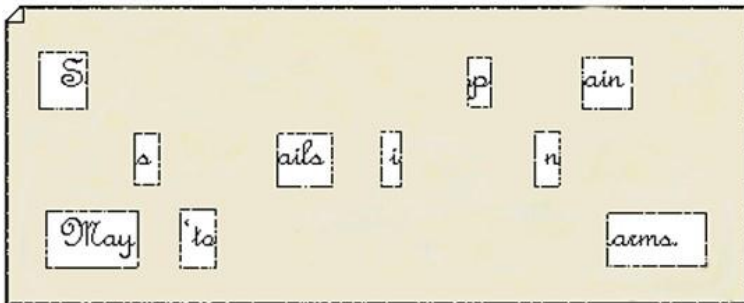
| Група | Име на групата | Bit | Букви                                       |
|-------|----------------|-----|---|
| А     | С извивки      | 0   | В, С, D, G, J, O, P, Q, R, S, U             |
| Б     | Без извивки    | 1   | A, E, F, H, I, K, L, M, N, T, V, W, X, Y, Z |

Групиране на символите според извивката

- **Метод на скарите**

Този метод е известен още като е метода „Скара на Кардан“ (Фиг. 4) [1,15]. Тук се изписва текста като след това върху него се налага решетка с дупчици, през които се виждат определени букви. При прочита на тези букви се оформя „тайното“ съобщение.

*Sir John regards you well and speaks again that  
all as rightly 'nails him is yours now and ever.  
May he 'tone for past d'lays with many charms.*



Фиг. 4. „Скара на Кардан“

В новата ни история „скарите” са използвани от революционерите от периода на националното ни възраждане, в това число и от Апостола на свободата Васил Левски.

- **Метод на бели полета**

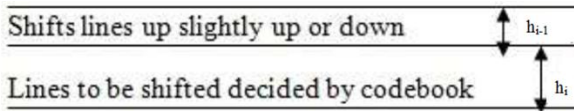
При този метод бялото пространство служи като основа за скриване на информацията [16]. Методът може да се използва по два различни начина: кодиране на линейно изместване и кодиране с преместване на думи.

Кодирането на линейно изместване е метод за промяна на документ чрез вертикално изместване на местоположенията на текстови редове, а кодирането чрез промяна на разстоянието между думите е метод за промяна на документ чрез хоризонтално изместване на местоположенията на думите в текстовите редове. [17]

### **Метод на линейното изместване**

Тази техника променя документа, като вертикално измества позицията на местоположенията на текстовите редове [18,19]. Кодираната дума, предназначена за определен документ, определя текстовите редове, които ще бъдат преместени в този документ. Може да използваме „0“ за линия (ред), изместена нагоре, и „1“ за линия, изместена надолу. Енкодерът трябва да премества редовете нагоре или надолу, а декодерът измерва разстоянието между всяка двойка от два съседни реда. Това може да се направи с помощта на две различни техники: или декодерът измерва разстоянието между базовата линия на съседните редове, или декодерът измерва разстоянието между центроидите на два съседни реда. Базова линия е логическа линия, върху която са подредени символите на ред; центроидът е центъра на определен текстов ред. Да предположим, че текстовите редове  $i-1$  и  $i+1$  не са изместени и ред  $i$  е изместен или нагоре, или надолу. В непроменен текстов документ разстоянието между изходните редове е постоянно. Нека  $h_{i-1}$  и  $h_i$  са разстоянията между

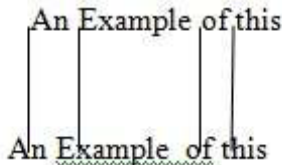
изходните редове  $i-1$  и  $i$  и съответно между базовите линии  $i$  и  $i+1$ . Централното разстояние може да не е непременно равномерно разположено. При методи, които измерват разстоянието между центроидите, решението се основава на разликата между центроидните разстояния в оригиналния документ и в променения документ.



**Фиг. 5. Метод на линейното изместване**

### **Метод за скриване в разстоянието между думите**

В този метод чрез хоризонтално изместване на думите и чрез промяна на разстоянието на думите, информацията се скрива в текста. Този метод е приемлив за текстове, където разстоянието между думите варира [12].



**Фиг. 6. Метод на линейното изместване**

Поради променливото разстояние, декодерът се нуждае от оригиналния документ или данни за разстоянието на думи в оригиналния документ. Първо кодиращият определя дали даден ред има достатъчен брой думи за кодиране, т.е. късите редове не са кодирани. На всеки намерен текстов ред за кодиране се прилага техниката на диференциално кодиране за тази схема. Втората, четвъртата, шестата и т.н. дума от лявото поле се измества. Първата и последната дума на всеки ред не са

---

---

изместени, за да се поддържа двустранното подравняване на колоната. След приключване на процеса на преместване на думи, документът се разпространява. Декодерът се нуждае от информация за оригиналния документ. Това не е недостатък, знаейки факта, че като цяло авторите проследяват документите си и притежават копие на оригиналния документ. Необходимата информация е позицията на началото на всяка дума или позицията на центроидите за всяка дума [20].

- **Промяна на характеристиките на текста**

В метода можем да променим характеристиките на текста един или повече пъти и по този начин променената функция може да послужи за основа на стеганографията. Функцията може да бъде стила, формата, цвета и размера на текста. Както например размерът на точката, използвана в малките английски азбуки *i* и *j*, може да бъде променена, за да се скрие 0 или 1. Такива характеристики могат да бъдат вертикалните линии на буквите *b*, *d*, *h*, *k* и др. Дължината на тези линии може да се променя по начин, който е незабележим с просто око. Височините на символите в рамките на даден шрифт също могат да бъдат променени. Може да се използва за вграждане на информация за авторските права, а не само за криене на информация.

Една от характеристиките на тези езици е изобилието от точки в буквите му. Буквите с една точка могат да бъдат използвани за скриване на информацията, като се измести позицията на точката малко вертикално по отношение на стандартната ѝ позиция в текста.

### **3.3. Стеганография в програмни кодове**

Езиците за програмиране се подчиняват на същите синтактични и семантични правила като естествените езици. С тяхна помощ се създават програмни кодове, чиято структура е подобна на тази на обикновените текстови файлове.

При повечето езици от високо ниво се прави компилиране на програмния код, в резултат на което се получава нов тип файл, наречен изпълним код. В тези случаи, вграждането на стеганографска информация в текста на програмния код, ще доведе до невъзможност за нейното възстановяване.

При част от програмните езици не е необходима компилация на програмния код, а се прави директна интерпретация на кода от програмна среда или приложение. Типичен представител на тези езици са така наречените „markup“ езици. Те са особено благоприятни за вграждане на скрита информация.

- **Метод на бели полета**

В този метод данните се вграждат чрез вмъкване на бели полета в HTML таговете. При този метод се добавя допълнително място в съответствие с тагове. Полето се вмъква след четене на символа "<" и преди четене на ">". Белите полета представляват еднобитови данни в HTML файлове. Обратна процедура се прилага във фаза на извличане, когато всички допълнителни интервали в тага са премахнати [21].

- **Метод на замяна на HTML таговете**

При този метод първо се избира подходящия HTML файл. Търси се в кой DIV таг да се скрие тайното послание и след това данните се вграждат чрез добавяне на параметър вътре в DIV елемента [7].

HTML таговете може да се използват в различни комбинации [12]:

Стего ключ

```
<img></img> -> 0
```

```
<img/> -> 1
```

Стего файл

```
<img src=g1.jpg></img>
```

```
<img src=g2.jpg/>  
<img src=g3.jpg/>  
<img src=g4.jpg/>  
<img src=g5.jpg></img>
```

Скрити битове: 01110

Тук данните се вграждат с помощта на празни тагове. Представянето на празен таг е или начален таг, последван от таг за край, или празен. Обикновено тази техника може да бъде използвана или приложена с помощта на `<img>` тага. В този метод първия таг на изображението се взема и затварящия символ „/” се добавя преди прочитане на символа за край „>”. За да приключи процеса на извличане трябва да имаме и двете `<tag/>` и `<tag></tag>`. Така че, когато символа „/” се изтрие от първия таг `<tag/>`, то ще има друг затварящ таг `</tag>`, за да се избегне евентуална грешка. В обратния процес „/” се изтрива преди четене на знака за край „>” [22].

В този метод се създават и скрити таблици. Избират се подходящото послание, което ще бъдат добавено в таблицата. Това става като всяко послание се добавя в ред от таблицата [7].

Среща се и промяна на малки и главни букви (регистъра) в HTML таговете. Те са нечувствителни към регистъра, поради което можем да се възползваме от него, за да скрием съобщение в документа, като променим регистъра на конкретни букви в името на тага. Например, `<ID>`, `<id>`, `<Id>` и `<iD>` означават абсолютно едно и също и можем да кодираме два бита, като изберем една от неговата версия. Големият капацитет е основното предимство на този метод. От друга страна е много лесно да се открие стего каналът, тъй като е много необичайно да се използват редуващи малки и главни букви [23].

- **Метод на разделяне на думите**

В метода на разделяне на думите данните се вграждат чрез тага <p>. В този метод текста първо се разделя на блокове от думи. След това битовете се вграждат чрез коригиране на ширината на разстоянията между символите в рамките на един блок, в предварително зададено правило. Размерите на блока от 18-20 символа се предефинират и се вгражда 3 бита информация [7].

- **Метод на скриване в атрибутите**

Този метод скрива тайната информация чрез използване на HTML тагове и атрибути. Една възможност е скриване на съобщенията чрез промяна на реда на атрибутите, тъй като подреждането на атрибутите не влияе на външния вид на HTML документите, които са основни елементи на мрежата. Тези документи се използват много често в Интернет и следователно са по-малко склонни да предизвикат подозрение за съществуването на тайното съобщение. Освен това, всеки HTML документ има значителен брой тагове и атрибути. По този начин капацитетът на процеса на скриване на секретни съобщения също е висок в предлаганата техника.

Някои от HTML атрибутите имат дефинирани стойности по подразбиране. HTML документ се възприема по същия начин, без значение дали стойностите по подразбиране са изрично дефинирани или не. Това дава възможност да се скрие допълнителна информация чрез посочване на стойности по подразбиране в някои части на HTML документа и пропускането им в други части. Този метод е труден за откриване, но ограниченият възможен брой атрибути със стойности по подразбиране е основния му недостатък.

HTML стандартът не определя реда от атрибутите, което означава, че всеки ред може да се използва, без да се засяга външния вид на уеб страницата. Тъй като редът на атрибутите няма значение, този метод може да се прилага без ограничения. Промяната на реда на атрибутите за скриване на информация в



HTML документ е най-интересният метод за HTML стеганографията. Това не променя оригиналния размер на файла и е трудно да се открие без компютърни програми, анализиращи структурата на HTML документа.

Имайки таг, включващ 8 атрибута, има  $8! = 40320$  различни пермутации, което позволява да се скрие над 15 бита информация в рамките на един и същ таг. Този метод вероятно е най-често споменаваният в контекста на скриване на данни в документите за markup езика. Основното му предимство се крие в неговата сигурност, но на практика позволява да се изпраща само малко количество данни, тъй като е ограничено от броя на атрибутите, използвани в оригиналния документ.

- **Метод на произволните символи**

В този метод данните се вграждат чрез вмъкване на произволни знаци в таговете. Символ се вмъква след прочитане на първия символ от първия таг. По същия начин след всяка дума се вмъква по един случаен символ. В случай на специален символ, процесът се повтаря отново. Процесът на вграждане се прилага рекурсивно към всички тагове. При обратния процес всички вмъкнати символи се изтриват от файла.

- **Метод на смяната на цвета**

При метод на смяната на цвета данните се вграждат чрез замяна на името на цвета с неговата шестнадесетична стойност. В този метод първо трябва да намери атрибута на цвета, последван от символ "=" и след това името на цвета се заменя с неговата шестнадесетична стойност. В обратен ред шестнадесетичната стойност се връща обратно към нейното име [7].

#### **4 Заключение**

Възможност за комбинации между грешки, знаци, разстояния между символите, влагане на „жаргони” (условности) и т. н. правят текстовата стеганография неоткриваема и на

практика най-сигурна и неподдаваща се на анализи. За това способства и обстоятелството, че не е нужна математическа логика, което често прави неефективни компютърните системи и програмните продукти за анализ на съобщенията. Използването на такъв тип стеганографски методи позволява лесна програмна реализация на вграждане и извличане на стеганографска информация. Това прави толкова привлекателно използването им при обучение в областта на защита на информацията и информационна сигурност.

#### ЛИТЕРАТУРА:

- [1] Станев, С. Стеганологична защита на информацията, Университетско издателство „Епископ Константин Преславски”. Шумен, 2013. ISBN 978-954-577-825-4. 320.
- [2] Станев, С., Железов, С., Параскевов, Х., Христов, Х., Ръководство за упражнения по стеганография, Университетско издателство, Шумен, 2015, ISBN 978-619-201-011-9.
- [3] Stanev, S., Szczypiorski, K. Steganography Training: A Case Study from Univeristy of Shumen in Bulgaria. *International Journal of Electronics and Telecommunications*, 2016, vol. **62**, no. 3, PP. 315-318
- [4] Станев, С., В. Галяев. Смысловое сопоставление научных терминов на русском и английском языках в области компьютерной стеганографии, *Сборник материалов международной научно-практической конференции. ГАОУ ВПО “Дагестанский государственный институт народного хозяйства”*. – Махачкала.: ДГИНХ, 2013. стр.51-56.
- [5] Параскевов, Хр., Стефанов, Ал., Съвременни стеганографски подходи в социалните мрежи, МАТТЕХ 2018, Том **1**, стр. 197-203.
- [6] Kordov, K., Stoyanov, B. (2017). Least Significant Bit Steganography using Hitzl-Zele Chaotic Map. *International Journal of Electronics and Telecommunications*, Vol. **63**, No. 4, pp. 417-422

- [7] Agarwal, Monika, Text steganographic approaches, *International Journal of Network Security & Its Applications (IJNSA)*, Vol. **5**, No.1, 2013, pp 91-106.
- [8] M. H. S. Shahreza, and M. S. Shahreza, A new approach to Persian/Arabic text steganography. *Proceedings of 5th IEEE/ACIS Int. Conf. on Computer and Information Science and 1st IEEE/ACIS Int. Workshop on Component-Based Software Engineering, Software Architecture and Reuse*, 2006, pp. 310-315.
- [9] Anderson, R., F. Petitcolas. On The Limits of Steganography. *IEEE Journal of Selected Areas in Communication*, 1998. Special Issue of Copirright & Privacy Protection. ISSN 0733-8716, **16**(4):474-481
- [10] M. H. Shirali-Shahreza, M. Shirali-Shahreza, A new approach to persian/arabic text steganography, *Proc. 5th Int. Conf. Computer and Information Science*, Washington, 2006, pp. 310-315.
- [11] M. Shirali-Shahreza, Text Steganography by Changing Words Spelling, In: 10th International Conference on Advanced Communication Technology, 2008, ICACT 08, vol. **3**, pp. 1912-1913.
- [12] Prem Singh, Rajat Chaudhary and Ambika Agarwal, A Novel Approach of Text Steganography based on null spaces, *IOSR Journal of Computer Engineering (IOSRJCE)*, 2012, Volume **3**, Issue 4, pp 11-17.
- [13] Z.H. Wang, C.C. Chang, D. Kieu, and M.C. Li, Emoticon-based Text Steganography in Chat, Second Asia-Pacific Conference on Computational Intelligence and Industrial applications, 2009, ISBN: 978-1-4244-4606-3.
- [14] Shraddha Dulera, Devesh Jinwala and Aroop Dasgupta, Experimenting with the novel approaches in text steganography, *International Journal of Network Security & Its Applications (IJNSA)*, Vol. **3**, No.6, November 2011, pp 213-220.
- [15] Апостолов, Д. и С. Станев, Софтуерна реализация на класическия стеганографски способ "Gardan grill". *Годишник на Факултета по технически науки*, ШУ, 2013.
- [16] Ray, Rishav, Jeeyan Sanyal, Debanjan Das, and Asoke Nath, A New Challenge of Hiding any Encrypted Secret Message inside any

- Text/ASCII File or in MS Word File: RJDA Algorithm, International Conference on Communication Systems and Network Technologies, May 2012, vol. – 6, pp. 889-893.
- [17] L. Y. Por, T. F. Ang and B. Delina, WhiteSteg: A new scheme in information hiding using text steganography, *WSEAS Transactions on computers*, 2008, Issue 6, Volume 7, pp 735-745.
- [18] S.H. Low, N.F. Maxemchuk, J.T. Brassil, and L. O'Gorman, Document marking and identification Using both line and word shifting, *Proceedings of the Fourteenth Annual Joint Conference of the IEEE Computer and Communications Societies (INFOCOM '95)*, 2-6 April 1995, vol. 2, pp. 853 - 860.
- [19] Richard Popa, An Analysis of Steganographic Techniques, The Politehnica University of Timisoara, Faculty of Automatics and Computers, Department of computer science and Software Engineering. 1998.
- [20] Hitesh Singh, Pradeep Kumar Singh, Kriti Saroha, A Survey on Text Based Steganography, *Proceedings of the 3rd National Conference; INDIACom-2009*, Computing For Nation Development, February 26 – 27, 2009
- [21] Dhammjyoti V. Dhawase, Sachin Chavan, Webpage information hiding using page contents, *IJAR CET*, Volume 3, Issue 1, January 2014, pp 182-186.
- [22] Zhelezov, S., Uzunova-Dimitrova, B., Paraskevov, H., An approach for hiding steganography data within web applications, *Journal of Engineering and Applied Sciences* 12(Special issue 8), pp. 8251-8255.
- [23] L. Polak1, Z. Kotulski, Sending hidden data through WWW pages: detection and prevention, 2010 Polish Academy of Sciences Institute of Fundamental Technological Research, 58, 1–2, 75–89.

**Теодора Тихомирова Стоянова**  
ШУ „Еп. Константин Преславски“  
E-mail: t.stoyanova@shu.bg

**Станимир Кунчев Железов**  
ШУ „Еп. Константин Преславски“  
E-mail: s.zhelezov@shu.bg

## USING WAVEFRONT OBJ FILE FORMAT IN THE QUALITY OF STEGANOGRAPHIC CONTAINER\*

DELYAN H. SARMOV

**ABSTRACT:** *In steganography, the use of various raster graphic file formats, as containers, has been explored. The present work aims to propose a method for inserting a message into a model built using 3D modelling software and stored in vector file format.*

**KEYWORDS:** *obj, 3d modelling, steganography, Blender;*

**2010 Math. Subject Classification:** 94A99, 68P20, 68P2530

## ИЗПОЛЗВАНЕ НА WAVEFRONT OBJ ФАЙЛОВ ФОРМАТ КАТО КОНТЕЙНЕР В СТЕГАНОГРАФИЯТА†

ДЕЛЯН Х. СЪРМОВ

**АБСТРАКТ:** *В областта на стеганографията е изследвано използването на различни растерни графични файлови формати, в качеството им на контейнери. Настоящата работа има за цел да предложи метод за вмъкване на съобщение в модел, изграден с помощта на софтуер за триизмерно моделиране и съхранен във векторен файлов формат.*

---

\* This paper is (partially) supported by Scientific Research Grant № RD- 08-96/01.02.2019 of Konstantin Preslavsky University of Shumen

† Статията е частично финансирана по проект № РД- 08-96/01.02.2019 “Защита и надеждност на данни във виртуални и web среди, графични файлове, 3D моделиране на терени” на ШУ

## **Въведение**

В областта на стеганографията е изследвано използването на различни растерни графични файлови формати, в качеството им на контейнери. Разработени са както методи за вмъкване на съобщения така и за изследване на файлове за наличие на добавена информация [1,2,3,4,5].

Настоящата работа има за цел да предложи метод за вмъкване на съобщение в модел, изграден с помощта на софтуер за триизмерно моделиране и съхранен във векторен файлов формат. Моделирането представлява творчески процес, при който количеството и вида на включената информация е субективно. По тази причина е затруднено разработването на методи за автоматизирано търсене на скрита информация.

Примери за такива програми са Autodesk Maya, Autodesk 3ds Max, Blender, Houdini, LightWave 3D и др. Всеки от изброените програмни продукти разполага със собствен файлов формат, в който по-подробно се съхраняват създадените модели. По тази причина популярност са придобили други междуплатформени формати, за които се поддържат функциите експортиране и импортиране.

В настоящата работа е избран да се използва Wavefront .obj файлов формат. За генериране и вмъкване на съобщение във файла се използва модификация на вградения в Blender скрипт за експортиране в obj.

## **Структура на Wavefront obj файлове**

Obj формата поддържа описание на линии, полигони, криви и повърхнини. Линиите и полигоните са описани с точки, докато кривите и повърхнините са описани с контролни точки и друга информация зависеща от типа на кривата. Точките във векторната графика се наричат вертекси и във obj файловете съществена част от информацията представлява координати на

вертекси.[5,6,7,8,9] Всеки непразен и некомментиран ред съдържа ключова дума описваща данните след нея:

v - геометрични вертекси

vt – Текстурни вертекси

vn – вертексни нормали

Съществуват и ключови думи задаващи групиране:

g - име на група

s - група за заглаждане (Smoothing group)

mg – сливане (Merging group)

o - име на обект (Object name)

Налични са и запазени думи за параметрите на криви, повърхнини, текстури, материал на обектите, сенки и др.

### **Избор на информация от файла която да се използва като контейнер**

В един стандартен obj файл най-обемната част от информацията представлява описанието на вертексите, от които е изграден модела. То има следния формат:

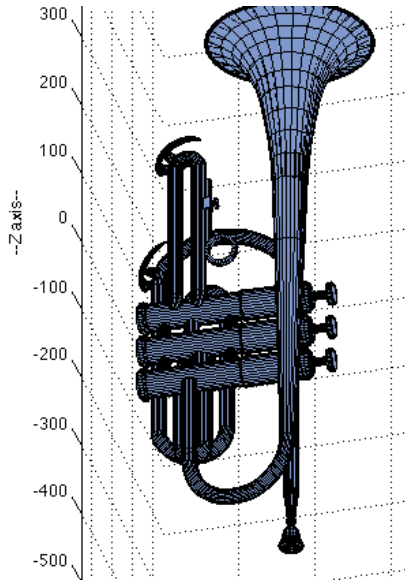
v 19.724470 -543.919434 232.306442

v 17.983204 -553.358643 234.228592

v 17.982729 -543.823303 233.188599

Редовете започват със запазената дума „v“, последвана от координатите на точката в пространството. Един ред представлява един вертекс. Трите числови стойности представляват координатите по осите „x“, „y“ и „z“.

Като пример може да се разгледа модела показан на фиг. 1.



Фиг. 1 Примерен триизмерен модел

В посочения модел са използвани 11908 вертекса за моделиране на музикалния инструмент тромпет. Във файла е записана информация за точки, зададена с точност шест знака след десетичния разделител. В практиката обаче, поради особености на използваните алгоритми за рендиране, както и разпространения хардуер, информацията за вертексите се закръгля преди да се визуализира. По надолу се предлага метод за съхранение на скрито съобщение, с несложна модификация на python скрипт използван в Blender за експортиране в obj файл.

### **Вмъкване на информацията в obj файл**

Ако приемем, че съобщението ще бъде текстово, то трябва да съпоставим на всеки знак двоично представяне по някаква



кодова таблица. В текущия пример ще се използва стандартната ASCII кодова таблица.

Например текста „this is hidden message“ се представя в десетичен формат като:

```
116 104 105 115 32 105 115 32 104 105 100 100 101 110 32
109 101 115 115 97 103 101
```

а в двоичен формат:

```
01110100 01101000 01101001 01110011 00100000 01101001
01110011 00100000 01101000 01101001 01100100 01100100
01100101 01101110 00100000 01101101 01100101 01110011
01110011 01100001 01100111 01100101
```

Така на всеки знак се съпоставят 8 бита „0“ или „1“, които се съхраняват в шестия знак след десетичната точка. Нека на 0 да съответства четна цифра, а на 1 нечетна.

Кода на скриптовите на Blender се разпространява свободно с помощта на svn система [10].

Обобщена извадка от всички фалове за по стара версия на Blender също е налична [11].

Фрагмента от кода, в който се извършва запис на информацията в obj файл е:

```
for v in Vertices:
    vert = v.co
    if multiflag == 1:
        vert = Alter(vert, Transform)
    x, y, z = vert
    FILE.write("v %s %s %s\n" % (x, y, z))
```

Който се модифицирапо следния начин:

```
i = 0
for v in Vertices:
    vert = v.co
    if multiflag == 1:
        vert = Alter(vert, Transform)
    x, y, z = vert
    temp = float(z)
    if BitStream[i] == 1 and ((temp * 100000) % 2) == 0:
        temp += 0.000001
    if BitStream[i] == 0 and ((temp * 100000) % 2) == 1:
        temp += 0.000001
    z=string(temp)
    i+=1
    FILE.write("v %s %s %s\n" % (x, y, z))
```

С помощта на посочената модификация се променя шестия знак след десетичната точка в четно число, ако поредният бит, който трябва да се запише е 0 и в нечетно, ако е 1. В посочения пример се използва единствено z координатата. Предварително е генериран масивът с двоично представяне BitStream.

### **Заклучение**

С посочения метод се постига запис на информация в Wavefront obj файлове посредством стандартен скрипт който може лесно да се интегрира в приложния продукт като plugin. Това спомага още в процеса на моделиране да се вмъква информация в триизмерни векторни модели, като се използва стандартния синтаксис на файловете, без това да пречи или променя тяхната употреба. Със същия подход могат да се използват и останалите координатите x и y.

## ЛИТЕРАТУРА:

- [1] Stoyanov, Borislav P., Stanimir K. Zhelezov, and Krasimir M. Kordov. Least significant bit image steganography algorithm based on chaotic rotation equations. *Comptes rendus de l'Academie bulgare des Sciences* **69.7** (2016).
- [2] Железов, Ст., Х.Параскевов и др. Един подход за откриване на стеганографски манипулирани аудиофайлове чрез разлагане с wavelet. Научна конференция с международно участие, посветена на 105 годишнината от рождението на Джон Атанасов и Джон фон Нойман, Том **2**, Шумен 2009., стр.126.
- [3] Станев, С. Стеганологична защита на информацията, Университетско издателство „Епископ Константин Преславски“. Шумен, 2013. ISBN 978-954-577-825-4. 320.
- [4] Параскевов, Хр., Стефанов, Ал., Съвременни стеганографски подходи в социалните мрежи, *MATTEX 2018*, Том **1**, стр. 197-203.
- [5] F. Petitcolas, R. Anderson, M. Kuhn, Information hiding a survey, *Proceedings of the IEEE*, vol. **87**, pp. 1062-1078.
- [6] Doria D., A Wavefront OBJ Writer for VTK, *The VTK Journal*, 01-28-2010 ISSN 2328-3459
- [7] B. Madoš, J. Hurtuk, M. Copjak, P. Hamaš, M. Ennert, Steganographic algorithm for information hiding using scalable vector graphics images, *Acta Electrotechnica et Informatica*, vol. **14**, no. 4, pp. 42-45, 2014, ISSN 1335-8243.
- [8] Branislav Madoš, Anton Balaz, Norbert Adám, Ján Hurtuk, Information Hiding into OBJ Format File Using Vector Steganography Techniques, 2018 IEEE 12th International Symposium on Applied Computational Intelligence and Informatics (SACI)
- [9] URL: <https://www.fileformat.info/format/wavefrontobj/egff.htm>
- [10] <https://svn.blender.org/svnroot/bf-extensions/trunk/py/scripts/addons/>
- [11] URL: [http://homepages.gac.edu/~hvidsten/courses/MC394/projects/final/obj\\_io\\_modif232b.py](http://homepages.gac.edu/~hvidsten/courses/MC394/projects/final/obj_io_modif232b.py)

Sarmov D.

---

---

**Делян Христов Сърмов**

Месторабота: Шуменски университет „Епископ Константин  
Преславски“

E-mail: d.sarmov@shu.bg

## **DYNAMICS OF FINANCIAL ASSET PRICES AND RISKS FOR FINANCIAL MARKETS**

**SVILEN G. TONEV**

**ABSTRACT:** *The aim of the paper is to examine the underlying causes of the large fluctuations in the prices of financial assets from the 1980s to the present. This period is characterized by several large amplitudes in the movement of stock prices and bonds that disturb the work of the financial markets, and in 2007-20098 they have grown into a deep economic crisis. Attention is drawn to the role of central bank monetary policy in the emergence of financial imbalances.*

**KEYWORDS:** *central banks, crisis, financial asset, financial markets, fluctuations, monetary policy, prices*

**2010 Math. Subject Classification:** 91B26

## **ДИНАМИКАТА НА ЦЕНИТЕ НА ФИНАНСОВИТЕ АКТИВИ И РИСКОВЕТЕ ЗА ФИНАНСОВИТЕ ПАЗАРИ\***

**СВИЛЕН Г. ТОНЕВ**

**АБСТРАКТ:** *Целта на статията е да се разгледат основните причини за големите колебания в цените на финансовите активи от 80-те години на XX век до настоящия момент. Този период се характеризира с няколко големи амплитуди в движението на цените на акциите и облигациите, които разстройват работата на финансовите пазари, а през 2007-2009 г. прераснаха и в дълбока икономическа криза. Отделя се внимание на ролята на паричната политика на централните банки за възникване на финансови неравновесия.*

---

\* Настоящата статия е финансирана по проект № РД 08-79/30.01.2019 г.

## **Въведение**

Цените на базовите финансови активи – акции и облигации, понастоящем са на много високо равнище. Акциите в повечето страни достигнаха рекордни стойности през 2019 г., високи са цените и на държавните облигации. Икономическата среда, в която се достигна до това явление, е следствие от Глобалната финансова криза от 2007-2009 г. Целта на статията е да се изследва дали равнищата на цените на базовите финансови активи – акции и държавни облигации в началото на 2019 година имат здрава икономическа основа, има ли основания да се смята, че те имат характер на финансов балон, какви са причините и последствията от нарастването на цените. В първата част на статията се проследяват тенденциите за ускоряващо се повишаване на цените на акциите и облигациите след 2000 година, при едновременно засилване на колебанията на цените на финансовите активи. Във втората част се разглеждат вероятните причини за това и рисковете, които следват за финансовата система от достигнатите равнища на цените. Изследва се ролята на централните банки и паричната политика за предизвикването на този ускорен растеж на цените на финансовите активи. Посочва се връзката с макроикономическата политика в съчетание с други фактори, действащи в икономиката.

### **1 Динамика на цените на финансовите активи**

От средата на 80-те години на 20 век световната икономика навлезе в период на ниски темпове на инфлация и висок икономически растеж. Това е и период на относително ниски лихвени проценти, които достигнаха близки до нулата стойности след 2009 г. Съществена роля за това изигра провежданата икономическа политика и главно паричната политика в най-развитите държави.

Евентуалната връзка между ниските лихвени проценти и появата на големи колебания в цените на отделни класове активи продължава да бъде открит въпрос в теорията, но е налице емпирична констатация, че периодът на ниски лихвени проценти, който започна от 90-те години на 20 век и продължава до края на второто десетилетие на 21 век, съвпадна с голямо увеличение на някои видове цени. Статистическите данни за основните борсови индекси показват дългосрочно повишаване на цените на акциите.

Данните в таблиците по-долу показват високите темпове на нарастване на цените на акциите в САЩ през последните няколко десетилетия чрез повишаването на стойността на Standard & Poor's 500.

Табл. 1 Исторически данни за равнището на стойността на индекса S&P 500

|        | 01.01.1959 | 01.01.1979 | 01.01.1999 | 01.01.2019 |
|--------|------------|------------|------------|------------|
| SP 500 | 55.62      | 99.71      | 1248.77    | 2602.55    |

Табл. 2 Относително изменение на стойността на индекса S&P 500

|                       | 01.01.1959 –<br>01.01.1979 | 01.01.1979 –<br>01.01.1999 | 01.01.1999 –<br>01.01.2019 |
|-----------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| Нарастване в проценти | 79.27                      | 1152.40                    | 108.41                     |
| Темп в проценти       | 2.96                       | 13.47                      | 3.74                       |

Основният борсов индекс в САЩ Standard & Poor's 500 достигна върхови стойности през 2000 г. и 2007 г., които имаха характеристики на ценови балони, последвани от резки спадове.

Подобни характеристики този индекс, както и други борсови индекси, имат и в момента.

Високата стойност на индекса S&P 500 през 1999 година е израз на дот-ком балона, след което последва рязък спад на цените на акциите, особено на компаниите, свързани с интернет. Цените се възстановиха бързо до равнище на индекса над 1500 пункта през 2007 година, но след това се сгромолясаха в резултат на Глобалната финансова криза и индексът спадна до 666 на 9 март 2009 г. През следващите години отново сме свидетели на главоломно нарастване, като историческият рекорд на индекса е достигнат на 20 юни 2019 г. със стойност 2958.08. Това означава нарастване с 344.16 % за приблизително 9 години и 8 месеца.

Понастоящем SP 500 има съотношение Цена/Печалба около 25, което е малко над историческата средна стойност от около 15 и далеч под рекордно високата стойност от 123.73 достигната за кратко през май 2009 година. За дългосрочния темп на повишаване на цените на акциите основна роля играе дългосрочният темп на икономически растеж в номинално изражение. От там нататък като причини влизат в действие ниските лихвени проценти и увеличаването на паричното предлагане.

Важен фактор за повишаването на цените на финансовите активи е паричната политика на Федералния резерв на САЩ, по която се водят и останалите централни банки. ФЕД увеличава силно паричното предлагане и правителството увеличава силно разходите, като разчита на увеличаване на дълга, използвайки ролята на долара като международно резервно средство. Създаването на нови финансови инструменти с висока ликвидност улеснява достъпа до финансовите пазари и усилва финансовите колебания [3, р.33]. Разхлабената парична политика става необходима не само за поддържане на заетостта, но и за поддържане на ниски лихви по държавния дълг. Големият размер държавен дълг става проблем при повишаване на лихвените проценти. Тази политика обаче води до създаване на ценови



балони в отделни сектори на икономиката и в случая преди всичко при цените на финансовите активи.

Цените на държавните облигации са много високи повече от десетилетие. Високите цени на държавните облигации породиха опасения от надуване на специфичен нов финансов балон. Уорън Бъфет сравнява пазара на държавни облигации с предишните ценови балони на акциите на свързаните с интернет компании и на недвижимите имоти. Отдръпването на лихвените проценти от сегашните неестествено ниски стойности ще доведе до спад на цените на държавните ценни книжа. Ако този процес протече рязко, това ще доведе до съответни загуби на инвеститорите, които са вложили парите си в тях точно при пика на цените, за да запазят в този момент своето богатство от риска.

Правителствата в най-развитите индустриални държави поеха големи преки и косвени задължения в хода на антикризисната политика след 2007-2009 г. Бяха вложени големи суми за изкупуване на обезценени рискови активи на банките, за спасяване на системно важни финансови институции, за подпомагане на отделни отрасли като автомобилостроенето. Гарантираха се на практика почти всички депозити. Фискалните стимули, които водещите държави приложиха за стабилизиране на икономиките, имаха спасително действие за много фирми, тъй като им позволиха да превъртят корпоративен дълг и да разсрочат плащанията си за по-късни периоди. Без това броят на фалиралите фирми щеше да бъде по-голям. Изсипването на огромна ликвидност чрез емитиране на дълг и поемането на гаранции без надеждни обезпечения може обаче да създаде дългосрочни рискове и трудности. Съществуват опасения, че продължителното поддържане на близки до нулата лихвени проценти може да създаде ликвиден капан и да повтори в глобален мащаб стагнацията, характерна за Япония от 1990 до 2010 г.

Ниските лихвени проценти в икономиката намират концентриран израз в ниските равнища на нормата на доходност

на лихвените инструменти. Доходността на облигациите през последните 50 години може да служи като отправна точка за оценка на съвременното състояние. На финансовия пазар в САЩ тя достига най-високо равнище през 1982 г., като за 30-годишните държавни облигации тя е 15% годишно в номинално изражение. След 1982 г. доходността на тези облигации се понижава устойчиво. Причините за това движение на лихвените проценти по държавните ценни книжа през този период са преди всичко ниските темпове на инфлация, които обуславят ниско равнище на номиналните лихвени проценти като цяло.

След кризата голяма част от загубите на финансовите институции и техни задължения се трансформираха в публичен дълг. Централните банки изкупили или гарантираха значителен размер държавни ценни книжа, като по този начин паричната политика се преплете с фискалната. Наличието на толкова големи държавни дългове в момента все още не се усеща рязко в страните, които успяват да поддържат ниски лихвени проценти по държавните ценни книжа. Повишаването на изискваната от инвеститорите доходност на облигациите обаче ще стовари огромно бреме върху данъкоплатците по обслужването на дълга.

## **2 Влияние на измененията на цените на финансовите активи върху рисковете на финансовите пазари**

За преодоляване на последната финансова криза от 2007-2009 г. бяха приложени извънредни мерки на паричната политика, изразяващи се в голямо увеличаване на паричното предлагане при същевременно изключително ниски основни лихвени проценти, поддържани в продължителен период от време. Тяхното влияние върху финансовите пазари и инвестициите не доведе до бързо възстановяване на икономиката, донякъде с изключение на САЩ. Продължителната силно експанзионистична политика не предизвика зараждане на инфлация, както е обичайно, а основни проблеми продължаваха

да бъдат ниската заетост и опасността от дефлация. От друга страна обаче, голямото количество пари, които се изсипаха в икономиките, създаде предпоставки за надуване на ценови балони при суровините и финансовите активи, първо при държавните облигации, а впоследствие при акциите. Докато спадането на балона при цените на суровините протече сравнително плавно, има опасност връщането на цените на финансовите активи към фундамента да протече рязко и да създаде проблеми.

Финансовата стабилност има сложни взаимовръзки с ценовата стабилност. Последните десетилетия показаха финансови неравновесия, докато равнището на цените беше стабилно. Преди последната криза инфлацията беше ниска и стабилна. Същевременно в този период се създадоха големи финансови дисбаланси, тъй като финансовата система беше в значителна степен дерегулирана, финансовият инженеринг беше във възход и се осъществи кредитен бум, довел до повсеместно задлъжняване в големи мащаби. Особено финансовите институции и най-вече хеджфондовете извършваха операции при много висок ливъридж. Високо рисково е, когато икономическите субекти поемат големи задължения, за да купуват финансови активи, очаквайки техните цени да нарастват. Казано по друг начин, когато се спекулира на финансовите пазари при висок ливъридж.

Това прекъсване на връзката между финансовия и деловия цикъл поставя предизвикателство пред традиционната макроикономика и особено пред паричната политика. В икономическата теория стана много актуален въпросът дали паричната политика и съответно централната банка, която е отговорна за нейното провеждане, трябва да се ангажират с въпросите на финансовата стабилност. По-конкретно, трябва ли централната банка чрез инструментите на паричната политика да осигурява стабилност на финансовите пазари. Централната банка няма за цел да осигурява стабилност на цените на финансовите

активи, но тя не може да остане пасивна, когато се наблюдават значителни колебания на финансовите пазари, които могат да разстроят тяхната дейност [4, р.44]. Според някои автори, експанзионистичната лихвена политика ще окаже инфлационно въздействие върху ценовите балони при финансовите активи, но рестриктивната лихвена политика няма да постигне обратен ефект [2, р. 18]. В съвременната практика в целите на паричната политика е изведена на първо място целта за поддържане на стабилност на цените. Смята се, че би се внесла противоречивост в целепологането и отговорността на централната банка, ако тя едновременно трябва да прилага мерки за поддържане на ценова стабилност и на стабилност на цените на активите. Възможно е в даден момент основните макроикономически индикатори да изискват разхлабена парична политика, а състоянието в областта на цените на финансовите активи да изисква затегната политика. Целта на паричната политика относно инфлацията от години е формулирана като 2% темп годишно и е публично известна. Това формира очаквания на икономическите субекти относно действията на централната банка. Някои автори смятат, че цените на финансовите активи не зависят от паричната политика, а се свързват с оценката на икономическите агенти за икономическата политика и включват премия за придобиването на финансови активи в условията на несигурност [1, р.96]. Но въпреки това възниква въпросът дали чрез определянето на ключовите лихвени проценти централната банка не оказва определено влияние на цените на активите и от там на стабилността на финансовите пазари, въпреки че съществуват мнения, че не е установена теоретична зависимост между лихвените проценти и определени цели относно цените на финансовите активи.

Капиталовите потоци по своята природа търсят непрекъснато по-висока доходност на глобалните финансови пазари. Разликата между лихвените проценти върху привлечените парични средства и върху инвестирания ресурс от финансовите институции в последните години намаля в повечето

страни. Финансовите институции проявяват склонност да поемат повече риск, за да си осигурят доходи. Липсата на доходност по резервите на търговските банки в централната банка при отсъствие на адекватно търсене на кредит ги стимулира да инвестират във финансови активи, допринасяйки за повишаване на цените им [5, р.49]. Същевременно, налице е нарастваща корелация между движението на цените на различните класове финансови активи и това намалява възможностите за диверсификация.

Колкото повече регулиране се въвежда в една част от финансовата система, толкова повече нараства рискът от изместване на дейността по предлагане на финансови услуги в други, по-малко регулирани или въобще нерегулирани части на системата. Това е демонстрирано особено нагледно от развитието на „сенчестото банкиране“, което се изразява в оказване на банкови услуги, най-вече кредитиране, от небанкови финансови институции. Размерът на тази нова пазарно-базирана кредитна система нараства неударжимо в последните години и увеличава риска във финансовия сектор.

Паричната и макропруденциалната политика са части от макроикономическата политика, затова не би трябвало да се противопоставят или да се изолират една от друга. Паричната политика трябва да стабилизира цените и да поддържа деловата активност. Тя не може да се фокусира върху конкретни неравновесия във финансовия сектор, но трябва от своя страна да не създава условия за финансови неравновесия. В последните години е налице все по-голяма взаимосвързаност на паричните политики във водещите икономически центрове – САЩ, Европа и Япония, като основните насоки и инструменти до голяма степен се сближават и финансовите неравновесия лесно се предават от една страна на друга. Поради неедновременното протичане на финансовия и икономическия цикъл паричната политика трябва да се допълва с макропруденциалната политика, която става много важна за икономиката. Макропруденциалната политика

трябва да влияе върху конкретни части на финансовия сектор, като предотвратява зараждането на финансови деформации. Тя може да бъде насочена към отделни сфери на икономиката, намира се изцяло в прерогативите на националните правителства и може да допълва паричната политика. Въпреки че инструментите на паричната и на макропруденциалната политика са от различен характер, те трябва да се използват за взаимодопълващо се въздействие с цел обща икономическа стабилност.

### **Заклучение**

Без координирано използване на парична и фискална политика, най-вече чрез спазване на строги правила, и ефективното им допълване с благоразумна макроикономическа политика, развитите икономики ще повторят остри финансови неравновесия, финансови балони и финансови кризи. Особено важно е да се предотвратява възникването на финансови отклонения в чувствителни сфери на финансовата система, водещи до повсеместно значително нарастване на цените на финансовите активи и откъсването им от цените на реалните активи. Не е обосновано търсенето на решение само чрез възлагане на надежди върху макропруденциалната политика без отчитане на ролята на паричната и фискалната политика.

### **ЛИТЕРАТУРА:**

- [1] Benigno, P., L.Paciello. Monetary policy, doubts and asset prices. *Journal of Monetary Economics*. **64**, 2014.
- [2] Blot, C., P.Hubert, F.Labondance. Monetary Policy and Asset price Bubbles. *EconomiX, Working Series*, 2018-5.
- [3] Jaccard, I. Asset pricing and the propagation of financial shocks. ECB, Working Paper Series. No 2150/May 2018.

- [4] Kohn, D. Monetary policy and asset prices. European Central Bank Colloquium, March, 2007.
- [5] Piazzesi, M., M.Schneider. Payments, Credit and Asset Prices. Stanford & NBER, 2018

**Свилен Горанов Тонев**

Шуменски университет „Епископ Константин Преславски“

E-mail: s.tonev@shu.bg





## RECORDING OF BUSINESS PROCESSES IN ENTERPRISE IN BULGARIA DURING XVII - XIX CENTURY\*

SLAVENA G. STOYANOVA

**ABSTRACT:** *According to the requirements of the legislation, the enterprise is a legal entity. As such, the enterprise is a holder of individual rights and obligations. The property character of the rights and obligations is accepted and expressed in monetary (value) measure. The existence of rights and obligations - their occurrence, amendment and redemption, necessitate their recognition. For the purposes of reporting, the ongoing processes that accompany an entity's activities should be recorded.*

**KEYWORDS:** *recording, business processes, written evidence*

**2010 Math. Subject Classification:** 91B26

## ЗАПИСВАНЕ НА ПРОТИЧАЩИТЕ СТОПАНСКИ ПРОЦЕСИ В ТЪРГОВСКИТЕ ПРЕДПРИЯТИЯТА В БЪЛГАРИЯ В ПЕРОДА XVII - XIX ВЕК†

СЛАВЕНА Г. СТОЯНОВА

### Въведение

Съобразно изискванията на законодателството, и по-конкретно Търговския закон, предприятието е юридическо лице. В качеството си на правен субект предприятието е носител на самостоятелни права и задължения, които са с имуществен

---

\* This paper is (partially) supported by Scientific Research Grant RD-08-79 of 30.01.2019

† Статията е частично финансирана по проект № РД-08-79/30.01.2019г.

характер. Имущественият характер на правата и задълженията се приема и изразява в паричен (стойностен) измерител. Наличието на права и задължения - тяхното възникване, изменение и погасяване, пораждаат необходимост от отчитане. За целите на отчетността протичащите процеси, съпътстващи дейността на предприятието, следва да бъдат записвани.

*Настоящото изследване представя отразяването на протичащите стопански процеси от гледна точка на отчетността. Фокус на изследването са начините на записване на възникналите стопанските операции в предприятия в България в периода XVII - XIX век.*

Записването на разнообразието от протичащи стопански процеси както за държавни, така и за частно-стопански нужди, се е появило на определен етап от развитието на обществото и постепенно се е усъвършенствало. Хипотезите за началото на отчетността, респективно счетоводството, се основават на разкрити археологически паметници и на съхранени исторически сведения.

Свидетелства за това как са записвани и какво е било съдържанието на записите, описващи настъпилите събития от стопанската дейност на търговците по нашите земи през различните векове са запазени и до днес. Едни от най-старите запазени писмени свидетелства са кондиките<sup>‡</sup> или още известни

---

<sup>‡</sup> Кондиките са книги, водени от църковни и училищни общини, занаятчийски еснафи (сдружения) и отделни търговци. Те съдържат ценни сведения за стопанската история, за църковната борба и въобще за развитието на българското общество. Най-старият документ в Народна библиотека "Иван Вазов" гр. Пловдив е Кондиката на Пловдивския абаджийски еснаф (шивашко сдружение). Кондиката се състои от три книги, писани с различни почерци на гръцки език и обхваща периода 1685 г. – 1857 г. Тя се явява една от първите кондики, запазени до наши дни. Абаджийският еснаф в Пловдив е бил голямо и икономическо мощно търговско сдружение, съществуващо близо три

като летописни книги. Кондиките са водени от първомайстор (игит башия), а в отделни случаи от специално натоварено лице. Основно в тях е било описвано състоянието на касата (състояние и изменение на паричните средства) на еснафа [4]. Отчетността в посочените регистри се е водила с изключителна добросъвестност, с голямо доверие между хората, с чувство на отговорност към обществото и общото имущество на сдружението. В кондиките е намирало отражение и съставянето на запис на заповед, като дадените на заем пари са се описвали много подробно, чрез фиксиране не само на срока на изплащане, но и чрез посочване отделно на „главница“ и отделно на „лихва“ (Фигура 1).

Редица еснафски каси са организирани и влогонабиране. За запазване на интересите на вложителите е съдействало публичното вписване на вложената сума в тефтера на касата, а за опазване на общите интереси на еснафските средства и тяхното целесъобразно изразходване – публичният отчет на първомайстора, съответно на касиера пред лонджата (общото събрание на членовете на еснафа).

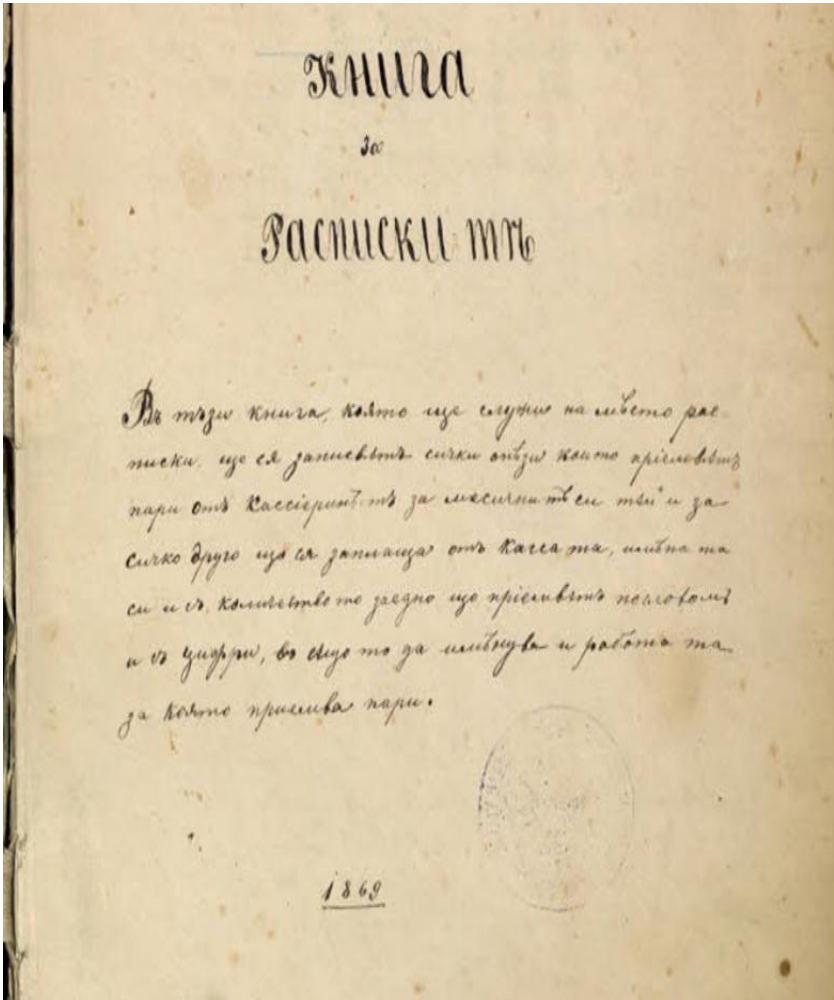
---

века. В него участват абаджии от гръцки и български произход. Поради национално-църковни борби между българи и гърци през 1857 г. еснафът се разделя на две отделни сдружения - българско и гръцко. „Кондиката на Пловдивския абаджийски еснаф“ е открита от д-р Александър Пеев през 1929 г. в дома на стар пловдивски абаджия и подарена на библиотеката. В 1931 г. материалите се публикуват, като преписът на гръцки език е направен от Миртилос Апостолидис, а преводът на български – от Александър Пеев. Кондиката на Пловдивския абаджийски еснаф има голяма научна стойност, представляваща интерес при проучвания от икономически, социален и фолклорен характер.

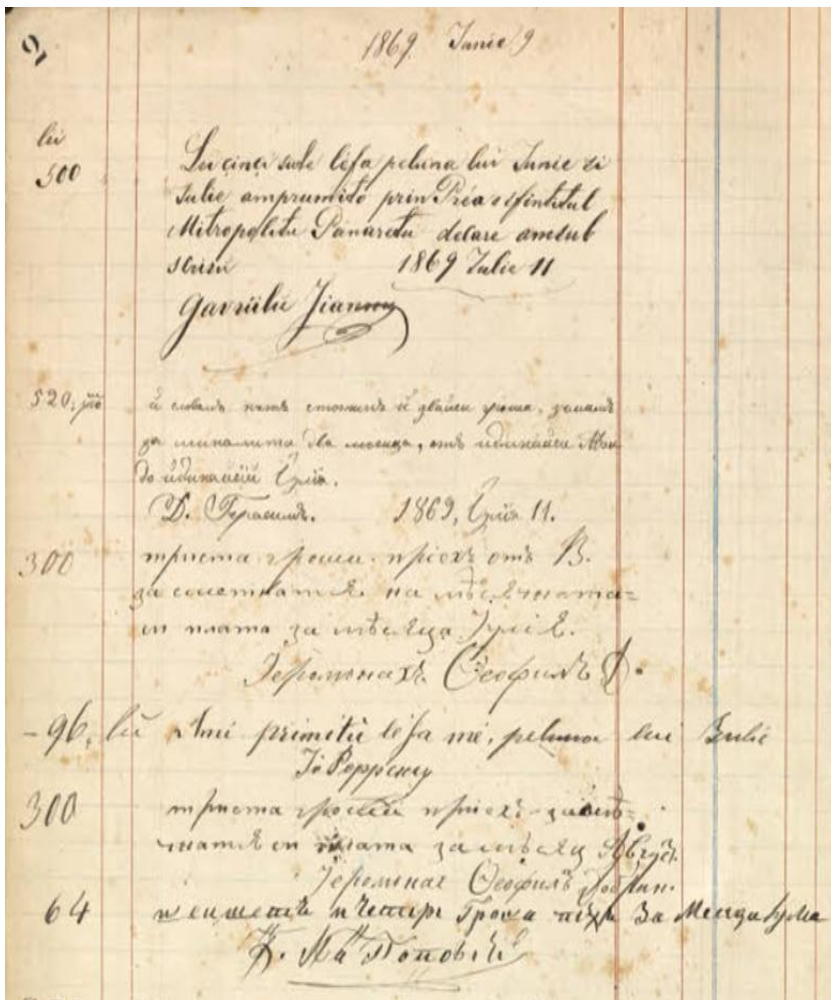
№ 1  
 Г-нъ Андрей Хаджи Димитровъ  
 Като не можя да си заплати за  
 писа на Църкович-тъ Кассиеръ отъ  
 пдмладесствъ Леръ, М. съ лихвъта  
 заедно, после не можя да полже и  
 достоенъ поръчникъ, то остана ми  
 ветхичъ Записъ, и издаде само 24  
 гуръ-тъ да се заплати подиръ  
 121 денъ. Издаде Записъ, че ако  
 не исплати паръ-тъ на речева то  
 ваде, то ще се задлъжава да испла-  
 ти и разсичъ-тъ на нѣчи деловни,  
 ко то испроводи обцка-та до Уста-  
 мена да го дери.  
 1872. Юлиа 28<sup>ч</sup>.

**Фигура 1. Из Кондика на общината в гр. Копривщица[7]**

За водена отчетност по българските земи в изследвания период говорят и други съхранени писмени свидетелства, а именно тефтерите на дребни търговци, занаятчии, лихвари и други, както и запазените кондики на църкви и манастири. Обхвата на записите е разширен, като освен за паричните средства, сведения се откриват и за църковните книги, за църковни вещи – движимо имущество и богослужбени съдове, както и други данни. Налице е по-усъвършенствана система за отчитане на стопанските факти и стопанските операции от търговците, лихварите, занаятчиите, събирачите на държавни данъци, еснафските организации, църквите, манастирите.



Фигура 2. Из Книга за разписките на българската църква и училище „Св.св. Кирил и Методий“ в Букурещ[8]



Фигура 3. Из Книга за разписките на българската църква и училище „Св.св. Кирил и Методий“ в Букурещ [8]

1876 Грехи 22. Дорди

|          |             |                 |                |       |
|----------|-------------|-----------------|----------------|-------|
| Грехи 22 | Владимирова | Отъ Заурхарманъ | 88             |       |
| " "      | "           | " Генералъ "    | 364            |       |
| " "      | "           | " Алабкеев      | 216            |       |
| " 28     | Отъ 22      | буки № 20/27    | 492            |       |
| " 27     | Отъ Татаръ  | Металика        | 500            |       |
| " "      | "           | Камиле          | 15             | 1685  |
| 1876     | "           | Отъ рѣсени      | 112            |       |
| Грехи 1  | "           | Отъ Татаръ      | 90             |       |
| " 2      | "           | " Камиле        | 60             |       |
| " "      | "           | Отъ рѣсени      | 33             |       |
| " "      | "           | Отъ Татаръ      | <del>274</del> | 32210 |
| " 7      | Отъ Татаръ  | Металика        | 270            |       |
| " "      | "           | Камиле          | 45             |       |

**Фигура 4. Из Кондика на абаджийския еснаф в гр. Добрич [9]**

Усъвършенстването на отчетността се дължи и на публикуването на ръководства по счетоводство на гръцки език. Освен състоянието на паричните си средства търговците отразяват в тефтерите си изпратените стоки и получените за тях

пари, както и откриват партии на други лица – предимно доставчици. Формата на откриваната партия е била двустранна - лявата „да дава“ (има да дава), дясната – „да взема“ (да приема, има да взема). По подобен начин е била организирана отчетността на касите – вземанията на касата са отразявани в колона „да дава“, а задълженията – в колона „да зема“.

Запазените в различни краища на България архиви, включващи и тефтери на различни търговци, търгували както в пределите на българските земи, така и извън тях<sup>§</sup>, дават възможност да се установи какво е било отчитано, как и кога е било отчитано, какви са били взаимоотношенията между отделните лица, между лицата и властта, как са уреждани взаимоотношенията, как и при какви условия са били давани пари на заем и т.н. Всички операции търговците описвали подробно и аргументирано. При уреждане на спорните въпроси, въз основа на обичайното право, между търговците основно се е ползвал арбитраж. Доказателство за това са редица запазени арбитражни решения, взети на база обстойна проверка на търговски книги, сметки, полици, задължителни писма и други отчетни документи. За арбитри, според изследователите на архивни документи, са избирани преди всичко компетентни и влиятелни търговци, които сами са водили значително усъвършенствано счетоводно отчитане на дейността си.

От гледна точка на отчетността засягаща търговията, следва да отбележим значимостта на водените приходо-разходни книги, които са известни като масарифтефтери. Изследователи

---

<sup>§</sup> Извън страната търговците търгували по редица пътища с италианските републики, с Дубровник, със западни държави. Благодарение на обществените контакти търговците се пренесли в страната новостите в търговската практика – нови образци на стоки, нови (за времето си) понятия за търговска техника и чест, нови схващания за граждански права и свободи, нови обичаи и културни ценности. Последните са заслуга на католическите монаси българи – чипровските монаси, получили образованието си в Италия.



като Н.Тодоров, В.Мутафчиева, А.Велков и други, чиито разработки обхващат визирания период, посочват, че централната власт на Османската империя е поддържала много строга и ефективна за времето си финансова отчетност [4]. Отчетност на извършваната дейност са водили и търговците. В откриваните от тях регистри са намирали отражение всички партиди (сметки), свързани с отчитане на отделни обекти на отчитане – каса, вид закупена стока, име на съответен контрагент (доставчик или купувач). Изходната информация за извършване на записите в регистър „Главна книга“ се е вземала от задължително водения по онова време друг регистър – регистър - мемориал или дневник. В него, в хронологичен ред, са записвани всички стопански операции, извършени през деня, след което информацията е била пренасяна в Главната книга, наричана още „маestro“. През разглеждания период документирането на операциите на търговците се е извършвало в търговски книги – регистри, много от които са запазени и до днес.

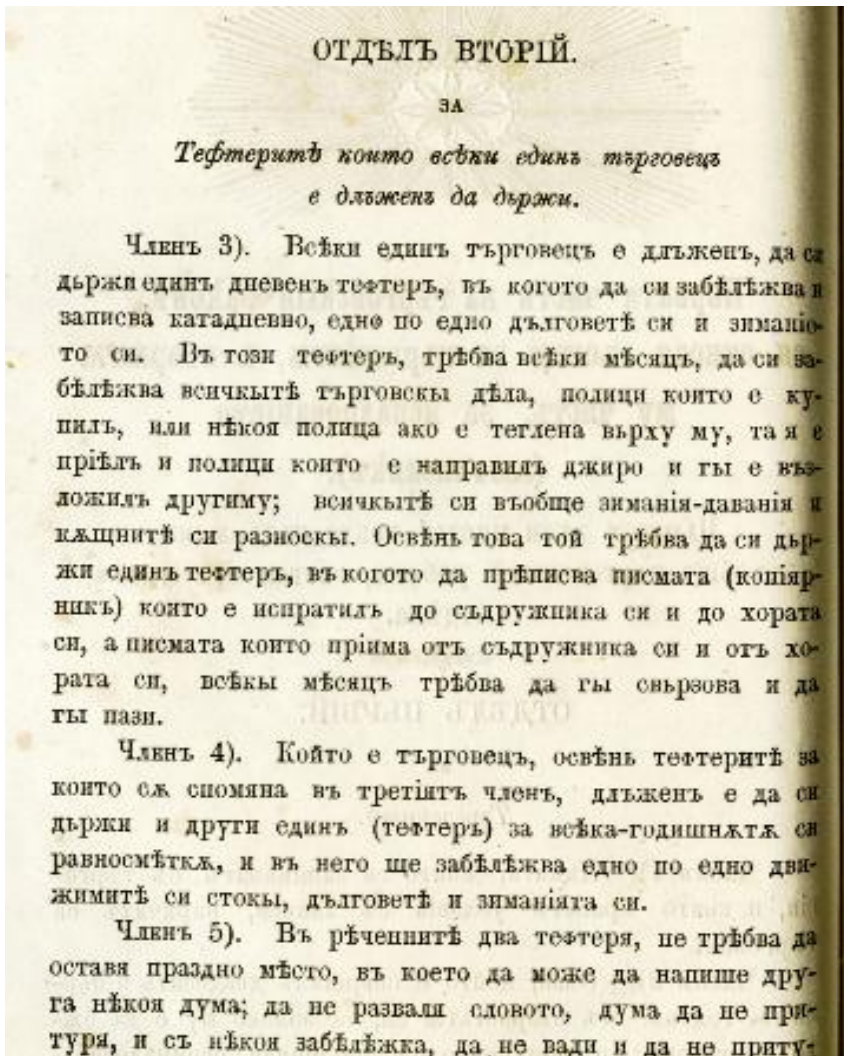
Откритото в някои от водените регистри в началото на XIXв. зачертаване на определена вписана информация се определя от някои автори за грешка при описване, която се е поправяла чрез зачертаване с една или две черти. Според нас зачертаването може да бъде прието като отпадане на задължение или вземане, вписано по съответната партида. Основание за това наше твърдение е твърде честото срещане на зачертаване (с една или две плътни кръстосани линии) в определен регистър или регистри от разглеждания период, което приемаме, не е поради незнание, респективно допускане на грешка/и на съответното лице, натоварено с вписване на протеклите стопански операции в регистрите. Грешки при вписване на информация са допускани, но не би следвало да имат така изразен явен и масов характер. Отстраняването на допуснатата грешка/и, чрез коректурен способ (способ на зачертаването) се прилага, когато воденето на счетоводството (сметководството) е ръчно и допуснатата грешка/и е във вториен счетоводен документ и/или регистър. Сгрешените

данни са от качествен характер, а не от количествено-стойностен. Считаме, че посочените до тук аргументи потвърждават нашата теза, че зачертаването в регистрите се е ползвало по-скоро за отразяване на отписване на възникнало преди това вземане или задължение, макар да не изключваме възможността способът зачертаване да се е ползвал за изправяне на допуснатата грешка. Последното обаче не би следвало да се прилага масово, тъй като в такъв случай говори за недостатъчна подготвеност на лицето, натоварено да води отчетността на предприятието.

Стриктното водене на отчетност, особено през XIX век, свързваме и с действащата нормативна уредба, и по-конкретно Търговски закон. В тази връзка, следва да се отбележи, че в Царски търговски законник, частта Търговски закон [5]\*\*, е отделено специално внимание на книгите (тефтерите), които всеки един търговец е бил длъжен да води (да държи). В подкрепа на посоченото представяме тази част от Търговския закон, в която е описано колко и какви трябва да бъдат книгите (тефтерите), които следва да води (държи) всеки търговец (Фигура 5 и Фигура 6).

---

\*\* Според Д. Спасов Турският търговски закон представлява почти буквален превод на френския търговски закон и урежда материята на водене на търговските книги.



Фигура 5. Из Царски търговски законник, част Търговски закон [5]

ря по краищата на теѣтерѣтъ малко или много рѣчи. На свѣршияка на всѣкъ година, търговеца ще си занесе дневната книга на търговското сѣдилище, дѣто прѣдѣ присутствието му, единъ особень чиновникъ отъ сѣдилището, ще подпише рѣченната [дневна] книга; обаче рѣченниятъ чиновникъ подъ никакъвъ прѣдлогъ, не трѣбва да прочита ни една думка отъ книгата му. Прѣди да си запише нищо въ тѣзи книга, единъ особень чиновникъ пакъ отъ търговското сѣдилище, ще натура броеветѣ на страницитѣ я, и отъ долу като забѣлѣжи отъ колко страници е книгата, ще си и подпише.

Членъ 6). Търговцитѣ не трѣбва да си уповаватъ само на потребнитѣ узаконенія записани въ теѣтеритѣ имъ, които сѣ длѣжни да държатъ, нѣ тѣ ако си ги държатъ нередовно и неправилно, когато се случи да бѣдѣтъ на сѣдѣ, такъва несъобразни съ правилата теѣтери, ще се считатъ за нередовни.

Членъ 7). Когато се сѣдѣтъ търговцитѣ, не се заповѣдва да си донасятъ теѣтеритѣ, обаче когато се раздѣли дружество или наслѣдие, или се появи нѣкое испаднованіе, тогава потребнитѣ теѣтери, искатъ се официално отъ търговското сѣдилище.

Членъ 8). Търговскитѣ теѣтери които сѣ нарѣдени спорядъ горѣрѣченитѣ правила, ще се приматъ за доказателство и фактъ въ распри, които се появава мѣжду търговцитѣ.

Членъ 9). Когато се разгѣжда една давія, за да бы се извадилъ на явѣ прѣдметътъ за когото е распрята, търговското сѣдилище, официално ще порѣчи да се донесѣтъ търговскитѣ теѣтери, за да се прѣгѣда само прѣдмета, за когото е давіята,

Фигура 6. Из Царски търговски законник, част Търговски закон (продължение) [5]

Видно от представеното (в горните две фигури), това са:

- Дневен тефтер, или още Дневник за хронологическите записвания (сегашно наименование), в който всекидневно се отбелязват възникналите задължения и вземания;
- Копирник - Копирна книга (Книга за писмата) или към днешна дата Дневник за входяща/ изходяща кореспонденция, служещ за вписване на писмата, които даденият търговец е изпратил и/или получил от своите съдружници и/или хората си, като задължително е било тези писма да бъдат съхранявани (пазени);
- Книга за годишна равностетка, в която търговецът следва да вписва „движимите си стоки, дълговете и вземанията си [5]“.

Книгите (регистрите) които е трябвало да бъдат водени от всеки търговец, са имали, както имат и сега, важна роля в отчетния процес. Освен за регистриране на протеклите стопански процеси в предприятието на търговеца, водените книги имат своето значение и доказателствена сила при възникване на спор между търговци.

Описание за броя, вида, съдържанието, начина и сроковете на съхранение на търговските книги има и в приетия през 1897г. Търговски закон, Глава четвърта, чл.31 до чл. 44 [6]. Във визираната нормативна уредба се посочва, че:

- Всеки търговец е длъжен да води непременно следните три вида книги: дневник (journal), книга за инвентарите и равностетките, и книга за търговската кореспонденция;
- В дневника търговецът се задължава да вписва ежедневно всичките си търговски сделки и договори, акцепти и джира на търговски записи и въобще да отбелязва (забелязва) всичко, каквото той, под каквато и да е титла, приема или изразходва, а така

също и да отбелязва(забелязва) в края на всеки месец домашните си разноски;

- В писанията (вписванията) не бива да се оставят празни места. Също така, забранени са всякакви изтривания, зачерквания или прибавки в текста;
- Всеки търговец е длъжен, при започване на търговията си, да състави инвентар (опис) на всичките си недвижими имоти, вземанията и дълговете, количеството на личните пари и останалите си имоти, както и да обозначи стойността на отделните имоти, като при това състави и равностметка за отношението на актива към пасива. Този опис и равностметката трябва да се съставят всяка година;
- Ако търговецът притежава такъв склад, описването на който, по естеството на търговското предприятие не е възможно да става всяка година, то складът трябва да се описва всяка втора година;
- Описът и равностметката трябва да се впишат в особена за тая цел книга и да се подписват от търговеца. При събирателните и командитните дружества, посочените документи трябва да се подпишат от всичките лично отговорни съдружници. При съставяне на опис и равностметката, имотите и вземанията трябва да се обозначат по стойността им във времето на съставянето му. Съмнителните вземания трябва да се опишат по вероятната им стойност, а безнадеждните трябва да се отпишат;
- Всеки търговец е длъжен да записва по хронологически ред в особена книга всичките изпращани от него писма, а така също да съхранява всички отнасящи се до заведението му (предприятието му) писма;

- Книгите, воденето на които е задължително за търговците, трябва да бъдат провървени (подвързани, прошнуровани) и снабдени с текущи числа на страниците и краищата на връвта да са запечатани с печата на надлежния нотариус или околийския съдия. На последната страница на тези книги съдията, със собственоръчния си подпис, удостоверява числото на листовите и страниците на книгите и скрепя това с удостоверение с печата на съда;
- За регистрирането на търговските книги (задължителни и спомагателни) се взема такса;
- С изключение на книгите за копиите - книга за копиране на търговската кореспонденция, другите задължително водени търговски книги следва в края на всяка година да се представят на надлежния нотариус или околийски съдия за сключване и преподписване, което се е извършвало по определен формат, а именно:

Днес, на ..(дата).. ..... год., ми се представи настоящата търговска книга (дневник, инвентар и пр.) на търговеца ..... и се утвърди от мене като засвидетелствана.

Подпис и печат на нотариуса или околийския съдия.

- За визиране (заверка) на търговските книги се взема такса;
- При всеки нотариус и/или околийски съдия трябва да се води особен регистър, в който да се отбелязват (забелязват) имената на търговците, които са представили книгите си, обозначението на книгите и числото на листовите. Същият ред се прилага (държи)

и по отношение на предвиденото сключване (регистрация) и засвидетелстване (заверка) на търговските книги;

- Търговците са длъжни да пазят търговските си книги в продължение на десет години, като се счита от последното вписване. Същото важи и за търговските писма, инвентари и равнoсметки;
- Редовно водените книги на търговец служат за доказателство в спорове, произхождащи от търговски сделки;
- Доказателствената сила на търговските книги не се променя (изменя), ако те се водят от помощниците на търговеца;
- Представянето на търговските книги в целия им обем може да се постанови(изиска) от съда по дела: за наследство, за общ имот, за разделяне на съдружески имот и в случай на несъстоятелност.

Прави впечатление, че в Търговския закон от 1897 г., в описателната част на съдържанието на водените книги, освен отразяване на протеклите събития (стопански операции) със съответните им стойности, се съдържа и елемент на последващо оценяване, което от гледна точка на счетоводната отчетност е с особена значимост. В потвърждение цитираме чл. 35 от посочения закон: „При съставяне на описа и равнoсметката, имотите и вземанията трябва да се обозначат по стойността им в време на съставянето му. Съмнителните вземания трябва да се опишат по вероятната им стойност, а безнадеждните трябва да се отпишат“ [6]. Друг елемент, който според нас е от особена значимост за гарантиране на достоверността на създаваните документи и документооборот през изследвания период, е включеното на изискване за прошнуроването на книгите. По този начин, според нас, се е осигурявала надеждност на информацията и достоверност на свързането на попълнените листа в



регистрите, като така се е намалявал риска от последващо манипулиране на записите. Надлежно и редовно водените търговски книги са могли да служат за доказателство при възникнали спорове, произхождащи от търговски сделки, т.е. имали са доказателствена стойност.

Прегледът на развитието на записванията на стопанските операции у търговеца в периода XVII - XIX век, без да претендира за изчерпателност, дава възможност да обобщим: предмет на отчитане, т.е. онова, за което се водят сметки, са били най-различни дейности – търговия, занаятчийство, сарафлък<sup>††</sup>, църковни и училищни разходи, откупуване и събиране на данъци, къщни разходи, предприемаческа дейност и други подобни дейности. В много от достигналите до нас писмени свидетелства е посочено, че за обектите, които са отчитани следва да се откриват партии или сметки. Вземанията от длъжниците и получените от тях суми са водени разделно, на две страници, като в ляво обикновено са записвани вземанията от длъжниците, а в дясно – получените от тях суми, или получените суми под форма на заеми от други лица. Търговците са водели стриктна отчетност, съобразявайки се с действащите закони. Водели са необходимите книги и регистри, завеждали са и са приключвали счетоводните сметки, съобразно възприетия подход.

#### ЛИТЕРАТУРА:

- [1] Бонев, Ж., С. Дурин. Речник на счетоводните термини. – С., Делова седмица, 2000.
- [2] Буров, С. и др. Съвременен тълковен речник на българския език – С., Габеров, 2000.
- [3] Владимиров, И. Търговско право. -С., Ромина, 2006.

---

<sup>††</sup> Сараф - човек, който се занимава с размяна, обмяна на пари, от което печели.

- [4] Спасов, Д. Счетоводството по българските земи. – Свищов, СА „Д. А. Ценов“, 2000.
- [5] Царски търговски законник, преведен от турски от Ст. Д. Попов, Издание Русчук, книгопечатница на Дунавска област, 1866.
- [6] Търговски закон от 1897г, утвърден с Указ № 93 от 18 май 1897г., обн. ДВ, бр.114 от 1897г ., отменен с чл. 1 от Указ № 490 за отменяване на Търговския закон и на Закона за дружества с ограничена отговорност - изв. бр. 78 от 1951г.
- [7] Кондика на общината в гр. Копривщица, Национална библиотека „Св. св. Кирил и Методий, Дигитална библиотека, [www.nationallibrary.bg/wp/?page\\_id=294](http://www.nationallibrary.bg/wp/?page_id=294)
- [8] Книга за разписките на българската църква и училище „Св. св. Кирил и Методий“ в Букурещ, Национална библиотека „Св. св. Кирил и Методий, Дигитална библиотека, [digital.nationallibrary.bg/DWWebClient/IntegrationSearch.aspx?DWSubSession=19638&v=1796](http://digital.nationallibrary.bg/DWWebClient/IntegrationSearch.aspx?DWSubSession=19638&v=1796)
- [9] Кондика на абаджийския еснаф в гр. Добрич, Национална библиотека „Св. св. Кирил и Методий, Дигитална библиотека, <http://digital.nationallibrary.bg/>

**Славена Господинова Стоянова**  
ШУ „Епископ Константин Преславски“  
E-mail: [slavena.stoyanova@shu.bg](mailto:slavena.stoyanova@shu.bg)

## REGARDING SOME ASPECTS OF INNOVATION MANAGEMENT\*

RUMYANA ST. ZLATEVA

**ABSTRACT:** *The publication addresses some aspects of innovation management such as innovation policies and program funding for implementation of innovations. The paper examines the importance of innovations for the competitiveness of the European economy as well as data on innovation activities. Emphasis is placed on policies and programs implemented by the European Union with the aim to support innovations development. Possible strategic decisions approaches in the area of innovations are presented.*

**KEYWORDS:** *innovation, innovation management, innovation, innovation policies, programs, innovation funding*

**2010 Math. Subject Classification:** 91B26

## ОТНОСНО НЯКОИ АСПЕКТИ НА УПРАВЛЕНИЕТО НА ИНОВАЦИИТЕ†

РУМЯНА СТ. ЗЛАТЕВА

**АБСТРАКТ:** *Публикацията засяга някои аспекти на управлението на иновациите като иновационните политики и*

---

\* This paper is supported by the Scientific Research Grant Fund „Scientific researches of the „Bishop Konstantin Preslavski“ University of Shumen as per project № RD-08-79 / 30.01.2019. „Funding as an efficiency and growth factor“.

† Статията е финансирана от Фонд „Научни изследвания“ към Шуменски университет „Епископ Константин Преславски“ по проект № РД-08-79/30.01.2019г. „Финансирането като фактор на ефективността и растежа“.

*програмното финансиране за осъществяване на нововъведения. Разгледани са значението на иновациите за конкурентоспособността на европейската икономика и данни за иновационните дейности. Акцентирано е върху политики и програми, които Европейският съюз прилага за подпомагане на развитието на иновациите. Представени са възможни варианти за стратегически решения в областта на иновациите.*

**КЛЮЧОВИ ДУМИ:** *иновация, управление на иновациите, иновационна дейност, иновационни политики, програми, финансиране на иновациите*

Широко прието е, че иновациите са в основата на растежа и производителността. Тяхното икономическо въздействие значително нараства с глобализацията, водеща до драматично увеличаване на достъпа до информация, нови пазари и съответно по-голяма международна конкуренция.

Проучването на феномена „иновация“ и влиянието на иновационните дейности върху конкурентоспособността привлича вниманието на редица учени. През последните години върху иновациите се фокусират множество икономически изследвания поради факта, че на тях се гледа като един от дългосрочните фактори за развитие. Предпоставка за значимостта на темата е това, че иновационната дейност играе важна роля за поддържане на висока приспособимост към динамичните промени в силно конкурентната среда и за изграждане на конкурентоспособна икономика.

Обект на изследване в настоящата разработка са политиките и финансирането на иновациите в Европейския съюз и България в частност, в релация с резултати от иновационните дейности и стратегирането, програмирането и управлението проекти.

Предмет на проучване са аспекти, свързани с управлението на иновациите, регламентацията и възможностите, които се

осигуряват за развитие на конкурентоспособността на икономиката.

Целта е разкриване на организационно-управленските измерения на иновациите и иновационната дейност в Европейския съюз.

За постигане на целта са поставени за решаване следните по-важни изследователски задачи:

1. Да се изясни схващането за понятието „иновации“ и иновационна дейност.

2. Да се разкрият специфики в управлението на иновационния процес, свързани с програмирането и финансирането му.

3. Да се представят виждания на възможни варианти за стратегически решения в управлението на иновациите.

В началото на XX век започва да се говори за иновации, но темата придобива популярност към края му. За разбиране на съдържанието на понятието, и съответно за правилната му употреба и интерпретация, е важно да се уточни какво е иновация и какво не е иновация. В тази връзка някои изследователи правят разграничение с фирмената промяна и очертават границите на това, което се разбира като иновация [1]. Според тях иновация има при:

- коренни промени и усъвършенствания на оборудването;
- различия в характеристиките на продукта спрямо останалия асортимент;
- добавяне на качество към продукт, което води до промяна в цената;
- използването на маркетингови или организационни модели за създаване на нови процеси;
- фундаментално различен продукт;
- радикална промяна в част от използван от фирмата маркетингов подход - маркетингова иновация;
- ниво само на производител има продуктова иновация.

Една от дефинициите за иновация, дадена от Организацията за икономическо коопериране и развитие (OECD) и Европейската комисия (ЕК) в Директивата за събиране и интерпретиране на иновационната информация, определя иновацията като въвеждане на нов или значително усъвършенстван продукт (стока или услуга), или процес, нов маркетингов метод, или нов организационен метод в бизнес практиките, организация на работното място или външните връзки [2].

В специализираната литература се посочва, че независимо от разнообразните критерии и класификации, разглеждането на иновациите следва да се извършва от гледна точка на тяхната динамика и статика. Обръща се специално внимание, че в статичен аспект определянето на иновациите се концентрира върху резултатите от направеното нововъведение, а в динамичен се третира като процес с различни фази и участници от зараждането на идея до комерсиализацията ѝ.

Отдавна се разбира, че разработването и генерирането на политики, схващани като съвкупност от социални практики и дискурси, които подкрепят иновациите по подходящ начин е в основата на благосъстоянието. Това налага необходимостта от мерки за иновации, които да отразяват настъпващите промени и да предоставят подходящи политики, фокусирани върху иновациите. Политиките възникват в резултат на нуждата от обща позиция, координирано поведение и система от взаимодействия за разрешаване на проблемите в сферата на иновациите. Тяхната необходимост се определя от промените в социално-икономическия живот и е продиктувана от реалните нужди на обществото в търсенето на просперитет.

В политическите си действия, Европейската комисия споделя разбирането, че иновациите са от жизненоважно значение за европейската конкурентоспособност в световната икономика. В съответствие с това схващане в Европейския съюз (ЕС) се прилагат политики и програми, чиято цел е да подпомагат

развитието на иновациите, да увеличават инвестициите в научноизследователска и развойна дейност и да водят до по-доброто прилагане на научните изследвания в подобрени стоки, услуги или процеси за пазара.

Според данни на Европейската комисия промишлеността е от решаващо значение за конкурентоспособността на Европейския съюз, а иновациите са ключов фактор в това отношение. Промислеността представлява 80% от износа в Европа. Около 65% от инвестициите в научноизследователската и развойна дейност в частния сектор идват от производството. Следователно индустриалната модернизация в Европа е необходимо да бъде широкообхватна и да включва успешната комерсиализация на иновации на продукти и услуги, и индустриалната експлоатация на иновативни производствени технологии и иновативни бизнес модели [3].

Счита се, че добрите възможности за растеж се пораждат от осигуряването на нови продукти и услуги от технологични пробиви, нови процеси и бизнес модели, нетехнологични иновации и иновации в сектора на услугите. Последното съобщение за политиката (2014 г.) „За европейски индустриален ренесанс“ акцентира върху необходимостта Европа да се съсредоточи върху растежа и модернизацията след кризата. В него държавите от ЕС се приканват да признаят централното значение на индустрията за създаване на работни места и растеж [4].

В този контекст се определят приоритетите на Европейската комисия за иновациите:

- подкрепяне на развитието на иновациите в приоритетни области и в малките и средни предприятия (МСП), главно чрез „Хоризонт 2020“;
- насърчаване широката комерсиализация на иновациите в ЕС, включително обществените поръчки за иновации, проектирането на иновации, политиките, свързани с търсенето на

иновации, иновациите в публичния сектор и социалните иновации;

- разработване на секторни политики за модернизиране на индустриалната база на ЕС и ускоряване на пазарното усвояване на ключови стимулиращи технологии като иновации на работното място;

- следене на изпълнението на иновациите и усвояването на иновациите, за да идентифицира развитието, което изисква промени в политиката;

- подобряване на регулаторните условия за иновации с мерки за стартиране, предприемачество, достъп до финанси, дигитална трансформация, единен пазар, интелектуална собственост и стандарти;

- подкрепяне на развитието и сътрудничеството на клъстери за стимулиране на иновациите на МСП [4].

За ускоряване на модернизацията на индустрията на ЕС е необходимо усвояването на иновации в продуктите и услугите, използването на иновативни производствени технологии и въвеждането на нови бизнес модели. В този контекст Комисията разработва политики, които спомагат за ускоряване на широката комерсиализация на иновациите и участва в много дейности, подпомагащи иновациите в ЕС.

Поглед към иновационните политики на ЕС показва, че те са насочени към:

- социалните иновации, разбирани като нови идеи, които съответстват на социалните нужди, формират социални отношения и изграждат нови сътрудничества;

- дизайна в иновационните дейности, схващан като създаване на стойност, която допринася за конкурентоспособността, просперитета и благополучието в ЕС;

- иновационни политики от страна на търсенето, разглеждани като ускорители на усвояването на иновациите в обществото;



– иновациите в публичния сектор, играещи ключова икономическа роля като регулатор, доставчик на услуги и работодател;

– иновациите на работното място, възприемани като промяна в бизнес структурата, управлението на човешките ресурси, взаимоотношенията с клиенти и доставчици, или в самата работна среда [5].

За изпълнението на стратегическите цели за развитието на ЕС, на неговите политики и намерения, едно от основните средства, което се използва са програмите. Програмният подход се прилага, както на равнище ЕС, така и на национално и регионално равнище в държавите-членки. Насърчаването на комерсиализацията и усвояването на иновациите става основно чрез финансиране по програма „Хоризонт 2020“ и Европейските структурни и инвестиционни фондове (ЕСИФ).

Прегледът показва, че „Хоризонт 2020“ е най-голямата програма за научни изследвания и иновации в ЕС с близо 80 милиарда евро финансиране от ЕС за 7 години (2014 до 2020 г.), в допълнение към частните инвестиции, които тези пари привличат. Трите основни стълба на „Хоризонт 2020“ са:

– високи постижения в научната област, осигурявани чрез безвъзмездна помощ от Европейския съвет по научни изследвания за водещи учени и за стипендии за млади изследователи „Мария Склодовска-Кюри“;

– водещи позиции в промишлеността, гарантирани чрез подкрепа за европейската промишленост в области като ИКТ, нанотехнологии, усъвършенствани производствени технологии, роботика, биотехнологии и космос;

– обществени предизвикателства, справяне с тях с новаторски проекти в отговор на седемте обществени предизвикателства: здравеопазване; селско стопанство, морско дело и биоикономика; енергетика; транспорт; действия по климата, околна среда, ресурсна ефективност и суровини; мислещи общества; сигурност.

Има основания да се смята, че програмата осигурява пробиви и открития пренасяйки идеи от лабораториите към пазарите. Същевременно „Хоризонт 2020“ е финансовият инструмент за прилагане на „Съюз за иновации“, една от седемте водещи инициативи на равнище ЕС и в държавите от ЕС, от стратегията „Европа 2020“, насочена към осигуряване на глобалната конкурентоспособност на Европа.

Може да се твърди, че програмата, разглеждана като средство за стимулиране на икономическия растеж и създаване на работни места стои в основата на плана на ЕС за интелигентен, устойчив и приобщаващ растеж.

Разглеждането на научните изследвания като инвестиции в бъдещето, свързването им с иновациите, открояват „Хоризонт 2020“ като спомагача за развитие на науката, индустриалното лидерство и справяне с обществените предизвикателства. Наблюденията показват, че програмата е с опростена структура, която улеснява публичния и частния сектор да работят заедно и да се съсредоточат в по-бързото постигане на иновационни резултати [6].

Европейските структурни и инвестиционни фондове (ЕСИФ) отделят около 110 милиарда евро за иновационни дейности, информационни и комуникационни технологии (ИКТ), конкурентоспособност на малки предприятия и нисковъглеродна икономика. Те обхващат пет фонда: Европейски фонд за регионално развитие, Европейски социален фонд, Кохезионен фонд, Европейски земеделски фонд за развитие на селските райони и Европейски фонд за морско дело и рибарство.

Средствата по всички фондове се управляват от държавите-членки на ЕС посредством споразумения за партньорство. Преди да получи финансиране от ЕСИФ всяка държава подготвя споразумение в сътрудничество с Европейската комисия, в което се посочва начинът на използване на средствата по фондовете за текущия период на финансиране 2014 г. – 2020 г. Въз основа на споразуменията за партньорство се разработват инвестиционни

програми, чрез които финансирането се насочва към регионите и проектите в съответните области на политиката. Този процес позволява концентриране на инвестиции върху сравнителните предимства.

Няколко са ключовите области, за които се осигурява критична маса от инвестиции:

- заетост, растеж и инвестиции;
- цифров единен пазар;
- енергиен съюз и климат;
- вътрешен пазар;
- икономически и паричен съюз;
- правосъдие и основни права;
- миграция.

Фондовете създават възможности за стимулиране на интелигентната специализация не само преди финансирането на иновационни дейности, но и като ръководна стратегия за публични инвестиции и разработване на политики на регионално ниво. Насърчаване на интелигентната специализация води до улеснено сътрудничеството между регионалните власти и предприятията, което им позволява да обменят информация за възможностите за сътрудничество в цяла Европа [7].

Европейският фонд за стратегически инвестиции (ЕФСИ) е един от трите стълба на Инвестиционния план за Европа и цели преодоляването на текущите пазарни провали чрез отстраняване на пазарните пропуски и мобилизиране на частни инвестиции. Той служи за финансиране на стратегически инвестиции в ключови области като инфраструктура, изследвания и иновации, образование, възобновяема енергия и енергийна ефективност, както и рисково финансиране за малки и средни предприятия.

От своя страна инвестиционният план за Европа (Планът Юнкер) е насочен към съживяване на инвестициите в стратегически проекти в цяла Европа, за да се гарантира, че парите достигат до реалната икономика. Причините поради които Европейският фонд за стратегически инвестиции ръководи

Инвестиционния план се свързват с ускоряване на икономическото възстановяване и засилване на инвестициите и растежа в Европа.

ЕФСИ се управлява от Европейската инвестиционна банка (ЕИБ). Проектите, подкрепяни от ЕФСИ, се реализират съобразно цикъла за управление на проекти на ЕИБ. Кандидатите могат да са субекти от частния или публичния сектор, финансова институция, фонд, платформа или МСП.

За да се възползват максимално от ЕФСИ, за потенциалните бенефициенти е създаден хъб: Портал на Европа за инвестиционна подкрепа, който споделя добри практики, извлечени поуки и реални казуси по финансиране и управление на проектите.

Друга благоприятна възможност се дава на кандидатите чрез Европейския портал за инвестиционни проекти (ЕПИП), създаден по силата на инвестиционния план за Европа. ЕПИП е своеобразен онлайн пазар, където могат да се срещнат инвеститори и организатори на проекти в световен мащаб. Този прозрачен портал на жизнеспособни проекти има за цел да увеличи видимостта на кандидат-проектите и да привлече частни инвеститори, като предостави надеждна информация, която ще им помогне да идентифицират нови възможности за инвестиции. Прегледът на данните по сектори показва наличието на 472 проекта в сферата на икономика на знанието и цифрова икономика, 104 в енергиен съюз, 132 в транспорта, 298 в социална инфраструктура и други, 133 ресурси и околна среда, 395 за финансиране на МСП и дружества със средна пазарна капитализация [8].

Данните показват, че малките и средните предприятия представляват над 99% от предприятията в ЕС, така че подкрепата за техния растеж и иновации е с изключителна важност. Въпреки работата на Европейската комисия за укрепване на средата за финансиране на малкия бизнес в Европа, един от най-важните проблеми, пред които са изправени МСП е

трудността им при достъпа до финанси. В тази посока Комисията работи с финансовите институции за подобряване на финансирането, достъпно за МСП за стимулиране на предоставянето на заеми и рисков капитал чрез финансови инструменти. Същевременно страните от ЕС се поощряват да споделят добри политики за улесняване на достъпа до финанси, която им позволява да се възползват от опита на другите.

При това следва да се отбележи, че средствата по програмите за финансиране от ЕС по правило не се предоставят като пряко финансиране. Помощта се насочва чрез местни, регионални или национални власти, или чрез финансови посредници като банки и организации за рисков капитал, които осигуряват финансиране чрез финансови инструменти. Директната помощ е достъпна само за проекти, които конкретно допринасят за изпълнението на програма или политика на ЕС [9].

Единствената по рода си инициатива на ЕС, която насърчава иновациите в Европа като обединява стопанска дейност, образование и изследвания с цел представяне на решения за неотложни глобални проблеми, заслужава особено внимание.

Европейският институт за иновации и технологии (EIT) е орган, създаден от Европейския съюз през 2008 г., който цели да увеличава възможностите на Европа в областта на иновациите. EIT е част от „Хоризонт 2020“. Институтът подкрепя развитието на динамични, дългосрочни общоевропейски партньорства сред водещи компании, изследователски лаборатории и предприятия, или така наречените „общности за иновации“, като всяка от тях си поставя за цел да представи решения за конкретен глобален проблем - от изменението на климата и устойчивата енергия до здравословния живот и храна.

Прегледът на дейността на EIT показва, че той обединява повече от 1000 партньори като дава възможност на новаторите и предприемачите в Европа да превърнат най-добрите си идеи в продукти, услуги, работни места и растеж. Така Институтът

изпълнява мисията си, свързана със създаване на работни места и осигуряване на възможности за устойчив икономически растеж в Европа.

ЕИТ развива дейностите си в областта на иновациите и предприемачеството: образователни курсове, които съчетават технически и предприемачески умения, персонализирани услуги за създаване и стимулиране на стопанска дейност и изследователски проекти, основани на иновации. Несъмнено това води до навлизането на нови идеи и решения на пазара и ражда иновации. Данните показват, че към август 2019 г.:

- функционират осем динамични общности за иновации;
- създадени са над петдесет центъра за иновации в цяла Европа;
- подкрепени са над две хиляди стартиращи и разрастващи се предприятия;
- привлечени са милиард и половина евро външен капитал от подкрепяните стопански инициативи;
- новосъздадени са над шест хиляди и сто работни места;
- разработени са около деветстотин нови продукта и услуги [10].

Иновациите се превръщат в крайъгълния камък и на съвременната българска икономика с членството на страната ни в ЕС. Качеството на предлаганите продукти и услуги става зависимо от стандартите на ЕС. Единственият адекватен отговор на тези променящи се условия е изграждането на иновативна икономика, основана на знанието. Новото знание и технологиите се разглеждат като източник на висока добавена стойност и по-добро качество на живот. В резултат се обуславя необходимостта от провеждането на целенасочена, последователна и обезпечена с необходимото финансиране иновационна политика, която да рефлектира върху иновационна активност на бизнеса и да проявява потенциала му. Това води до разработването на Иновационната стратегия за интелигентна специализация на България 2014г.-2020г., която се основава на „процеса на

предприемаческо откритие“ за определяне на икономическите приоритети в рамките на научно-изследователските и иновационни дейности, с цел създаване на конкурентно предимство чрез развитие и съобразяване на собствените силни страни в научните изследвания с потребностите на индустрията.

Иновационната стратегия за интелигентна специализация е в съответствие със Стратегията на Съюза „Европа 2020“ за интелигентен, устойчив и приобщаващ растеж, както и в изпълнение на тематична цел 1, от чл. 9 на Регламент (РЕ) 1300/2013 г., свързана със засилване на научно-изследователската дейност, технологичното развитие и иновациите. Същевременно Стратегията е тематично предварително условие от Приложение XI на същия регламент, от изпълнението на което зависи отпускането на средствата по Оперативни програми „Иновации и конкурентоспособност“ и „Образование и наука за интелигентен растеж“.

Може да се твърди, че Стратегията се опитва да отговори на новите възможности и промени на пазара като се съсредоточават инвестиции в областите, осигуряващи увеличаване на добавената стойност на икономиката и нейната конкурентоспособност на международните пазари. На Иновационна стратегия за интелигентна специализация следва да се гледа като процес, който ще продължи през целия програмен период. Последната ѝ актуализация е приета от Министерския съвет през юли 2017 г. [11].

Очевидната връзка между иновациите и конкурентоспособността налага необходимостта от изследване на иновационната дейност в страната при прилагане на подходяща методика. Такова се извършва от Националният статистически институт (НСИ) всяка четна година, а наблюдаваният период включва три години. В методологията за изследването са възприети понятия и дефиниции, свързани с:

– иновацията, разбирана като прилагане на нов или значително усъвършенстван продукт или процес, нов

маркетингов метод, нов организационен метод в бизнес практиките, в организацията на работното място или във външни отношения. Посочва се, че иновациите се основават на резултатите от нови технологични разработки, нови комбинации от съществуващи технологии или на използването на знанията, придобити от предприятието;

– продуктовата иновация, разглеждана като реализиране на пазара на стока или услуга, която е нова или значително усъвършенствана по отношение на нейните характеристики или предназначение. Отбелязва се, че това включва значителни подобрения в техническите спецификации, компонентите и материалите, вградения софтуер, в удобството за използване от потребителите или в други функционални характеристики;

– процесовата иновация, схващана като прилагане на нов или значително усъвършенстван метод за производство или доставка. Подчертава се, че това включва значителни промени в техниките, оборудването и/или софтуера. Посочва се, че процесовите иновации могат да бъдат предназначени за намаляване на разходите за единица продукция при производството или доставката, за повишаване на качеството, или за производство или доставка на нови или значително усъвършенствани продукти;

– организационната иновация, отбелязана като нов организационен метод в бизнес практиките на предприятието (включително управление на знанието), в организацията на работното място или във външните отношения, който не е бил използван преди това от предприятието. Счита се, че тя трябва да бъде резултат от стратегически решения, взети от ръководството; изключват се сливания или придобивания, дори в случаите, когато са за първи път;

– маркетингова иновация, определяна като прилагане на нов маркетингов метод, включващ значителни промени в дизайна на продукта или опаковката, в позиционирането, популяризирането на продукта или в ценообразуването.



Дефинира се, че маркетинговите иновации са насочени към по-добро задоволяване на потребностите на клиентите, откриване на нови пазари, или ново позициониране на фирмения продукт на пазара, с цел увеличаване на продажбите на предприятието. Изтъква се, че не се включват сезонните, редовните и други рутинни промени в маркетинговите методи;

– иновационното сътрудничество, обозначено като активно участие в съвместни иновационни проекти, които се осъществяват заедно с други предприятия и организации. Конкретизирано е, че обикновеното наемане на работна сила, без активно участие в иновационните проекти, не представлява сътрудничество [12].

Независимо от многообразието, което забелязваме по отношение на определянето на видовете иновации, можем да обобщим, че всички дефиниции имат една обща черта и тя се свързва със съсредоточаване върху наличието на нещо ново и различно.

Комплексният характер на иновационната дейност и различните аспекти на иновативността предопределят част от трудностите при обективното ѝ измерване. За анализа и оценката на състоянието на европейските и националните параметри на иновативност има разработени методики, по които се осъществяват регулярни изследвания. В изследване на НСИ за иновационната дейност на предприятията в страната за 2014-2016г., се подчертава, че иновациите могат да бъдат разработени от иновативно предприятие или от друго предприятие. Обикновената препродажба на иновации, изцяло произведени и разработени от други предприятия, не се включва в иновационната дейност. Иновациите следва да бъдат нови за съответното предприятие. За продуктите иновации не е задължително те да бъдат нови за пазара (както и за процесовите иновации), както и не е задължително предприятието да бъде първото, което ги е внедрило [13].

Данните за посочения период показват, че 27,2% от предприятията в страната осъществяват иновационна дейност. От всички предприятия 19,8% реализират технологични иновации (продуктови, процесови, незавършена или преустановена иновационна дейност), а 17,3% внедряват нетехнологични иновации (организационни и маркетингови иновации). През разглеждания период 19,8% от всички предприятия посочват като основен техен пазар държави – членки на Европейския съюз, и асоциирани държави и в сравнение с предходното изследване на иновациите (2012 – 2014 г.) нарастването е с 1,3 пункта. При иновативните предприятия този дял е 22,9%, а при неинновативните – 18,7%. През периода 2014 – 2016 г. иновационната активност се увеличава с 1,1 пункта в сравнение с предходното изследване. Ръстът, който се наблюдава при всички видове иновации - продуктови, процесови, организационни и маркетингови е съответно с 1.9, 2.7, 2.1 и 0.3 пункта. Причините за тези резултати се свързват с необходимостта от отправяне на по-широк поглед и обзор на поредица от въпроси, включително такива относно възникването на идеи, реализацията им, организационната културата и недостига на природни ресурси.

През периода 2014 – 2016 г. 12,8% от предприятията реализират нови или значително усъвършенствани стоки или услуги (продуктови иновации) и техният оборот формира 24,4% от общия оборот за 2016 година. 65,2% от предприятията с продуктови иновации реализират иновационен продукт, който е нов за техния пазар, а 81,6% реализират стоки или услуги, които са нови само за тяхното предприятие. 6,0% от оборота в индустрията и услугите през 2016 г. се дължи на нови за предприятието или нови за пазара продукти. 2,7% от оборота на предприятията през 2016 г. е в резултат на нови не само за предприятието, а и за пазара продуктови иновации, докато 3,3% от оборота е в резултат на нови само за предприятието продукти.

Предвид показаните резултати, може да се твърди, че занаяпред значение за предприятията ще оказва своевременното

идентифициране на основните за тях фактори, определящи необходимостта от иновации като технологичния напредък, променящите се клиенти, засилената конкуренция и изменящата се бизнес среда.

През периода 11,9% от предприятията внедряват нови или значително усъвършенствани процеси (процесови иновации) в тяхното предприятие. 8,1% въвеждат нови или значително усъвършенствани производствени методи, 6,4% от предприятията внедряват нови или значително усъвършенствани спомагателни дейности и 3,4% - нови или значително усъвършенствани методи за снабдяване, доставка и разпространение на суровините, стоките и услугите. 12,9% от предприятията прилагат нови методи за организация на бизнес практиките, на работното място и на взаимоотношенията с други предприятия и организации, които преди това не са били използвани (организационни иновации). Най-често посочваните видове организационни иновации са прилагането на нови бизнес практики за организиране на работния процес (9,5%) и въвеждането на нови методи на организация на работата, свързани с разпределяне на отговорностите и вземането на решения (8,9%). Предвид гореизложеното, следва да се отбележи, че в тази сфера провеждането на изследвания и практиката могат да осигуряват за предприятията полезни инструменти и да очертават работещите подходи. За подобряване на резултатите много могат да допринесат постепенните подобрения, които също носят конкурентно предимство.

През разглеждания период 12,0% от предприятията въвеждат нови маркетингови концепции и стратегии (маркетингови иновации). Най-голям е дялът на предприятията (8,4%), прилагачи нови методи за реклама или техники за промоция на продукта, следвани от предприятията, които използват нови методи за ценообразуване на стоките и услугите (5,9%).

Иновационната активност за 2014 – 2016 г. е по-висока при предприятията, занимаващи се с индустрия (31,6%), отколкото при тези, предоставящи услуги (22,1%). Най-голям е дялът на иноваторите в групата на големите предприятия (250 и повече наети лица) – 81,9%. Оборътът на иновативните предприятия съставлява 59,8% от оборота на всички предприятия. В този контекст, може да се подчертае, че ако едно предприятие иска да е иновативно, всяка част от него следва да допринася активно за иновациите. Защото управлението на иновациите е много повече от провеждане на изследвания и създаване на стоки и услуги. Внимание следва да се обърне и на факта, че процесните иновации се копират по-трудно от продуктовете иновации и така осигуряват възможност за предприятията, които ги реализират, да получат по-дългосрочно конкурентно предимство.

Дялът на наетите лица в иновативните предприятия възлиза на 59,0% от наетите във всички предприятия. При 29,6% от всички предприятия през 2016 г. над една четвърт от наетите лица са с висше образование. При иновативните предприятия тази стойност е 41,8%, а при неиновативните – 25,1%. При това е важно е да се отбележи, че работните процеси в иновативните предприятия изискват от наетите лица способности да стартират като начало иновационния процес. Разбира се предприятията могат да си осигуряват това и чрез външни източници.

Икономическата дейност в индустрията, която има най-висок дял иновативни предприятия, е „Добив на метални руди“ (62,5%). В сектора на услугите на първо място е „Научноизследователската и развойна дейност (НИРД)“, в която всички предприятия са иновативни, тъй като НИРД е вид иновационна дейност. От предприятията с технологични иновации 20,9% осъществяват иновационно сътрудничество с други предприятия, научни организации и други партньори, като за големите предприятия (250 и повече наети лица) този дял е 35,8%. Публично финансиране в подкрепа на своята иновационна дейност получават 35,2% от всички технологични иноватори през

периода 2014 – 2016 година и дава основания да се смята, че играе важна роля за насърчаване на иновациите чрез фокусирането на инвестициите върху стимулиращите иновации.

Трябва да се посочи, че в съвременните условия предприятията, учредени под формата на кооперации, крият огромен потенциал за осъществяване на иновационни дейности. Извършваната от тях търговска дейност при взаимопомощ и сътрудничество за задоволяване на икономически, социални и културни интереси, прави от иновациите стратегически приоритет и ключов фактор за кооперативното развитие, наред с възможностите за прилагане на информационните и комуникационни технологии [14].

Управлението на структурните фондове и интелигентната специализация са концентрирани на национално равнище, с много ограничено участие на местните власти, посочва Докладът „Иновации.бг“ (2018). В него се изтъква, че патентната активност на българските изобретатели нараства като се удвоява броят както на патентите, така и на полезните модели, регистрирани от Патентното ведомство. При все това се отбелязва, че иновационната активност в страната остава преди всичко нискотехнологична. Ориентирана е главно към внедряването процесни иновации – новост за местния или националния пазар, както и към организационни и маркетингови иновации, основани преди всичко на „меки“ умения и в по-малка степен на ново технологично знание. Докладът посочва, че участието на частния сектор в иновационната икономика на България непрекъснато се подобрява, но липсата на компетентна и устойчива подкрепа от страна на държавния сектор все повече се превръща във възпиращ фактор. Заключение е, че се пропускат възможности и се изостава не само от развитите европейски икономики, но и от новите страни – членки на ЕС. Посочва се необходимостта при подготовката на стратегическата рамка за следващия програмен период в ЕС да се търсят и успешно да се прилагат механизми за подобрене [15].

Европейското табло за иновации е важен информационен източник, който предоставя сравнителен анализ на резултатите от иновациите в страни от ЕС, други европейски страни и регионални съседи. Таблото оценява относителните силни и слаби страни на националните иновационни системи и помага на страните да идентифицират областите, които трябва да адресират.

Данните на таблото за 2019 г. подчертават, че иновационните резултати на ЕС продължават да се подобряват. В сравнение с изминалата година, иновационните постижения се подобряват за 24 държави от ЕС и темпът на растеж на по-слабо представящите се страни в сравнение с по-добре развиващите се страни се ускорява. От 2011 г. насам средните показатели за иновации в ЕС са се увеличили с 8,8 %.

Резултатите показват, че ЕС не успява да догони Япония и Южна Корея и очакванията са разликата в резултатите да продължи да нараства в близките години. ЕС подобрява показателите си спрямо Австралия, Канада и Съединените щати. Китай е в процес на наваксване с ръст на иновациите два пъти по-висок от европейския. ЕС запазва преднината си пред Бразилия, Индия, Русия и Южна Африка.

Данните на таблото за 2019 г. разкриват, че в рамките на ЕС ефективността на иновациите се е увеличила в 25 държави от 2011 г. При това Швеция е лидер в областта на иновациите през 2019 г., следвана от Финландия, Дания и Холандия. Най-резултатни или с други думи, най-бързо растящите иноватори са Литва, Гърция, Латвия, Малта, Обединеното кралство, Естония и Нидерландия. Най-много са занижили показателите си Румъния и Словения. България и Румъния, чиито резултати са доста пониски от средното за ЕС са скромни иноватори. България е единствената страна от ЕС, която не регистрира напредък в областта на иновационния потенциал за последните седем години – резултат, който би могъл да изглежда оптимистично на фона на най-сериозния спад в рамките на Евросъюза, регистриран от

Румъния (31%), както и изоставането, отчетено за още 11 държави [16].

Сравнителният преглед на данните на Таблото, показва че България цели да премине от групата на „скромните“ към „умерените“ иноватори в рамките на програмния период 2014 - 2020 г. като достигне 50 % от средното равнище на иновативност за ЕС.

Внимание следва да се отдели и на Глобалният индекс за иновации (ГИ), който цели обхващането на многоизмерните аспекти на иновациите и предоставянето на инструменти, които могат да помогнат при разработването на политики за насърчаване на дългосрочен растеж, подобрена производителност и създаване на работни места. ГИ помага да се създаде среда, в която иновационните фактори се оценяват непрекъснато и се стреми към по-подробно разбиране на човешките аспекти на иновациите поради същественото им значение за разработването на политики, които спомагат за насърчаване на икономическото развитие и по-богати на иновации местни среди.

Всяка година ГИ представя тематичен компонент, който проследява глобалните иновации. В изданието за 2019 се анализира пейзажа на медицинските иновации от следващото десетилетие, разглеждайки как технологичните и нетехнологичните медицински иновации ще трансформират предоставянето на здравни грижи в световен мащаб. Също така се изследва ролята и динамиката на медицинските иновации, тъй като така се оформя бъдещето на здравеопазването и потенциалното влияние, което това може да окаже върху икономическия растеж.

ГИ предоставя ключов инструмент и богата база данни, която през 2019 г. обхваща 80 подробни показатели за 129 икономики и се превръща в една от водещите референции за измерване на иновационните резултати на икономиката.

Глобалният индекс на иновациите разчита на два под-индекса (под-сфери, под-фактори) – под-индекс за „иновации на

входа“ и под-индекс за „иновации на изхода“ – всеки изграден около ключови стълбове (сфери, фактори).

Петте входни стълба обхващат елементи от националната икономика, които дават възможност за иновативни дейности:

- институции;
- човешки капитал и научни изследвания;
- инфраструктура;
- съвършенство на пазара;
- бизнес усъвършенстване.

Два стълба на изхода отразяват действителни доказателства за постиженията в иновациите:

- научни резултати;
- творчески резултати.

ГII събира данни от повече от 30 източника, обхващащи голям спектър от иновационни двигатели и резултати, и привилегирова твърди данни пред качествените оценки.

В общото класиране на страните според Глобалния иновационен индекс през 2019 г. води Швейцария, следвана от Швеция, САЩ и Нидерландия. България се нарежда на 40-то място, при 37-то през 2018 г. Това класиране показва, че въпреки отиването на 3 места назад, страната ни заема място в първата половина на класацията на страните по глобална иновация. При все това, от страните-членки на ЕС, зад нас остават само Гърция (41), Хърватия (44) и Румъния (50) [17].

Интерес представлява виждането на изследователите от Глобалния институт McKinsey относно съживяването на иновациите в Европа, което те излагат като документ за дискусия. Докладът „Иновации в Европа: Промяна на играта за възстановяване на конкурентно предимство“ се фокусира върху начините, по които Европа би могла да се стреми да надгражда своите силни страни, а не да се опитва да играе догонване, като се има предвид, че е възпрепятствана от фрагментацията и липса на мащаб [18].



Авторите на доклада посочват, че европейските компании все още представляват една четвърт от общата индустриална научноизследователска и развойна дейност в света, но през последните години конкуренцията на американските компании, Китай и Южна Корея, поставя под въпрос способността на Европа да поддържа своя модел на растеж в дългосрочен план.

Изследователите от Глобалния институт McKinsey се опитват да добавят конкретна перспектива към многото продължаващи инициативи, както и към голям и нарастващ набор от изследвания за това как трябва да се променят иновационните политики в по-цифров контекст. Основната им идея е, че Европа трябва да дефинира свой собствен иновационен модел. Според тях, предлаганите начини могат да помогнат на Европа да се разшири, за да посрещне предизвикателствата на по-широко разпространените иновации и да надгради своите силни страни за постигане на мащаб.

Първият начин, който изследователите от Глобалния институт McKinsey предлагат е Европа да се възползва от своите индустриални мащаби. Те посочват, че Европа има мащаб в някои области, особено в автомобилния сектор. Основният път към по-големи иновации се крие в способността ѝ да се възползва от този мащаб. В някои сектори това вече се случва.

Например телекомуникационните оператори, доставчиците, производителите на автомобили и камиони и доставчиците в момента комбинират своите изследователски усилия, за да постигнат по-голям мащаб в достъпа на клиенти и данни за автомобилната индустрия.

Сред пътищата за насърчаване на иновациите и фокусирането на инвестициите върху стимулиращите иновации е възможността за възлагане на обществени поръчки, според авторите на Доклада. Посочва се, че публичният сектор може да играе голяма роля защото в европейските страни общественият сектор в момента дава около 2 трилиона евро за поръчки

годишно. Тя може да насочи повече от това към иновативни инициативи.

На следващо място, но не по значение, се посочва, че Европа може да преосмисли данните и достъпа на потребителите и стандартите. Общият регламент за защита на данните (GDPR) поставя Европа на картата по отношение на управлението на данните и защитата на поверителността. Европейският съюз може да надгради това и да се заукрепи позицията на Европа като водещ световен участник в управлението на данните.

Например, отбелязва се в Доклада, Европа може да има за цел да осигури достъп за иноваторите до хъбове от данни, които не притежават, и да създаде мащаб около общите стандарти. Една такава област може да бъде транспорта, с оглед на иновации около концепцията за интелигентни градове. Здравеопазването може да бъде друг сектор с цел да доведе до осезаеми ползи, като например повишена ефективност на лекарствата.

Европа вече се счита за водещ участник в управлението на данните и защитата на поверителността с Общия регламент за поверителност на данните за 2018 г. (GDPR) и законодателството за свободното движение на данни. Подобни инициативи могат не само да дадат на компаниите и научноизследователските институции достъп до анонимни данни, но също така да дадат възможност на гражданите да увеличат контрола върху това какви данни са взети и как могат или не могат да бъдат използвани, кога и от кого.

Една от възможностите, посочваща се от изследователите от Глобалния институт McKinsey, е Европа да компенсира разпокъсаността си с откритост и свързаност и да ги подчертае като алтернатива на мащаба, включително чрез промяна на имиграционните потоци с висока квалификация и свързване на местните екосистеми. Създаването на по-добри пътища за професионалисти от други страни и промяната на данъчното облагане би направил континента по-привлекателен за международните таланти, според тях.

И накрая, Европа би могла да се възползва от мащаба на световните фирми, които работят в Европа и в полза на континента. Независимо дали Европа успява да промени условията в своя полза в света с мащабни въпроси, тя би могла да гарантира, че получава максимално голяма стойност и ползи от големите неевропейски фирми.

Сред приоритетите на Европа, според Доклада, може да бъде да гарантирането пред гражданите ѝ предимствата на услугите, предоставяни от неевропейски компании и че тези компании създават повече базирани в Европа работни места, иновации, стойност за потребителите и данъчни приходи. За тази цел Европа би могла да се включи в идентифицирането на ключови предизвикателства, които пречат на компаниите да прехвърлят създаването на повече стойност към Европа и да реагира със съответните мерки или стимулиращи програми.

На базата на проведеното изследване могат да се направят някои изводи и препоръки, свързани с необходимостта от подобряване на управлението на иновациите като предпоставка за повишаване на конкурентоспособността, в следните направления:

1. Засилване ролята на ЕС при развитието на секторни стратегии и по-добро дефиниране на приоритетните сектори като се заложи на уникалност на иновационните продукти, съобразена с местни особености и традиции, и очакваните глобални тенденции.

2. Осъществяване на бързи и адекватни промени по отношение на управлението на човешките ресурси във високотехнологична икономика и подготовката им за новата икономика, основана на данни.

3. Осигуряване на улеснен достъп до финансиране със средства от европейски програми и фондове, засилване ролята на структурните и инвестиционни фондове, на фонда за стратегически инвестиции, за привличане на инвеститори.

4. Привличане на нови стратегически чуждестранни инвеститори.

5. Прилагане на иновационен мениджмънт, създаване на необходимата иновационна инфраструктура и поддържане на иновационна активност на различни нива.

В заключение, управлението на иновациите е изправено пред предизвикателството да интегрира в себе си множество аспекти свързани със стратегиране, програмиране, управление на хора и проекти. То може да се разглежда в контекста и на много направления, които се отнасят към различни функционални области, но поривът към новото и по-доброто не губи при това ценността си, защото винаги е стоял в основата на развитието. Адекватната и навременна реакция на динамичните промени, които външната и вътрешната среда поставят пред реализирането на иновационни процеси, изисква последователното прилагане на подхода на единство между наука, технология, производство и потребление

#### **ЛИТЕРАТУРА:**

- [1] Чиприянов, М. и др. Иновации и иновационни стратегии, Абагар, Велико Търново, 2015, стр. 137.
- [2] Oslo Manual, Guidelines for collecting and interpreting innovation data, 3<sup>rd</sup> edition, [https://www.tubitak.gov.tr/tubitak\\_content\\_files/BTYPD/kilavuzlar/Oslo\\_Manual\\_Third\\_Edition.pdf](https://www.tubitak.gov.tr/tubitak_content_files/BTYPD/kilavuzlar/Oslo_Manual_Third_Edition.pdf), последно посетен на 04.10.2019 г.
- [3] Европейска комисия, [https://ec.europa.eu/growth/industry/innovation\\_en](https://ec.europa.eu/growth/industry/innovation_en), последно посетен на 04.10.2019 г.
- [4] Европейска комисия, [https://ec.europa.eu/growth/industry/policy/renaissance\\_en](https://ec.europa.eu/growth/industry/policy/renaissance_en), последно посетен на 04.10.2019 г.

- [5] Европейска комисия,  
[https://ec.europa.eu/growth/industry/innovation/policy\\_en](https://ec.europa.eu/growth/industry/innovation/policy_en), последно посетен на 04.10.2019 г.
- [6] Програма „Хоризонт 2020“,  
<http://horizon2020.mon.bg/?go=page&pageId=24>, последно посетен на 04.10.2019 г.
- [7] Европейски структурни и инвестиционни фондове,  
[https://ec.europa.eu/info/funding-tenders/funding-opportunities/funding-programmes/overview-funding-programmes/european-structural-and-investment-funds\\_bg](https://ec.europa.eu/info/funding-tenders/funding-opportunities/funding-programmes/overview-funding-programmes/european-structural-and-investment-funds_bg), последно посетен на 04.10.2019 г.
- [8] Европейски фонд за стратегически инвестиции,  
[https://ec.europa.eu/commission/priorities/jobs-growth-and-investment/investment-plan-europe-juncker-plan/european-fund-strategic-investments-efsi\\_bg](https://ec.europa.eu/commission/priorities/jobs-growth-and-investment/investment-plan-europe-juncker-plan/european-fund-strategic-investments-efsi_bg), последно посетен на 04.10.2019 г.
- [9] Европейска комисия, [https://ec.europa.eu/growth/access-to-finance\\_en](https://ec.europa.eu/growth/access-to-finance_en), последно посетен на 04.10.2019 г.
- [10] Европейски институт за иновации и технологии,  
<https://eit.europa.eu/bg/in-your-language>, последно посетен на 10.10.2019 г.
- [11] Иновационна стратегия за интелигентна специализация на Република България 2014-2020 г.,  
<https://www.strategy.bg/StrategicDocuments/View.aspx?lang=bg-BG&Id=975>, последно посетен на 10.10.2019 г.
- [12] Национален статистически институт,  
<http://www.nsi.bg/bg/content/2710/%D0%B8%D0%BD%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D1%86%D0%B8%D0%BE%D0%BD%D0%BD%D0%B0-%D0%B4%D0%B5%D0%B9%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82>, последно посетен на 04.10.2019 г.
- [13] Национален статистически институт,  
[http://www.nsi.bg/sites/default/files/files/pressreleases/NIRD\\_Innovation2016\\_FB3CA2F.pdf](http://www.nsi.bg/sites/default/files/files/pressreleases/NIRD_Innovation2016_FB3CA2F.pdf), последно посетен на 04.10.2019 г.

- [14] Стоянова, С. Капиталови източници на кооперативния бизнес модел, УИ „Епископ Константин Преславски“, Шумен, 2019, с.130.
- [15] Доклад Иновации.бг (2018),  
<http://www.arcfund.net/arcartShowbg.php?id=18376>, последно посетен на 04.10.2019 г.
- [16] European innovation scoreboard 2019,  
[https://ec.europa.eu/growth/industry/innovation/facts-figures/scoreboards\\_en](https://ec.europa.eu/growth/industry/innovation/facts-figures/scoreboards_en), последно посетен на 04.10.2019 г.
- [17] Global Innovation Index 2019 – 12th Edition  
<https://www.globalinnovationindex.org/gii-2019-report> последно посетен на 01.11.2019 г.
- [18] McKinsey & Company, <https://www.mckinsey.com/featured-insights/innovation-and-growth/reviving-innovation-in-europe>  
последно посетен на 01.11.2019 г.

**Румяна Златева**

Шуменски университет „Епископ Константин Преславски“

E-mail: r.zlateva@shu.bg

## GROSS DOMESTIC PRODUCT AS A MEASURE OF NATIONAL WELL-BEING\*

ТРУФКА Р. ДИМИТРОВА, СВЕТОСЛАВА И. ДИМИТРОВА

**ABSTRACT:** *The gross domestic product is one of the most accurate indicators that give an idea of the change in economic activity and the level of economic activity and its economic well-being. The purpose of the article is to investigate and analyse the dynamics of the Gross Domestic Product in Bulgaria for the period 2007 - 2018, as a measure of the well-being of the nation and to reveal the prerequisites and the possible opportunities to achieve a high favourable status.*

**KEYWORDS:** *gross domestic product, national well-being, gross domestic product per capita*

**2010 Math. Subject Classification:** 91B26

## БРУТНИЯТ ВЪТРЕШЕН ПРОДУКТ КАТО ИЗМЕРИТЕЛ НА НАЦИОНАЛНОТО БЛАГОСЪСТОЯНИЕ†

ТРУФКА Р. ДИМИТРОВА, СВЕТОСЛАВА И. ДИМИТРОВА

Брутният вътрешен продукт е един от най-точните индикатори, който дава представа за промените в стопанската дейност и равнището на икономическа активност и нейното икономическо благосъстояние. Поради това БВП служи като основен измерител за промените в икономическия растеж, база за провеждане на определена правителствена икономическа политика в кратък и дълъг период, за действия на бизнеса. БВП

---

\* This paper is (partially) supported by Scientific Research Grant РД-08-79/30.01.2019 of Shumen University

† Статията е частично финансирана по проект № РД-08-9/30.01.2019

се използва и като показател за определяне икономическия потенциал на отделните страни, сравняване на тяхното икономическо развитие и изменението на икономическото благосъстояние. **Целта** на статията е да се изследва и анализира динамиката на брутният вътрешен продукт в България за периода 2007 – 2018 г., като измерител на благосъстоянието на нацията и да се разкрият предпоставките и възможностите за постигане на по-високо благосъстояние. Основните **методи** използвани при анализа на БВП и благосъстоянието са: метода на сравнението, на групировките, на детайлизацията, на абсолютни и относителни величини, индексния метод, графичния метод, методите за измерване скоростта на изменението, за определяне тенденцията и изследване на връзки и зависимости.

## **1 БВП - основен индикатор за икономическо развитие и благосъстояние**

В настоящия етап показателят брутен вътрешен продукт се формира въз основа на данните от системата на националните сметки (СНС). Установени са два стандарта, на които се базира функционирането на „националното счетоводство”. В световен мащаб основна е методиката, съставена от статистическата комисия на ООН. Там брутният вътрешен продукт се представя само чрез сборовете от трите подхода за изчисляването му, съответно производствен, доходен и разходен подход. Вторият стандарт се основа на СНС2008. За целите на статистиката в Европейския съюз, Евростат съставя „Европейски статистически сметки 2010”(ЕСС2010). Европейският стандарт е задължителен за всички страни, прилагащи правилата на Европейската статистическа служба от 1 октомври 2014г. Той определя показателя по следния начин: „Брутният вътрешен продукт по пазарни цени е крайният резултат от производствената дейност на резидентните производствени единици.”<sup>‡</sup> Икономическата

---

<sup>‡</sup> Европейски парламент, 2013



теория на благосъстоянието (Welfare Economics) представлява раздел от общата икономическа теория, в който основен проблем е анализът на увеличаване на благоденствието на членовете на обществото. Главна особеност на този клон е разбирането, че ресурсите и потребностите са зададени и поради тази причина е необходимо да се избере оптималното съчетание, при което ще бъдат постигнати максимални резултати и/или ефект.

Благосъстоянието е сложна икономическа категория, която показва връзката между условията на живот и степента на удовлетвореност на потребностите на индивидите, групите и обществото като цяло<sup>§</sup>. Това е възможността от задоволяване и развитие на системата от човешки потребности. В преобладаващата част от литературните източници, при дефинирането на благосъстоянието се поставя акцент върху достигнатата степен на задоволяване на осъзнатите нужди, като за нея се съди по комплекс от икономически предпоставки (доходи, потребление, условия на живот) и по субективни оценки за степента на удовлетвореност на реципиентите. Думата благосъстояние идва от английското well-being, благополучие, благоденствие – термин, който отразява нивото на социално-икономическото, физическото, психическото и духовното състояние на индивида или общността. Високото ниво се свързва с усещането за щастие, а ниското – с нещастие. Най-общо благосъстоянието се определя като позитивна качествена характеристика на живота на хората. То е положение на комфорт, здраве и щастие. От гледна точка на времето се разглежда като дългосрочно и краткосрочно.

Общественото благосъстояние е синоним на равнището на удовлетворението или на получаваната ползност от членовете на

---

<sup>§</sup> Йотова, Л. Благосъстоянието преди и след членството на България в Европейския съюз: между очакванията и реалностите. Годишник на УНСС, бр. 7/2008

обществото<sup>\*\*</sup>. Формално то може да бъде представено като функция от много променливи, най-главните от които са:

- общото количество на произведените стоки и услуги (Брутен Вътрешен Продукт или Доход);
- някаква мярка на начина, по който са разпределени стоките и услугите;
- някаква мярка на здравето на членовете на обществото;
- обемът на свободното време на общността;
- степента на замърсяване на околната среда;
- степента на политическа стабилност и др.

В последните години се предлагат нови методи за измерване на икономическото благосъстояние чрез конструиране на индекси: индекс за устойчиво икономическо благосъстояние, който включва показатели за потребление, инвестиции и държавни разходи, които допринасят за благосъстоянието, но изключва такива, които го влошават (военни разходи, деградация на околната среда, амортизация на природния капитал); индекс за човешко развитие; индекс за действителен прогрес.

Най-важният извод е, че високо обществено и лично благосъстояние никога пазарна икономика (независимо от модела, който следва) не е постигнала без нарастване на обществения продукт и националното богатство и без целенасочена политика за създаване и поддържане на пазарния ред, стимулиране на конкурентоспособността и осигуряване на общо благосъстояние,

---

<sup>\*\*</sup> Ракарова, С. Университетски речник, НБУ, София

което е социална инвестиция с висока текуща и бъдеща възвръщаемост.

Показател, използван широко за оценка на жизненото равнище в България, е създаваният Брутен вътрешен продукт (БВП). В икономическите изследвания той се използва като обобщаващ измерител на равнището на националната производство и потребление. По-конкретно е нужно да се фокусираме върху БВП на човек от населението, като индикатор за жизненото равнище в страната. Чрез неговото разглеждане се отстранява въздействието на абсолютния брой на населението, като по този начин могат да се правят сравнения между различните държави.

Учените днес се обединяват около идеята за изчисляване на такъв БВП, който да съчетава икономическия растеж с дейността по опазване на околната среда, тоест който е коригиран с размера на разходите за околната среда. Този БВП би се получил, като от традиционния БВП се приспадне стойността на щетите върху околната среда и вредите, които замърсяването е нанесло на населението. Евростат разработва методологичните основи на сметки за околната среда като нова част в СНС и ги експериментира в отделни държави. Идеята е сметките за околната среда да бъдат инкорпорирани в официалната отчетност, в случая Европейската система от сметки (ЕСС'95) чрез сателитни сметки<sup>††</sup>. Препоръчва се постепенно да се разширява обхватът на икономическите активи със стойността на природните ресурси, които се използват като естествен потенциал за икономическото развитие. От друга страна, влиянието на икономиката върху състоянието на околната среда

---

<sup>††</sup> Делегиран регламент (ЕС) / на комисията от 3.12.2018 година за изменение на Регламент (ЕО) № 138/2004 на Европейския парламент и на Съвета във връзка с препратките към Европейската система от национални и регионални сметки в Европейския съюз

ще се отчита чрез данни в стойностно измерение за обемите на вредните емисии, причинени от бизнес-субектите и домакинствата. Препоръчва се като краен резултат да се изчислява редуциран (наричан още „зелен“) БВП, който да представлява коригирана с националните екологични параметри оценка на създадения и изчисляван по трите познати метода БВП.

## **2 Анализ на равнището и динамиката на БВП на човек от населението в България, като измерител на благосъстоянието**

БВП на човек от населението се счита за най-изчерпателния измерител за развитието на националната икономика и приблизителен показател за просперитета на нацията. Равнището и динамиката на БВП на човек от населението са приети за основен икономически показател на благосъстоянието на населението в дадена страна и база за сравнителни анализи в международен аспект. Дори когато се третират като предпоставка (или условие) за благосъстояние, същите не могат да бъдат пренебрегвани, защото те отразяват достигната степен на развитие на производителността на ресурсите в дадена страна, нейната конкурентоспособност и потенциал за осъществяване на текущо потребление и инвестиране в бъдещото развитие.

При анализа на БВП, като индикатор за благосъстоянието в страната е нужно да се фокусираме върху БВП на човек от населението. Чрез неговото разглеждане се отстранява въздействието на абсолютния брой на населението, като по този начин могат да се правят сравнения между различните държави. За целта националните валути се превръщат в стандарти за покупателна способност (СПС), като вместо пазарните валутни курсове се използват паритети на покупателната способност (ППС). Те отразяват покупателната способност на всяка валута, като се елиминират разликите в равнищата на цените между отделните държави. Индексът на физическия обем на БВП на

глава от населението в СПС се изразява по отношение на средните стойности на ЕС - 28 равни на 100. Това означава, че ако индексът на дадена държава е по-висок от 100, БВП на човек от населението на съответната страна е над средната стойност за ЕС - 28 и обратното. Първо разглеждаме показателя БВП на човек от населението, като измерител на жизненото равнище, за периода от 2007 до 2018 г.

### БВП на глава от населението (лв.)

Таблица 1

| Години                            | 2007 | 2008 | 2009 | 2010 | 2011  | 2012  | 2013  | 2014   | 2015   | 2016  | 2017  | 2018  |
|-----------------------------------|------|------|------|------|-------|-------|-------|--------|--------|-------|-------|-------|
| БВП на глава от населението (лв.) | 8285 | 9544 | 9622 | 9924 | 10990 | 11229 | 11310 | 11 594 | 12 340 | 13206 | 14280 | 15363 |

#### Иzt. БНБ

Данните показват, че основната тенденция на развитие е в посока на нарастване. През 2018 г. спрямо 2007 г. БВП на човек от населението нараства с 85,43%, а спрямо предходната 2017 г. нараства с 7,58%. Това нарастване води до нарастване на благосъстоянието на населението в страната.

Изчисляването на годишния темп на изменение на БВП на лице от населението по съпоставими цени е предназначено да позволи сравнения на динамиката на икономическото развитие както във времето, така и между икономики от различен мащаб. Темпът на изменение на БВП е изчислен от показатели по съпоставими цени, тъй като те представят само изменения на обеми, т.е. измененията на цените не влияят на темпа на БВП.

Средногодишният темп на растеж на ВП на човек от населението, изчислен чрез средна геометрична величина за периода 2007 – 2018 г. в България е 105,77% или БВП на човек от населението е нараснал с 5,77%:

$$\bar{T} = N\sqrt[n]{\frac{y_1}{y_0} \cdot \frac{y_2}{y_1} \cdot \frac{y_3}{y_2} \dots \frac{y_n}{y_{n-1}}} = N\sqrt[n]{\frac{y_n}{y_0}} = \sqrt[1]{\frac{15363}{8285}} = 1.0577$$

За анализирания период от 2007 до 2018 г., БВП на глава от населението в ЕС е нараснал средно с 1,55% по данни на Евростат<sup>††</sup>.

Независимо от високия темп на нарастване на БВП и на БВП на глава от населението, запазването на настоящите темпове на икономически растеж означава, че сближаването със средния доход на глава от населението в ЕС остава далеч в бъдещето. Темпът на нарастване на производството на стоки и услуги е основна детерминанта за това как се справя икономиката. Посредством разпределяне на общото производство на всеки човек от населението може да се установи степента, до която общото производство на страната може да бъде разпределено на нейното население. Темпът на нарастване на реалния БВП на човек от населението показва степента на нарастване на доходите на глава от населението. Този съставен показател не измерва пряко устойчивото развитие, но е много важен измерител на икономическите и свързаните с развитието аспекти на устойчивото развитие. За изследване на растежа на реалния БВП на човек от населението ще обхванем по дълг период от време – преди и след присъединяването на България към ЕС. Данните са поместени в таблица:

### Темп на растеж на реалния БВП на човек от населението

Таблица 2

| Години   | 2007  | 2008  | 2009 | 2010  | 2011  | 2012  | 2013  | 2014  | 2015  | 2016  | 2017  | 2018  |
|----------|-------|-------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Проценти | 107.9 | 106.5 | 96.9 | 102.0 | 104.5 | 100.6 | 101.4 | 101.9 | 104.3 | 104.7 | 104.7 | 104.0 |

<sup>††</sup> Годишен доклад 2019, Икономическо развитие и политики в България – оценки и очаквания, ИИИ при БАН

Източник: НСИ

За периода 2001 - 2016 г. темпът на растеж на реалния БВП на човек от населението по съпоставими цени се характеризира със стабилност, като средният темп на растеж за периода е 3.9%. Преди 2007 г. темпът на растеж на реалния БВП на човек от населението е по-висок от този, когато страната е член на ЕС. Известно е, че трансформационните процеси засягат основата на икономическия строй и са съпроводени от спад в деловата активност, а структурните реформи пре моделират отрасловото и регионално развитие. Продължителността и цикличността на тези процеси у нас наложиха своя отпечатък върху всички параметри на благосъстоянието. След 2007 до 2009 г. е регистриран спад в сравнение с предходната година, след което показателят започва плавно да нараства. По данни за 2016 г. стойността на индикатора е 4.7%. Въпреки нарастването на индикатора, все още не са достигнати стойностите от преди присъединяването на страната към ЕС. Достатъчно високият темп на нарастване на БВП за анализирания период означава, че обществото генерира допълнителни икономически ресурси, за да посрещне нарастващите икономически нужди на настоящото поколение да инвестира с цел получаване на по-висока възвращаемост или да ги насочи към различни актуални социални и екологични въпроси.

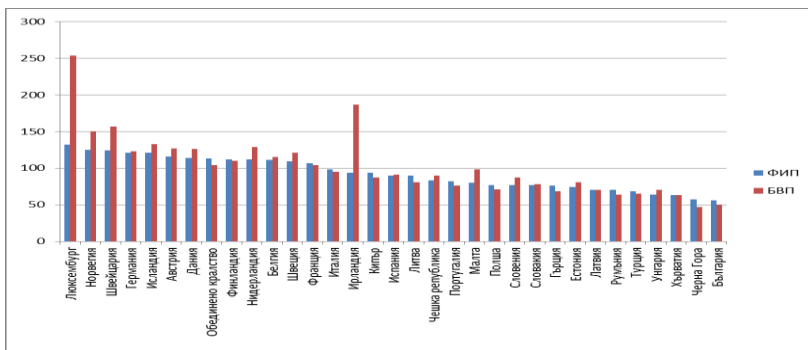
### **3 Сравнителен анализ на БВП на човек от населението в ЕС в стандарти на покупателната способност**

Брутният вътрешен продукт (БВП) е най-често използваният измерител на мащаба на икономиката, докато производните от него показатели, като например БВП на глава от населението — в евро или коригиран с оглед на разликите в равнищата на цените (изразени в стандарти на покупателна способност, СПС) — намират широко приложение за сравняване на жизненото равнище или за наблюдение на икономическата

конвергенция или икономическите различия в рамките на Европейския съюз (ЕС). За оценката на жизненото равнище е обичайно да се използва показателят БВП на глава от населението, който представлява БВП, коригиран спрямо мащаба на икономиката от гледна точка на населението. Фактичестото индивидуално потребление (ФИП) обхваща действително потребените стоки и услуги от индивидите, независимо дали са заплатени от домакинствата, от държавата или от нетърговски организации.

Европейската статистическа служба „Евростат“ публикува новите си данни относно покупателната способност в държавите членки на ЕС. През 2018 година в различните страни тя варира от 56% до 132% спрямо средната в Евросъюза, показват резултатите от статистическите анализи.

**Действително индивидуално потребление и БВП на глава от населението в ЕС за 2018 г.**



Изт. Евростат

**Фиг. 1**



В десет държави членки действителното индивидуално потребление е под средното за ЕС ниво. Най-висок дял е отчетен в Люксембург – 32% над средните данните за ЕС. В Германия е около 20% повече, следвана от Австрия, Дания и Великобритания. В 12 държави членки действителното индивидуално потребление е под средното за ЕС. Това са Италия, Кипър, Ирландия, Испания, Литва – 10% под средните нива за целия Европейски съюз.

В България действителното индивидуално потребление е 40% под средното за ЕС ниво, показват данните на Европейския съюз. Страната ни се нарежда редом до Латвия, Румъния, Хърватия и Унгария. През 2018 г. БВП на глава от населението варира между 50% от средния за ЕС в България и 254% в Люксембург. Единадесет държави членки отчитат ниво на БВП на глава от населението над средното за ЕС през 2018 г. Данните за България обаче са доста по-добри от тези в държавите, извън ЕС, като Босна и Херцеговина, Сърбия, Албания и Македония.

През 2018 година българите са били с най-слаби възможности за потребление на стоки и услуги в рамките на целия ЕС, като т.нар. „Действително индивидуално потребление” (AIC) в нашата страна е било едва 56% от средното за Съюза, докато в Люксембург е било с 132%. Трябва да се има предвид, че индикаторът AIC е измерител на материалното благосъстояние на домакинствата, като данните на Евростат се основават на преразгледания паритет на покупателната способност (PPS), както и на последните данни за БВП за глава от населението на всяка страна - члена на ЕС. През миналата година 10 страни-членки са имали равнище на „Действителното индивидуално потребление”, което е било над средното за Съюза, а в останалите 18 то е било под средноевропейското ниво. Най-високи равнища на AIC на глава от населението са регистрирани в Люксембург (с 32% над средното за ЕС), следвана от Германия (с 121%) и Австрия (116%). Нива над средноевропейските са регистрирани и

в Дания (114%), Великобритания (113%), Холандия (112%), Финландия (112%), Белгия (111%), Швеция (109%) и Франция (107%). В останалите страни-членки действителното потребление на глава от населението е било по-ниско от средноевропейското, като по този показател България продължава да заема последната позиция с възможности за потребление, които са били едва 56% от осредните за ЕС. На предпоследната позиция са Хърватия и Унгария, но с индекси АИС съответно от 63% и 64%, следвани от Румъния (със 70%).

България заема незавидната последна позиция и в класацията на Евростат на БВП на глава от населението, измерен чрез стандарта на покупателната способност (PPS). Трябва да се има предвид, че индикаторът PPS е де факто изкуствена парична единица, която елиминира разликите в ценовите равнища между отделните държави. По този начин с една единица PPS се купува еднакво количество стоки и услуги във всички страни-членки. Този показател нашата страна е едва 50% от средния за ЕС, като далеч пред нас са държави като Хърватия (63%), Румъния (64%) и Унгария (70%). И тук Люксембург оглавява класацията за 2017-а година с цели 254% над средното за ЕС ниво. България заема през последните четири години стабилно последната позиция по отношение и на двата показателя. Показателят АIG за 2015-а и 2016-а беше на ниво 53% от средния на ЕС, преди слабо да се повиши до 54% през 2017-а и до 56% през миналата година, а показателят БВП на глава от населението беше 47% през 2015-а, 48% за 2016-а и 49% за 2017-а година, преди да достигне 50% през 2018-а година. Важно е обаче да се отбележи, че за разлика от България, Румъния отбеляза през последните четири години най-значителен прогрес сред всички 28 членки на Европейския съюз и по двата показателя (според АИС - от 58% през 2015-а до 70% през 2018-а година, а според БВП на човек - от 56% до 64% през миналата година).

Жизненият стандарт в България продължава драматично да изостава от този в ЕС. Страната е на дъното на класацията по реално потребление, измерено в паритет на покупателната способност в съюза по данни от 2018 г., а също и по БВП на глава от населението. Реалното индивидуално потребление на българина, което се мери през паритет на покупателната способност и е мярка за благосъстоянието на домакинствата, е едва 55% от средното за европейските граждани, по данните на Евростат. За сравнение, през 2017 г. потреблението у нас беше 53% спрямо средното в блока, което значи, че за 2018 година се регистрира леко подобрение.

**Връзката между динамиката на БВП и на работната заплата в България е представена чрез фигура 2.**



**Фиг. 2**

От графиката се вижда, че корелационният коефициент е 0,98 т.е. налице е много силна зависимост между изменението на БВП на човек от населението и средната работна заплата. Връзката между двете променливи е права и повишаването на средната работна заплата с 1 лев води до нарастване на БВП на човек от населението с 9,8 лв.

В таблица 8 са поместени данни за темповете на растеж на БВП на глава от населението и средната работна заплата:

**Темпове на растеж на БВП на глава от населението и средната работна заплата**

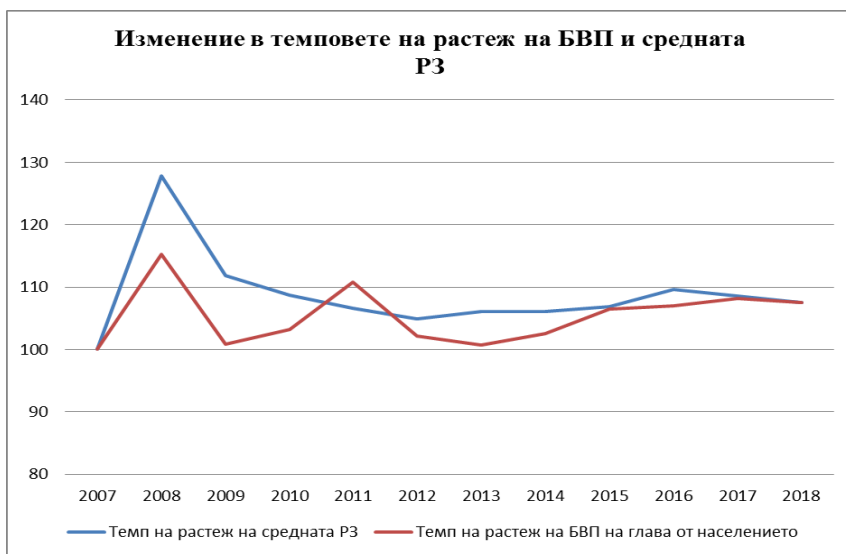
Таблица 3

| Години | Темп на растеж на средната РЗ | Темп на растеж на БВП на глава от населението |
|--------|-------------------------------|---|
| 2007   | 100                           | 100   |
| 2008   | 127.79                        | 115.19  |
| 2009   | 111.89                        | 100.81  |
| 2010   | 108.63                        | 103.13  |
| 2011   | 106.57                        | 110.74  |
| 2012   | 104.87                        | 102.17  |
| 2013   | 106.01                        | 100.72  |
| 2014   | 106.06                        | 102.51  |
| 2015   | 106.81                        | 106.43  |
| 2016   | 109.56                        | 107.01  |
| 2017   | 108.52                        | 108.13  |
| 2018   | 107.47                        | 107.58  |

Изменението на основния източник на доходи на домакинствата – работната заплата (относителен дял в общия доход е вече 55%) за анализирания период е бавно. Най-висок е темпа на нарастване на БВП на човек от населението и темпа на изменение на средната работна заплата през 2008 г. спрямо 2007

г., т.е. една година след присъединяването на страната към ЕС. До 2011 г. темпа на растеж на средната работна заплата изпреварва темпа на растеж на БВП на глава от населението. През 2011 г. растежа на БВП е повече с 4,17%. От 2012 до 2017 темпа на нарастване на средната работна заплата отново е по-висок от темпа на нарастване на БВП на глава от населението. През 2018 г., въпреки намалението в темповете на изменение на двата показателя те почти се изравняват, т.е. ножицата между тях се затваря.

Динамиката на темповете на растеж на БВП на глава от населението е представена чрез фигура 2:



**Фиг.3**

Доходите от труд са най-важния елемент от механизма, който пренася икономическия растеж на равнище на индивидуалното благосъстояние за заетите в частния и

публичния сектор. За икономиката е здравословно производителността да нараства по-бързо от работната заплата, но точното съотношение в темповете е колкото въпрос на пазарни механизми, толкова и проблем на политическо регулиране, още повече като се знае, че в самия модел са заложени неконкурентни предимства за определени групи. За 2017 и 2018 г. темпа на нарастване на ПТ изпреварва темпа на нарастване на работната заплата с по-малко от 1%.

Различията в динамиката на БВП на глава от населението, като икономическия показател за благосъстояние, на макро и паричните индикатори на микроравнище трябва да са обект на специално изследване, тъй като причините за това са както в процесите на разпределение на първичните доходи, така и в преразпределението им, което трябва да осигури ресурси и за публичния сектор. Ясно е, че е невъзможно целият прираст на БВП да се транслира като прираст на доходите на населението, а когато има повишена инвестиционна активност на частния сектор и приоритетни за задоволяване общи потребности, остава очакването, че те също допринасят по определен начин за благосъстоянието.

#### **4 Тенденции, цели и политики за растежа на БВП и подобряване на благосъстоянието в България**

Главна цел за догонващо развитие трябва да бъде човекът. Целите са онова качество на живота, което обществото се стреми да постигне към определен хоризонт от време. Част от стратегическите цели имат количествено измерение.

Средствата са инструментите на макроикономическата, микроикономическата, институционалната и друга политика, които съдействат за постигане на целите. Средства за достигане на стратегическите цели са: паричната, бюджетната и външно-икономическата политика, политиката по заетостта и доходите,

инвестиционната, научно-техническата и структурната политика, образователната и здравната политика, създаването на инфраструктура и т.н.

Повечето икономисти не без основание гледат на brutния продукт като на цел на развитието. По принцип, увеличението на БВП на човек от населението е една от най-важните предпоставки за високо качество на живота. На практика, обаче има отклонения от този принцип защото:

Първо, зависи как се постига прирастът на БВП (с или без допълнителна заетост, с или без увеличение на доходите на заетите, при спазване или в нарушение на нормите за трудови условия, при спазване или нарушаване на екологичните стандарти). Едно и също увеличение на brutния продукт при използване на различни методи се отразява по различен начин не само на сегашното качество на живота, но и на способността на обществото да го подобрява в дългосрочна перспектива.

Второ, зависи как се разпределя и преразпределя БВП. При един и същ прираст на brutния продукт отражението върху качеството на живота на хората ще бъде различно в зависимост от това каква част се използва за отбрана, за вътрешна сигурност, за верига от паразитни посредници и т.н. Освен това, важно е как се разпределя brutният продукт между участниците в неговото производство - икономически и социално-справедливо или несправедливо.

Трето, БВП измерва текущия поток от новопроизведени блага, който допринася за подобряване качеството на живота, но не го определя изцяло. Качеството на живота зависи от многогодишните натрупвания на икономически, технически, кадрови, институционален, социален и друг потенциал.

Теорията и стопанската практика доказват, че растежът на БВП не отразява достатъчно пълно качеството на живота на хората. Той е много важна предпоставка за по-високо благоденствие, но не е надежден измерител на благосъстоянието. За кратък период от време е възможен висок растеж с цената на разорителни социални последици и опустошаване на природната среда. В средно- и дългосрочна перспектива, обаче това води до деградация, а не до подобряване качеството на живота на хората. Така се роди понятието за устойчиво развитие, което включва икономическите, социалните и екологичните измерения на развитието. По своята същност устойчивото развитие е дългосрочна концепция. За нейната реализация, обаче са необходими мащабни кратко- и средносрочни решения и действия.

Растежа на БВП се разглежда като важно средство за подобряване качеството на живота на хората. Растежът на брутният продукт е своеобразна трансмисия между тези средства и крайната цел - подобряване качеството на живота.

Това ни дава основание да поставим БВП - обща маса, на човек от населението и като темпове на нарастване - на върха на пирамидата от цели на догонващото устойчиво развитие.

На средния етаж на пирамидата са четирите най-важни агрегирани цели: икономическо развитие, социално развитие, здравословна околна среда и стабилна демокрация.

В основата на пирамидата са голям брой цели, които конкретизират четирите групи по-обща цели от средния етаж:

- Икономически цели: заетост, производителност, конкурентоспособност, доходи, потребление, финансово-икономическа стабилност, ниво на образование и квалификация, развитие на науката и изследванията, на



информационно-комуникационните технологии /ИКТ/, интегрираност в ЕС, вътрешно регионално развитие, развитие на инфраструктурата, смекчаване на демографската криза, свободна миграция и вътрешна мобилност.

- Социални цели: достъп до качествено здравеопазване, по-добри условия на живот и труд, по-голяма продължителност на живота, по-ниска заболяемост, умерено социално разслоение, развитие на социалната инфраструктура, социална защита, защита на правата на потребителите, грижи за възрастните хора, грижи за децата, подобряване състоянието на семейството, равнопоставеност на половете, развитие на социалния диалог.
- Екологични цели: чистота на водите, въздуха и почвите, по-малка емисия на CO<sub>2</sub> и други замърсители, по-малко транспортни проблеми, по-висока чистота на въздуха в големите градове.
- Политическа стабилност, ред и законност: прозрачност на държавното управление, доверие в държавните институции, доверие в политическите партии, участие на гражданите в избори, децентрализация на държавното управление, развитие на гражданското общество, етническа равнопоставеност, ефикасност на правораздаването, защита на личната и имуществената сигурност на гражданите, ограничаване на престъпността и корупцията.

Дори най-елементарният анализ показва, че и обратната връзка - от конкретните цели в основата на пирамидата до обобщаващата цел - БВП е не по-малко важна и сложна.

Преобладаващата част от конкретните цели са едновременно и фактори за увеличение на БВП.

Предпоставки за увеличение на брутния продукт са по-голямата заетост, по-високата производителност, ефикасното и разумно използване на ресурсите, доходите, образованието, здравето, справедливото разпределение, политическата, икономическата, социалната и етническата стабилност, местното самоуправление, личната и имуществената сигурност на гражданите, по-малката корупция. Това не им пречи да имат самостоятелно значение на важни цели на догонващото развитие.

Някои от по-конкретните цели на развитието (екологична целесъобразност, демографски процеси, нов стил на живот, работа и почивка) могат да затрудняват увеличението на брутния продукт като количество. Те обаче са израз на обективни световни или национални тенденции към ново качество на живота, нови ценностни системи и не можем да не се съобразяваме с тях. Защото производството обслужва хората, а не хората – производството. Следователно и тук се изразява далеч по-сложното съвременно разбиране за развитието като трансформация на обществото, за разлика от традиционното - повече производство и по-голямо потребление. Ще се променя и характерът на производството, на потреблението, характерът на труда, на свободното време, на връзката между свободно и трудово време и т.н. Тези промени са част от съвременните разбирания на хората за по-добро качество на живота.

Неблагоприятна констатация е, че постигнатият растеж все още не може да се определи като приобщаващ и няма осезаемо въздействие върху намаляването на бедността и икономическите и социални неравенства. Въпреки всичко България остава най-бедната държава в Европейския съюз, на опашката на класациите и в близко бъдеще няма тенденция това да се промени.

Това, което прави впечатление е, че пред икономиката на България стоят сериозни изпитания. Всеки един от анализиранияте показатели се очаква да губи позиции до 2040 година, което със

сигурност ще постави на изпитание правителствата за постигане на задачата за повишаване на благосъстоянието на нацията. Това трябва да даде ясен сигнал, че реформите в страната трябва да се провеждат много по-смело и бързо, отколкото досега. В противен случай достигането на нивата на развитие на страните, които често гоним, ще се отлага все повече във времето.

**ЛИТЕРАТУРА:**

- [1] Евростат
- [2] Йотова, Л. Благосъстоянието преди и след членството на България в Европейския съюз: между очакванията и реалностите. Годишник на УНСС, бр. 7, 2008.
- [3] Годишен доклад 2019, Икономическо развитие и политики в България – оценки и очаквания, ИИИ при БАН
- [4] НСИ

**Труфка Димитрова**

Шуменски университет „Епископ Константин Преславски“

E-mail: [trufkatd@abv.bg](mailto:trufkatd@abv.bg)

**Светослава Димитрова**

Шуменски университет „Епископ Константин Преславски“

E-mail: [svetlito\\_2177@abv.bg](mailto:svetlito_2177@abv.bg)



## INFORMATION AND COMMUNICATION TECHNOLOGIES IN MATHEMATICAL TRAINING

**KRASIMIR V. HARIZANOV, DANIELA E. DIMITROVA**

**ABSTRACT:** *The article introduces the use of an application through which an interactive mathematics lesson can be prepared and developed. The main functions and characteristics of the various applications involved in the organization of the lessons are presented. Examples of adapting applications that can be helpful to the teacher in mathematics training are described.*

**KEYWORDS:** *e-learning, interactive education, education mathematic.*

**2010 Math. Subject Classification:** 97D40

## ИНФОРМАЦИОННИ И КОМУНИКАЦИОННИ ТЕХНОЛОГИИ В ОБУЧЕНИЕТО ПО МАТЕМАТИКА

**КРАСИМИР В. ХАРИЗАНОВ, ДАНИЕЛА Е. ДИМИТРОВА**

### Въведение

Бързото развитие на информационните и комуникационните технологии е един от факторите, определящи вектора на развитие на световната общност на XXI век. Цивилизацията непрекъснато се движи към изграждането на информационно общество, където информацията и научното познание играят решаваща роля.

Виждаме, че през последните години се наблюдава коренна промяна в ролята и мястото на компютрите и информационните технологии в обществото. Без тях вече е невъзможно да си представим модерен човек. Информационните технологии също се използват все по-често в образователния процес, следователно

информационната и комуникационна компетентност на учителя, способността му да решава професионални педагогически проблеми с използването на ИКТ се превръща във важен компонент на неговия професионализъм.

Адаптация на информационните и комуникационните технологии в обучението по математика

Традиционната образователна практика е основана на предпоставката, че знанието е нещо, което може да бъде преподадено непосредствено от учителя на учениците. Пасивната, ориентираната към четенето и писането педагогика с традиционно съдържание и организация се приема като норма. На теория се поощрява „участващото” и диалогово (интерактивно), съсредоточено върху ученика и резултата обучение, но тези практики не се срещат често в действителността.

Теорията на електронното обучение описва когнитивните научни принципи за ефективно мултимедийно обучение с помощта на електронни образователни технологии. Образователната технология е процесът на интегриране на технологията в образованието по положителен начин, който насърчава по-разнообразна учебна среда и начин учениците да се научат как да използват технологиите, както и техните общи задачи.

### **Електронно обучение ( E-learning)**

Терминът електронно обучение придобил широка популярност чрез английския си вариант E-learning (Electronic Learning), се отнася до интерактивно обучение, което използва информационни и електронни технологии за комуникация като средство за преподаване.

Електронното обучение е образователен процес, който включва електронни учебници, образователни услуги и технологии. В допълнение към решаването на основната си задача, електронното обучение е също отлично допълнение към

редовното обучение и може да бъде добра помощ за подобряване на качеството и ефективността на традиционното образование.

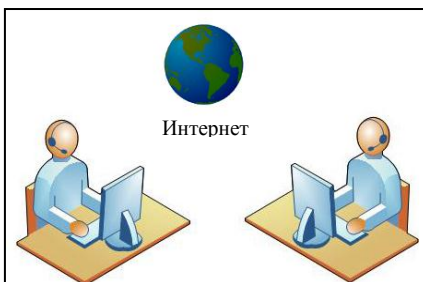
Според мнозина автори [1, 2, 3, 4, 5] електронното обучение условно може да се раздели на синхронно, асинхронно и събитийно-ориентирано.

Синхронното обучение (synchronous) (Фиг. 1) наподобява до голяма степен на традиционното обучение, което означава, че с използването на онлайн мулти-потребителски среди, обучаващите обменят опит с други обучаващи или осъществяват връзка с преподаватели намиращи се на различни географски точки.

„Преподавателите съевременно могат да предложат насоки и препоръки на обучаващите по отношение на учебния материал, за постигане на по-добри резултати.

„Прилагането на този вид обучение може да задължи всеки обучаващ да се включи в учебния процес под формата на дискусия, беседа или диалог, без да остане изолиран от него“ [1].

Асинхронното обучение (Asynchronous) е курс със самостоятелен темп на учене от обучаващия, който няма директна връзката с преподавателя, а процеса на обучение се развива във времето. Обучаемият има достъп до предварително подготвени материали от преподавателят (учебното съдържание, примери, задачи и тестове) публикувани във уеб



**Фиг. 1 Синхронно обучение**



**Фиг. 2 Асинхронно обучение**

обучителна система (Фиг.2). Комуникацията между преподавател и обучаващи най-често се постига чрез изпращане на e-mail, чат или съобщения във форуми. Главното предимство на асинхронното обучение е, че обучаващите сами определят обема на учебното съдържание, което трябва да усвоят по време подходящо и удобно за тях. “Но като недостатък може да се отбележи, че така се губи връзката между преподавател и обучаващ, както и увеличаване на времето за получаване въпроси и отговори” [1].

Събитийно-ориентирано обучение (Blended learning) обединява горепосочените два вида (Фиг.4). Според [6] това обучение „обозначава спектъра от възможности, представени чрез комбиниране на интернет и цифрови медии с установени форми в класната стая, които изискват физическото присъствие на учител и студенти“.



**Фиг. 3 Събитийно-ориентирано обучение**

В зависимост от конкретните нужди, преподавателя може да включи асинхронни и синхронни елементи, т.е. той определя коя част от учебния материал да бъде за самостоятелна работа и индивидуално оценяване (асинхронни), и в коя част да се включи в реално време където да се обсъдят идеи, въпроси, казуси или мнения (синхронни). “Изборът на такъв подход изгражда у



обучаващите навици за отговорност, самостоятелно и градивност в своето обучение” [1].

Приложение на облачните технологии в обучението по математика

В тази част са представени активни методи на обучение, базирани на най-съвременните информационни и комуникационни технологии. Разгледано е приложението на облачните технологии като средство за преподаване и обучение по дисциплината математика, за организиране на учебната единица и за оценяване на знанията и уменията на учениците. Описани са иновативни среди като виртуална класна стая, облачна библиотека, групов имейл, бележка, календар за организация на учебния процес, онлайн тестове и чат съобщения и видеоконференция.

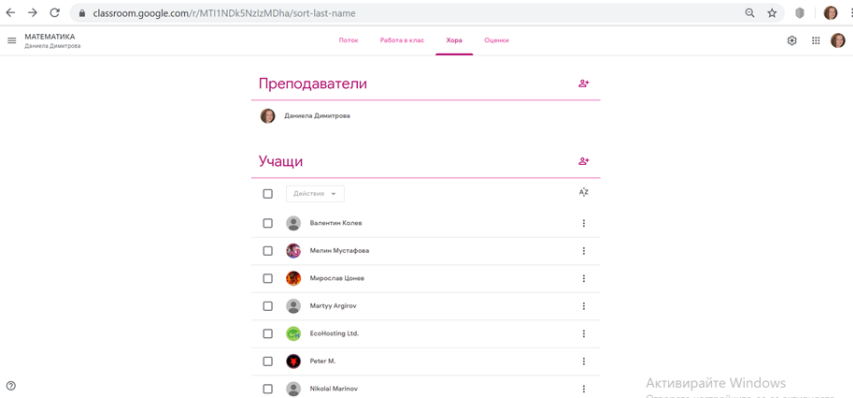
Google Apps for education разполага с богат набор от инструменти за преподаване и учене. Целият пакет е на разположение безплатно за всички училища, като използват собствения домейн на училището или закупят такъв от Google. Google Apps разполага с всички инструменти необходими за обучението в училищата и са построени за Интернет, така че учениците да работят заедно през всяко устройство, по всяко време. Тези дигитални инструменти помагат ученето да е достъпно, по-интерактивно и в по-голямо сътрудничество. Google Apps предлага до 30GB за съхранение на потребител. Важно да научим учениците си как да мислят критично, да оценяват онлайн ресурсите и да използват различни технологии за достъп до информацията, от която се нуждаят.



Фиг. 4 G Suite for Education обучение

В качеството си на учител потребителят има възможност да поддържа курса (Фиг. 5), като предлага учебни материали, поддържа обратна връзка с учениците и изпитва обучаемите. За целите на обучението например по математика и информационни технологии в VII, IX и XI клас използвам почти всички облачни приложения.

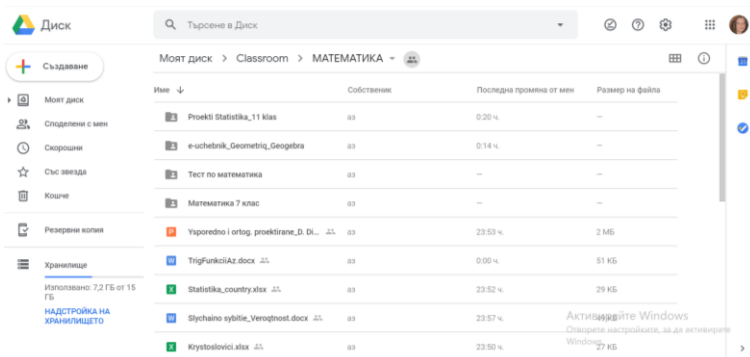
В началото на обучението учениците създават профил в Гугъл чрез собствен или групов електронен адрес създаден на сървър, предоставящ услугата електронна поща (Gmail). Членовете на групата може да бъдат в една от трите роли: собственик, който е създател на групата, мениджър (администратор) и член.



**Фиг. 5** Виртуална класна стая

За целите на обучението учителят може да изгради виртуална облачна библиотека в Google Drive (Фиг. 6), в която съхранява материали и задачи, като дава достъп на учениците чрез споделяне в определени моменти да използват и при необходимост да променят и допълват учебните ресурси. Идеята при използването на облачната библиотека не е да се четат дигиталните приложения на учебниците, а да се обогати учебното

съдържание и учениците да бъдат активни участници в процеса на обучението.



Фиг. 6 Виртуална библиотека

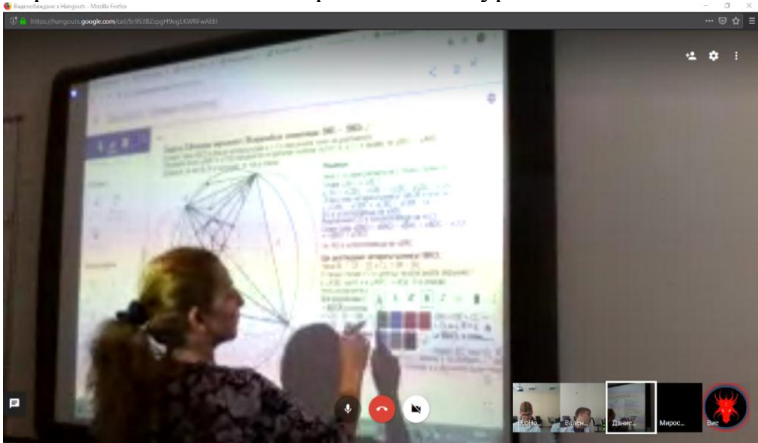
Едно от най-популярните в момента синхронно приложение е Google Hangouts. Чрез него учениците с лекота могат да поддържат връзка помежду си, като имат постоянна актуална информация за участниците, с които са свързани. Достъпни са редица удобни възможности за комуникация, като чат и видеокомуникация, обмяна на съобщения, споделяне на файлове, поддържане на блогове и много други.

Основната идея при създаването на проект е да се даде възможност на учениците да участват в дискусии като използват чат съобщения и видеоконференция, да споделят дидактически материали и екрана си, както и да търсят помощ от учител.

В обучението по математика са възможни различни варианти – споделяне на информация за определена теория, задаване и обсъждане на задача или решение, стимулиране на групата да участва в обсъждането на поставената тема.

Приложението на интерактивната бяла дъска е много подходящо в обучението по геометрия. Всяко приложение за математическо обучение (Geogebra, GEONExT и др.), може да

бъде изобразено чрез интерактивна бяла дъска и управлявано от екрана на дъската. Това позволява на всички участници в учебния процес да бъдат активни, като вземат участие, изразяват свободно идеи и предложения относно преподавания урок.



**Фиг. 7 Подчертавам връх на описания триъгълник**

Учебното съдържание може да се подготвя и структурира от преподавателя и да е обвързано с потребностите на ученика. Електронното обучение, комбинирано с други методи за преподаване, повишава ефективността на образователния процес. В примера се дискутира задача по геометрия „Вписана окръжност“ за XI клас между група ученици, посредством електронна дъска, която ми дава възможност да подчертавам и аотирам текст, графика, чертеж и др. с цел съсредоточаване върху специфични аспекти на определен обект (Фиг. 7). Това се постига със скрити части на дисплея и неговото откриване при необходимост.

## **Заклучение**

Интерактивните методи в обучението по математика се реализират, чрез различни интерактивни техники и технологии, като: интерактивна бяла дъска, компютри, планшети, интернет, електронни уроци, облачните технологии, виртуални класни стаи, образователни софтуерни пакети и други. Безспорен е фактът, че мултимедийните технологии са „бъдещето на образованието” и все повече ще нараства ролята на информационните и комуникационните технологии в обучението.

## **Благодарности**

Тази статия е подпомогната частично по проект от фонд Научни изследвания на ШУ „Епископ Константин Преславски“ РД- 08-117/04.02.2019.

## **ЛИТЕРАТУРА:**

- [1] Павлова, Н. Софтуерни технологии за създаване на дидактически материали за обучението по математика. Шуменски университет „Епископ Константин Преславски”, 2011
- [2] Харизанов, Кр. Електронното обучение в педагогическите практики, конференция с международно участие „Съвременни предизвикателства пред педагогическата наука“, София, 6-8 юни 2014
- [3] Христова, С. Приложни математически модели ([http://www.fmi-plovdiv.org/pmm/appliedmathmodels/documents/tema\\_1.pdf](http://www.fmi-plovdiv.org/pmm/appliedmathmodels/documents/tema_1.pdf))
- [4] Al Januszewski, A. and Molenda Michael. Educational Technology: A Definition with Commentary, 2007  
<http://terment.ru/en/?q=Educational+technology++Alan+Januszewski>
- [5] Antonietti, Alessandro and Manuela Cantoia, To see a painting versus to walk in a painting: an experiment on sense-making through virtual reality, *Computers & Education* **34** (2000) 213±223
- [6] Friesen, Norm. Отчет: Дефиниране на смесено обучение, 2012

**Красимир В. Харизанов**  
ШУ“Епископ К. Преславски”  
ФМИ, катедра АГ  
ул. ”Университетска”115  
9712, Шумен  
e-mail: kr.harizanov@shu.bg

**Даниела Енчева Димитрова**  
ШУ“Епископ К. Преславски”  
ФМИ, студент  
e-mail: aniel.a.dimitrova@abv.bg

## CONTENTS

|  |     |
|--|-----|
| <b>UNRAMIFIED COHOMOLOGY AND NOETHER'S PROBLEM</b><br>IVO M. MICHAILOV, IVAN S. IVANOV .....   | 3   |
| <b>NECESSARY AND SUFFICIENT CONDITION FOR THE EXISTENCE<br/>OF A POSITIVE DEFINITE SOLUTION OF A MATRIX EQUATION</b><br>VEJDI I. HASANOV ..... | 13  |
| <b>RECOVERING SPACE CURVES BY MÖBIUS INVARIANTS</b><br>RADOSTINA P. ENCHEVA .....  | 21  |
| <b>COMMUTING NONSELFADJOINT OPERATORS AND WAVE EQUATIONS</b><br>GALINA S. BORISOVA, MIROSLAV K. HRISTOV, TZONIO G. TZONEV .....                | 37  |
| <b>OVERVIEW OF CRYPTOGRAPHIC ALGORITHMS FOR VIDEO FILES</b><br>GEORGI G. DIMITROV, KRASIMIR M. KORDOV .....                                    | 57  |
| <b>TEXT STEGANOGRAPHY METHODS</b><br>TEODORA T. STOYANOVA, STANIMIR K. ZHELEZOV .....  | 67  |
| <b>USING WAVEFRONT OBJ FILE FORMAT IN THE QUALITY<br/>OF STEGANOGRAPHIC CONTAINER</b><br>DELYAN H. SARMOV .....                                | 93  |
| <b>DYNAMICS OF FINANCIAL ASSET PRICES AND RISKS FOR<br/>FINANCIAL MARKETS</b><br>SVILEN G. TONEV .....   | 101 |
| <b>RECORDING OF BUSINESS PROCESSES IN ENTERPRISE IN BULGARIA<br/>DURING XVII - XIX CENTURY</b><br>SLAVENA G. STOYANOVA .....                   | 113 |
| <b>REGARDING SOME ASPECTS OF INNOVATION MANAGEMENT</b><br>RUMYANA ST. ZLATEVA .....  | 131 |
| <b>GROSS DOMESTIC PRODUCT AS A MEASURE OF NATIONAL WELL-BEING</b><br>TRUFKA R. DIMITROVA, SVETOSLAVA I. DIMITROVA .....                        | 159 |
| <b>INFORMATION AND COMMUNICATION TECHNOLOGIES IN<br/>MATHEMATICAL TRAINING</b><br>KRASIMIR V. HARIZANOV, DANIELA E. DIMITROVA .....            | 181 |