Задачи за първи етап (месец декември)

на Турнира за купата на декана по математика

1. Да се пресметне детерминантата

$$\begin{vmatrix} a_1c_1+b_1d_1 & a_1c_2+b_1d_2 & a_1c_3+b_1d_3 & a_1c_4+b_1d_4 \\ a_2c_1+b_2d_1 & a_2c_2+b_2d_2 & a_2c_3+b_2d_3 & a_2c_4+b_2d_4 \\ a_3c_1+b_3d_1 & a_3c_2+b_3d_2 & a_3c_3+b_3d_3 & a_3c_4+b_3d_4 \\ a_4c_1+b_4d_1 & a_4c_2+b_4d_2 & a_4c_3+b_4d_3 & a_4c_4+b_4d_4 \end{vmatrix}$$

2. Да се намери минималната стойност на израза

$$\frac{ab}{(a+c)(b+c)}+\frac{bc}{(b+a)(c+a)}+\frac{ca}{(c+b)(a+b)},$$

където a, b, c са положителни числа.

3. Да се докаже, че ортоцентърът H, медицентърът G и центърът O на описаната окръжност за произволен триъгълник лежат на една права. Да се намери отношението OG:GH.