Задачи за **втори етап** (месец февруари)

на Турнира за купата на Декана по математика

1. Съставете полином от трета степен, чиито корени x_1, x_2, x_3 удовлетворяват равенствата:

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=-2,$$

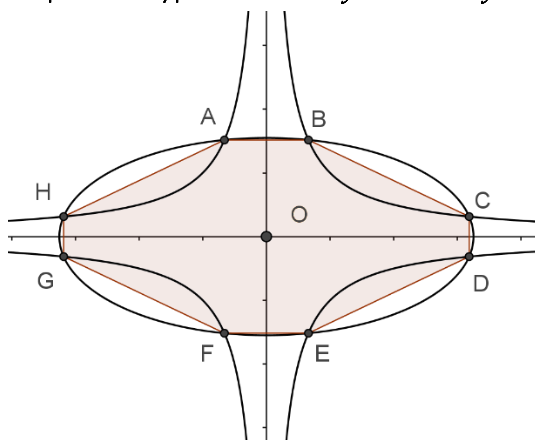
$$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\frac{1}{x_3^2}=1,$$

$$\frac{1}{x_1^4}+\frac{1}{x_2^4}+\frac{1}{x_3^4}=1.$$

2. Дадена е елипса k с уравнение

$$k\colon \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad a>0, \qquad b>0$$

и две равнораменни хиперболи с уравнения $x.y=1$ и $x.y=-1$.



   a. При какво условие елипсата k има общи точки с дадените хиперболи?
   b. При условие, че елипсата k пресича дадените хиперболи, намерете лицето S на получения многоъгълник. Кога S е минимално?

3. Дадена е функцията $f(x)=\frac{x}{4}arctg\ x+M^{2017}$, където M е константа.
   a. Намерете интервалите на растене и намаляване и точките на локален екстремум на функцията $f(x)$.
   b. Изследвайте функцията $f(x)$ и начертайте графиката ѝ, ако

$$\mathrm{M}=\frac{p^2}{q+r}+\frac{q^2}{r+p}+\frac{r^2}{p+q},$$

   където реалните числа p, q и r удовлетворяват равенството

$$\frac{p}{q+r}+\frac{q}{r+p}+\frac{r}{p+q}=1.$$

За условията на турнира вижте съобщението на адрес

http://fmi.shu.bg/