

**Лиляна Каракашева**

**МАТЕМАТИКА**

**ЧАСТ I**

Рецензенти: проф. д-р Виолета Маринова  
доц. д-р Галина Славчева

Научен редактор: доц. д-р Радостина Енчева  
Коректор: Константин Йончев

Университетско издателство „Епископ Константин  
Преславски“  
Шумен  
2022 г.

ISBN 978-619-201-682-1

# Съдържание

|                                                                         |          |
|-------------------------------------------------------------------------|----------|
| <b>Предговор .....</b>                                                  | <b>6</b> |
| <b>Първа глава. Елементи на теорията на множествата</b>                 |          |
| <b>1. Множества. Релации с множества</b>                                |          |
| 1.1. Понятие за множество .....                                         | 8        |
| 1.2. Видове множества.....                                              | 10       |
| 1.3. Начини на задаване на множества .....                              | 11       |
| 1.4. Универсално множество .....                                        | 12       |
| 1.5. Релации между множества.....                                       | 13       |
| 1.5.1. Равенство на множества .....                                     | 13       |
| 1.5.2. Релацията включване на множества .....                           | 14       |
| 1.6. Задачи с решения .....                                             | 15       |
| 1.7. Задачи за самостоятелна работа .....                               | 20       |
| <b>2. Операции с множества</b>                                          |          |
| 2.1. Сечение на множества .....                                         | 23       |
| 2.2. Обединение на множества .....                                      | 24       |
| 2.3. Разлика на множества.....                                          | 26       |
| 2.4. Допълнение на множество .....                                      | 28       |
| 2.5. Разделяне на множество на класове .....                            | 29       |
| 2.6. Задачи с решения .....                                             | 30       |
| 2.7. Задачи за самостоятелна работа .....                               | 36       |
| <b>3. Декартово произведение на множества</b>                           |          |
| 3.1. Понятие за декартово произведение на множества....                 | 40       |
| 3.2. Начини на задаване на декартово произведение<br>на множества ..... | 41       |
| 3.3. Свойства на декартовото произведение .....                         | 43       |
| 3.4. Задачи с решения .....                                             | 44       |
| 3.5. Задачи за самостоятелна работа .....                               | 45       |
| <b>4. Двучленна релация</b>                                             |          |
| 4.1. Понятие за двучленна релация .....                                 | 46       |
| 4.2. Начини за представяне на двучленна релация .....                   | 47       |
| 4.3. Обратна релация.....                                               | 48       |

|                                             |    |
|---------------------------------------------|----|
| 4.4. Свойства на релациите .....            | 48 |
| 4.5. Релация еквивалентност .....           | 50 |
| 4.6. Клас на еквивалентност .....           | 51 |
| 4.7. Релация наредба .....                  | 51 |
| 4.8. Задачи с решения .....                 | 52 |
| 4.9. Задачи за самостоятелна работа .....   | 59 |
| <b>5. Изображения</b>                       |    |
| 5.1. Понятие за изображение.....            | 61 |
| 5.2. Начини на задаване на изображение..... | 63 |
| 5.3. Видове изображения.....                | 63 |
| 5.4. Равномощни множества .....             | 64 |
| 5.5. Крайни и безкрайни множества.....      | 65 |
| 5.6. Задачи с решения .....                 | 65 |
| 5.7. Задачи за самостоятелна работа .....   | 66 |

## **Втора глава. Съждително смятане**

### **1. Съждения. Видове съждения. Логически операции със съждения**

|                                            |    |
|--------------------------------------------|----|
| 1.1. Съждения и предикати .....            | 70 |
| 1.2. Логическа стойност на съждение .....  | 71 |
| 1.3. Видове съждения.....                  | 71 |
| 1.4. Логически операции със съждения ..... | 72 |
| 1.4.1. Отрицание на съждение .....         | 72 |
| 1.4.2. Конюнкция на съждения .....         | 73 |
| 1.4.3. Дизюнкция на съждения .....         | 74 |
| 1.4.4. Импликация на съждения.....         | 75 |
| 1.4.5. Равнозначност на съждения.....      | 77 |
| 1.5. Задачи с решения .....                | 78 |
| 1.6. Задачи за самостоятелна работа .....  | 80 |

### **2. Съждителни изрази. Закони на съждителното смятане**

|                                           |    |
|-------------------------------------------|----|
| 2.1. Съждителни изрази.....               | 82 |
| 2.2. Закони на съждителното смятане ..... | 86 |
| 2.3. Задачи с решения .....               | 87 |
| 2.4. Задачи за самостоятелна работа ..... | 89 |

|                 |    |
|-----------------|----|
| Литература..... | 91 |
|-----------------|----|

## Предговор

Учебникът съдържа елементи на теорията на множествата и елементи на математическата логика. Представеното съдържание е част от учебната програма в раздела „математика“ по учебната дисциплина „Теория и методика на обучение по математика за деца със специални образователни потребности“ за студентите от специалност „Специална педагогика“. Представеното съдържание е част от съдържанието и на учебната програма по дисциплината „Математика, част I“ за студентите от специалностите „Предучилищна и начална училищна педагогика“ и „Начална училищна педагогика с чужд език“.

В първа глава са разгледани следните въпроси: множество, подмножество, релации и операции с множества, двучленни релации, изображения, крайни и безкрайни множества.

Втора глава е посветена на елементи на математическата логика. Разгледан е само един нейн дял – съжителното смятане със следните въпроси: съждение, видове съждения, логически операции със съждения, закони на съжителното смятане.

В началото на всеки параграф е изложен теоретичния материал. След това е представена система от задачи, снабдени с обучаващи решения. Накрая на параграфа са предложени задачи за самостоятелна работа.

За основа на учебника послужиха лекциите, които съм чела на студентите от специалност „Специална педагогика“, както и семинарните упражнения, които съм водила на студентите от специалностите „Предучилищна и начална училищна педагогика“ и „Начална училищна педагогика с чужд език“. При изложението на учебното съдържание в

учебника са използвани основно идеите от книгите [4] и [5].

Учебникът може да се ползва както за работа в семинарните упражнения, така и за самостоятелна работа на студентите.

Учебникът може да се ползва както от студентите от посочените по-горе специалности, така и от всички любознателни читатели, които желаят да задълбочат познанията си по теоретичните основи на училищния курс по математика в началния етап на образование.

# Първа глава

## Елементи на теорията на множествата

Теорията на множествата е дял от математиката, който изучава свойствата на множествата от най-обща гледна точка, т.е. независимо от природата на обектите, от които са съставени множествата. Немският математик Георг Кантор (1845-1918) е съзателят на тази теория, която е в основата на съвременната математика.

### 1. Множества. Релации с множества

#### 1.1. Понятие за множество

Изучавайки заобикалящия ни свят се срещаме с голямо разнообразие от явления, предмети, факти и обекти, които обаче имат и свои специфични особености, по които можем да ги различаваме един от друг, както и общи признаци и свойства, по които можем да ги обединяваме.

Съвкупността от тези обекти, предмети, явления, факти и събития, които имат някакви общи свойства, по които можем да ги обединяваме, е прието да се нарича **множество**. Понятието **множество** е първично понятие в математиката и затова не се определя посредством други понятия. Представа за него придобиваме чрез примери.

*Например:* Множеството от столиците на държавите в Европа; множеството от областните градове в Република България, множеството от библиотеките в гр. Шумен, множеството на химичните елементи, множеството на естествените числа и т.н.

По такъв начин, когато говорим за множеството на някои обекти, ние обединяваме тези обекти в едно цяло и по-



нататък разглеждаме свойствата на това цяло, а не на отделните влизащи в него обекти.

Синоними на термина множество са съвкупност, група, клас, фамилия, сбирка, колекция, колектив и някои други. Рота-това е определено множество военнослужещи, а ескадра-множество кораби. В бита се говори за множество животни, като се употребяват думите стадо, табун и др.

Множествата се означават с главните букви от латинската азбука: A, B, C,.....M, N,

За някои числови множества са приети постоянни означения:

$\mathbb{N}$  – множеството на естествените числа,

$\mathbb{N}_0$  – множеството на естествените числа и нулата,

$\mathbb{Z}$  – множеството на целите числа,

$\mathbb{Q}$  – множеството на рационалните числа,

$\mathbb{I}$  – множеството на ирационалните числа,

$\mathbb{R}$  – множеството на реалните числа.

В началното училище се изучава множеството на естествените числа и нулата  $\mathbb{N}_0$ , в прогимназиалния етап на образование се изучават множествата  $\mathbb{Z}$  и  $\mathbb{Q}$ , в гимназиалния етап се изучават множествата  $\mathbb{I}$  и  $\mathbb{R}$ .

Обектите, от които се състои дадено множество, се наричат негови **елементи**. Елементите на дадено множество означаваме с малките латински букви:  $a, b, c, \dots$  или с някаква буква с индекси  $a_1, a_2$  и т. н.

Когато искаме да подчертаем, че елемента „ $a$ “ **принадлежи** на множеството A, ние го записваме накратко така:  $a \in A$  и четем „ $a$  принадлежи на множеството A“ или „ $a$  е елемент на A“. Но когато  $a$  не е елемент на множеството A, пишем  $a \notin A$  и четем „ $a$  не принадлежи на множеството A“ или „ $a$  не е елемент на A“.

Например:  $5 \in \mathbb{N}$ ,  $-5 \notin \mathbb{N}$ ,  $-5 \in \mathbb{Z}$ ,  $0 \in \mathbb{N}_0$ ,  $\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$ ,  
 $\frac{1}{4} \notin \mathbb{Z}$ ,  $\sqrt{2} \in \mathbb{I}$ .

И така, основни понятия в теорията на множествата се явяват понятията „множество“, „елемент на множество“, а основно съответствие между тях – „елементът принадлежи на множеството“.

Някои множества имат за елементи също множества. За такива множества използваме термина „фамилия от множества“. Например множеството от факултетите в Университета е фамилия от множества, защото всеки факултет е също множество от специалности; множеството от всички балкански държави е фамилия от множества, тъй като всяка държава също е множество от жители; множеството от всички прави в равнината също е фамилия от множества, понеже всяка права е също множество от точки и т. н.

## 1.2. Видове множества

В зависимост от обектите, от които се състои дадено множество, те биват:

- Числови-когато елементите на множеството са някакви числа;
- Нечислови-когато елементите на множеството са други обекти.

В разговорния език терминът множество обикновено се свързва с понятието много. В математиката понятието множество не е свързано непременно с много обекти. Може да се разглеждат множества, които се състоят от един или два обекта, а така също и множество, което няма елементи (**празно множество**). Празното множество се означава с  $\emptyset$ . Ако в една група студенти няма момчета, то казваме, че множеството момчета в тази група е празно. Други *примери* на празното множество са: множеството на нечетните числа, последната цифра на които (в десетичен запис) е 2; множеството на естествените числа, които са корени на уравнението  $5x+7=0$ .

Ако множеството  $A$  се състои от елементите  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , където  $n$  е фиксирано естествено число, се казва, че  $A$  е **крайно** множество. Например множеството от книгите в една библиотека е крайно множество, множеството на студентите от дадено висше училище е крайно множество, множеството от буквите в българската азбука е крайно множество. Приема се, че  $\emptyset$  е крайно множество.

Числовите множества  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{N}_0$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{I}$  и  $\mathbb{R}$  имат безброй елементи. Те не са крайни множества. Такива множества се наричат **безкрайни**. Множеството от всички точки върху дадена права е също безкрайно множество, множеството от триъгълниците в равнината е безкрайно множество, множеството на окръжностите в равнината е безкрайно и т.н.

### 1.3. Начини на задаване на множества

Счита се, че едно множество е дадено, ако познаваме начин, който позволява за всеки обект да се определи дали е елемент на множеството.

Ако зададем едно множество чрез непосредствено записване на всичките му елементи, то се казва че множеството е зададено **конструктивно**. Например  $A=\{1;2\}$ ,  $B=\{2;4;6;8\}$ ,  $C=\{\square;\square;\triangle\}$ ,  $D=\{\text{Луна}\}$ . Този начин на задаване е удобен за задаване на крайни множества с по-малък брой елементи, но е неудобен когато множеството има голям брой елементи. Ако едно множество е безкрайно, то този начин за задаване е неприложим. В тези случаи се използва друг – универсален начин на задаване на множества.

Свойството, което притежават всички елементи на множеството и само те, се нарича **характеристично свойство**. Едно множество, което може да бъде както крайно, така и безкрайно, може да бъде определено чрез посочване на характеристично свойство. Когато едно

множество е определено чрез характеристично свойство се казва, че множеството е зададено **дескриптивно**. Например  $A = \{1; 2\}$ ,

$A = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ е корен на уравнението } (x - 1)(x - 2) = 0\}$ .

Това множество е зададено чрез характеристичното свойство

« $x$  е корен на уравнението  $(x - 1)(x - 2) = 0$ ».

Друг пример

$B = \{2; 4; 6; 8\} = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ е четно и едноцифрено число}\}$ .

Разбира се, характеристичното свойство трябва да бъде такова, че по него да може **еднозначно** да се отговори на въпроса принадлежи ли даден обект на това множество, или не. Например, не може да се говори за множеството на малките градове в Република България – един и същи град може да се окаже за един човек малък, а за друг – голям. Но множеството градове, в които има по-малко от 50 000 жители, е еднозначно определено.

Третият начин на задаване на множества е **графичен**. Използват се диаграми на Ойлер-Вен. Великият швейцарски математик Леонард Ойлер (1707-1783) използвал вътрешността на кръг за изобразяване на множество, а английският математик Джон Вен (1834-1923) – вътрешността на затворена област в равнината.

#### 1.4. Универсално множество

Когато се търси решение на някакъв проблем, често се фиксира някакво множество, в което се решава проблемът. Такова множество се нарича **универсално** или **универсум**. Например в обучението по математика в началното училище при решаването на аритметични задачи за универсално множество се приема множеството  $\mathbb{N}_0$ . За едно линейно уравнение учениците от прогимназиалния етап на образование могат да търсят решението му в множеството

$\mathbb{N}_0$ ,  $\mathbb{Z}$  или  $\mathbb{Q}$ , т. е. в единия случай ролята на универсалното множество се играе от  $\mathbb{N}_0$ , в другия случай – от  $\mathbb{Z}$  и в третия случай – от  $\mathbb{Q}$ . Да разгледаме още един пример: с  $A$  да означим множеството от ученици от 4-ти „а“ клас. В ролята на универсалното множество може да се разгледа множеството ученици от 4-ти клас, или множеството ученици от началното училище, или множеството ученици от цялото училище. Така че можем да кажем, че универсалното множество има **относителен** характер.

Универсалното множество ще означаваме с  $U$ . Приема се, че  $U \neq \emptyset$ . Универсалното множество  $U$  графично ще изобразяваме чрез вътрешността на правоъгълник.

## 1.5. Релации между множества

### 1.5.1. Равенство на множества

**Определение 1.5.1.** *Две множества  $A$  и  $B$  ще наричаме равни тогава, когато се състоят от едни и същи елементи. Записва се  $A=B$ .*

*Например:* Да разгледаме множествата  $A=\{a;b\}$  и  $B=\{b;a\}$ . Те се състоят от едни и същи елементи. Редът на записване на елементите няма значение. Тогава  $A=B$ .

Равните множества графично изобразяваме чрез два съвпадащи кръга (фиг.1).

Ще посочим някои свойства на релацията равенство на множества. Ще отбележим, че такива свойства характеризират и релацията равенство в множеството на реалните числа  $\mathbb{R}$ .

**Теорема 1.5.1.** Релацията равенство на множества има следните свойства:

1. **Рефлексивност.** За всяко множество  $A$  е вярно, че  $A=A$ .
2. **Симетричност.** За всеки две множества  $A$  и  $B$  ако  $A=B$ , то  $B=A$ .

3. **Транзитивност.** За всеки три множества  $A$ ,  $B$  и  $C$  ако  $A=B$  и  $B=C$ , то  $A=C$ .

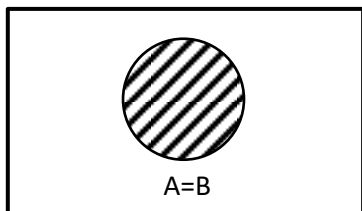
### 1.5.2. Релацията включване на множества

**Определение 1.5.2.** Множеството  $A$  се **включва** в множеството  $B$ , ако всеки елемент на множеството  $A$  е елемент и на множеството  $B$ . Записва се  $A \subseteq B$ . Чете се « $A$  се включва в  $B$ » или « $A$  е подмножество на  $B$ ».

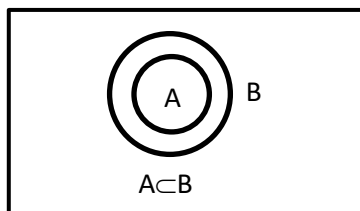
Когато множеството  $B$  има и други елементи, освен тези на  $A$ , тогава казваме, че  $A$  е **истинско подмножество** на множеството  $B$ . Означава се с  $A \subset B$ .

*Например:* Да разгледаме множествата  $A=\{1;2;3;4\}$  и  $B=\{1;2;3;4;5;6\}$ . Всеки елемент на множеството  $A$  е елемент на множеството  $B$ , има елементи от множеството  $B$ , които не са от  $A$ . Тогава  $A \subset B$ .

Графично множествата  $A$  и  $B$ , за които  $A \subset B$ , изобразяваме чрез два кръга, като кръгът  $A$  е в кръга  $B$  (фиг.2).



фиг.1



фиг.2

Ще разгледаме някои свойства на релацията включване на множества. Такива свойства има и релацията по-малко или равно ( $\leq$ ) в множеството на реалните числа  $\mathbb{R}$ .

**Теорема 1.5.2.** Релацията включване на множества има **свойствата:**

1. **Рефлексивност.** За всяко множество  $A$  е вярно, че  $A \subseteq A$ .
2. **Антисиметричност.** За всеки две множества  $A$  и  $B$ , ако  $A \subseteq B$  и  $B \subseteq A$ , то  $A=B$ .

3. **Транзитивност.** За всеки три множества  $A$ ,  $B$  и  $C$  ако  $A \subseteq B$  и  $B \subseteq C$ , то  $A \subseteq C$ .

### 1.6. Задачи с решения

**Задача1.** Определят ли множество следните описания:

- а) Естествените числа, които са корени на уравнението

$$(x+2)(x+4)(x-1)(x-2)=0;$$

- б) Някои от корените на уравнението

$$(x+1)(x+2)(x-3)(x-2)=0;$$

- в) Естествените числа, които са по-големи от 7 и по-малки от 12;

- г) Целите числа, делители на числото 6;

- д) Простите числа, делители на числото 210;

- е) Имената на три черноморски града в Р България;

- ж) Целите числа, корени на уравнението  $x^2 - 2 = 0$ .

В случаите, когато описанията определят множества, то последните да се запишат конструктивно или дескриптивно.

*Решение.* а) Понеже за всеки обект може да се отговори еднозначно на въпроса „да е естествено число и да е корен на посоченото уравнение“ описанието определя множество. Да означим това множество с  $A$ . Тогава дескриптивният запис е  $A = \{x \in \mathbb{N} / (x+2)(x+4)(x-1)(x-2)=0\}$ . А конструктивният запис е  $A = \{1; 2\}$ .

б) В този случай не може еднозначно да се определи кои от числата  $-2$ ,  $-4$ ,  $1$  и  $2$  биха принадлежали на това множество и кои не. Ето защо описанието не определя множество.

в) Описанието определя множество. Конструктивният му запис е

$A = \{8; 9; 10; 11\}$ , а дескриптивният –  $A = \{x \in \mathbb{N} / 7 < x < 12\}$ .

г) Описанието определя множество. Конструктивният му запис е  $A = \{-6; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 6\}$ , а дескриптивният –  $A = \{x \in \mathbb{Z} / x \text{ е делител на } 6\}$ .

д) Описанието определя множество. Конструктивният му запис е  $A=\{2; 3; 6; 7\}$ , а дескриптивният –

$A=\{x \in P / x \text{ е делител на } 210\}$ , където  $P$  е множеството на простите числа.

е) Това описание не определя множество, тъй като не са конкретизирани елементите му.

ж) Корените на това уравнение са  $x_1 = -\sqrt{2}$  и  $x_2 = \sqrt{2}$ . Но тези корени не са цели числа, така че в случая множеството съвпада с празното множество  $\emptyset$ .

**Задача 2.** Кои от следните твърдения са верни и кои не са:

а)  $-4 \in \{x \in \mathbb{Z} / (x+2)(x+4)(x-4) = 0\}$ ;

б)  $\emptyset \in \{0; 1; 2; 3; 5\}$ ;

в)  $\{2\} \in \{2; 22; 222\}$ ?

*Решение.* а) Твърдението е вярно, защото числото  $-4$  е цяло число и е корен на посоченото уравнение.

б) Твърдението не е вярно, защото празното множество не е елемент на даденото множество.

в) Едноелементното множество  $\{2\}$  не е елемент на даденото множество.

**Задача 3.** Да се представят конструктивно следните множества, зададени с характеристично свойство:

а)  $A = \{x \in \mathbb{N} / |x| < 6\}$ ;

б)  $B = \{x \in \mathbb{N}_0 / |x| < 6\}$ ;

в)  $C = \{x \in \mathbb{Z} / |x| < 6\}$ ;

г)  $D = \{x \in \mathbb{N}_0 / x \text{ е съставно число}, x \leq 15\}$ ;

д)  $E = \{x \in \mathbb{N}_0 / x \text{ е просто число}, x \leq 20\}$ .

*Решение.* а) Множеството  $A$  се състои от всички естествени числа, които по модул са по-малки от 6, т.е.  $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ .

б) Множеството  $B$  се състои от всички числа от множеството на естествените числа и нулата, които по модул са по-малки от 6, т.е.  $B = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ .



в) Множеството  $C$  се състои от всички цели числа, които по модул са по-малки от 6, т.е.  $C=\{-5;-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;4;5\}$ .

г) Множеството  $D$  се състои от всички неотрицателни числа, които са съставни и са по-малки или равни на 15, т. е.  $D=\{4;6;8;9;10;12;14;15\}$ .

д) Множеството  $E$  се състои от всички неотрицателни числа, които са прости и са по-малки или равни на 20, т. е.  $E=\{2;3;5;7;11;13;17;19\}$ .

**Задача 4.** Да се представят дескриптивно множествата:

а)  $A=\{2;4;6;8;10;12\}$ ;

б)  $B=\{2;4;8;16;32;64\}$ ;

в)  $C=\{-5;-4;-3;-2;-1;0;1;2;3\}$ ;

г)  $D=\{11;13;17;19;23;29\}$ ;

д)  $E=\{-5;5\}$ .

*Решение.* а) Множеството  $A$  се състои от всички четни естествени числа, които са по-малки от 13, т. е.

$A=\{x \in \mathbb{N} / x = 2k, k \in \mathbb{N} \text{ и } x < 13\}$ . Това множество може да се зададе и така  $A=\{x \in \mathbb{N} / x = 2k, k \in \mathbb{N} \text{ и } x \leq 12\}$ .

б) Множеството  $B$  се състои от степените на числото 2, от 2 до  $2^6$ , т. е.  $B=\{x \in \mathbb{N} / x = 2^k, k \in \mathbb{N} \text{ и } 1 \leq k \leq 6\}$ .

в) Множеството  $C$  се състои от всички цели числа, по-големи или равни на -5 и по-малки или равни на 3, т.е.  $C=\{x \in \mathbb{Z} / -5 \leq x \leq 3\}$ .

г) Множеството  $D$  се състои от простите числа, които са по-големи от 10 и по-малки от 30, т.е.  $D=\{x \in P / 10 < x < 30\}$ .  $C$  и  $P$  сме означили множеството на простите числа.

д) Множеството  $E$  се състои от всички цели числа, които по модул са равни на 5, т. е.

$E=\{x \in \mathbb{Z} / |x| = 5\}$ . Но това множество може да се представи и по друг начин. Елементите на множеството  $E$  са целите числа, които са корени на уравнението  $x^2 - 25 = 0$ , т.е.  $E=\{x \in \mathbb{Z} / x^2 - 25 = 0\}$ .

**Задача 5.** Равни ли са следните двойки множества:

а)  $A=\{1;2;3;4;5\}$  и  $B=\{x \in \mathbb{N} / x < 6\}$ ;

б)  $C = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}$  и  $D = \{x \in \mathbb{Z} / -3 \leq x \leq 5\}$ ;

в)  $E = \{x \in \mathbb{Z} / 1 < x < 2\}$  и  $F = \{x \in \mathbb{N} / x < 1\}$ .

*Решение.* а) Множеството В се състои от всички естествени числа, които са по-малки от 6, но това са числата 1, 2, 3, 4 и 5. И съгласно определение 1.5.1 следва, че  $A=B$ .

б) Множеството D се състои от всички цели числа, които са по-големи или равни на -3 и по-малки или равни на 5, но това са числата, които са и елементи на C. Следователно  $C=D$ .

в) Понеже няма цели числа между числата 1 и 2, то множеството E съвпада с празното множество, т. е.  $E=\emptyset$ . Очевидно и множеството F няма елементи, т. е.  $F=\emptyset$ . Следователно  $E=F$ .

**Задача 6.** Дадени са множествата: А–множеството от четириъгълниците, В–множеството от успоредниците, С–множеството от правоъгълниците, D–множеството от квадратите. Подредете във верига от включвания буквите, с които са означени множествата.

*Решение.* Използвайки определения за изучени равнинни фигури четириъгълник, успоредник, правоъгълник и квадрат можем да запишем следната верига от включвания:  $D \subset C \subset B \subset A$ .

**Задача 7.** Вместо \* поставете знака  $\subset$  или  $\in$  така, че да се получи вярно твърдение:

а)  $-3 * \{-9; -6; -3; -1; 0; 3\}$ ;

б)  $\{-3\} * \{-9; -6; -3; -1; 0; 3\}$ ;

в)  $\{-4; 4\} * \{x \in \mathbb{Z} / |x| < 6\}$ ;

г)  $4 * \{x \in \mathbb{N} / |x| < 6\}$ .

*Решение.* Верни са следните твърдения:

а)  $-3 \in \{-9; -6; -3; -1; 0; 3\}$ ;

б)  $\{-3\} \subset \{-9; -6; -3; -1; 0; 3\}$ ;

в)  $\{-4; 4\} \subset \{x \in \mathbb{Z} / |x| < 6\}$ ;

г)  $4 \in \{x \in \mathbb{N} / |x| < 6\}$ .

**Задача 8.** Да се сравнят по отношение на релациите включване и равенство следните двойки множества:

- а)  $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$  и  $B = \{x \in \mathbb{N} / x < 8\}$ ;
- б)  $C = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$  и  $D = \{x \in \mathbb{Z} / -3 \leq x \leq 5\}$ ;
- в)  $E = \{x \in \mathbb{Z} / (x - 1)(x + 1) = 0\}$  и  $F = \{x \in \mathbb{N} / (x - 1)(x + 1) = 0\}$ ;
- г)  $M = \{x \in \mathbb{Z} / |x| = 6\}$  и  $N = \{x \in \mathbb{N} / (x - 6)(x + 6) = 0\}$ ;
- д)  $S = \{x \in \mathbb{Z} / 3 < x < 4\}$  и  $T = \{x \in \mathbb{R} / 3 < x < 4\}$ ;
- е)  $K = \{x \in \mathbb{Z} / -2 < x < 3\}$  и  $H = \{x \in \mathbb{Z} / -3 < x < 2\}$ .

*Решение.* а) Елементите на множеството В са числата 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7. Понеже всеки елемент на множеството А е елемент и на множеството В, то съгласно определение 1.5.2 можем да заключим, че  $A \subset B$ .

б) Конструктивният запис на множеството D е  $D = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ . Понеже всеки елемент на множеството D е елемент и на C и в множеството C има и елементите 6 и 7, то  $D \subset C$ .

в) Конструктивният запис на множеството E е  $E = \{-1; 1\}$ , на F е  $F = \{1\}$ . Видно е, че  $F \subset E$ .

г) Конструктивният запис на двете множества е  $M = \{-6; 6\}$  и  $N = \{6\}$ . Следователно  $N \subset M$ .

д) Понеже няма цели числа между числата 3 и 4, то множеството S съвпада с празното множество, т. е.  $S = \emptyset$ . Понеже празното множество е подмножество на всяко множество, то  $S \subset T$ .

е) Конструктивно множествата имат вида  $K = \{-1; 0; 1; 2\}$  и  $H = \{-2; -1; 0; 1\}$ . От това, че числото  $2 \in K$  и  $2 \notin H$  следва, че  $K \not\subset H$ . От това, че  $-2 \in H$  и  $-2 \notin K$  следва, че  $H \not\subset K$ , т. е.  $K \neq H$ .

**Задача 9.** Да се зададат конструктивно всички подмножества на множеството  $A = \{a; b; c\}$ . Кои от тях са истински подмножества на A?

*Решение.* Подмножествата на множеството A са:  $A_1 = \emptyset$ ,  $A_2 = \{a\}$ ,  $A_3 = \{b\}$ ,  $A_4 = \{c\}$ ,  $A_5 = \{a; b\}$ ,  $A_6 = \{a; c\}$ ,  $A_7 = \{b; c\}$ ,  $A_8 = \{a; b; c\}$ .

Всички множества, с изключение на  $A_8$ , са истински подмножества на  $A$ .

### 1.7. Задачи за самостоятелна работа

**Задача 1.** Определят ли множество следните описания:

- а) Естествените числа, които са корени на уравнението
$$(2x+1)(x+7)(x-3)(x-4)=0;$$
- б) Рационалните числа, корени на уравнението
$$(3x+1)(x+2)(2x-3)(x-2)=0;$$
- в) Целите числа, които са по-големи от  $-7$  и по-малки от  $7$ ;
- г) Някои от делителите на числото  $12$ ;
- д) Целите числа, които са делители на числото  $9$ ;
- е) Десет четни числа;
- ж) Имената на три столици на страни в Европа;
- з) Рационалните числа, които са корени на уравнението
$$x^2 - 3 = 0;$$

В случаите, когато описанията определят множества, то последните да се запишат конструктивно или дескриптивно.

**Задача 2.** Кои от следните твърдения са верни и кои не са:

- а)  $-44 \in \{x \in \mathbb{Z} / (x + 22)(x + 44)(x - 44) = 0\};$
- б)  $\emptyset \in \{\emptyset; 1; 2; 3; 5\};$
- в)  $\{22\} \in \{2; 22; 222\};$
- г)  $12 \in \{122; 21; 221\};$
- д)  $D \subseteq D;$
- е)  $L \in L;$
- ж)  $\{2; 4\} \subset \{4; 2\};$
- з)  $\{\text{Пловдив}\} \subset \{\text{София}; \text{Варна}; \text{Пловдив}\};$
- и)  $\emptyset \subset A;$
- й)  $\{2; 4\} \subseteq \{4; 2\};$
- к)  $a \in \bar{A} = \{a; b; c\}.$

**Задача 3.** Кои от следните множества са крайни и кои – безкрайни:

- а) {Слънце};
- б) {10;100;1000};
- в) {1;2;3;4;5;.....};
- г)  $\mathbb{Z}$ ;
- д) множеството от точките върху една права;
- е) множеството от буквите в латинската азбука ?

**Задача 4.** Да се представят конструктивно множествата:

- а) от цифрите в числото 1 000;
- б) от цифрите в числото 1 230;
- в) от буквите в думата мъдрост;
- г) от буквите в думата математика.

**Задача 5.** Да се представят конструктивно следните множества, зададени с характеристично свойство:

- а)  $A = \{x \in \mathbb{Z} / |x| < 8\}$ ;
- б)  $B = \{x \in \mathbb{N}_0 / |x| \leq 8\}$ ;
- в)  $C = \{x \in \mathbb{Z} / x \text{ е делител на } 8\}$ ;
- г)  $D = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ е делител на } 8\}$
- д)  $E = \{x \in \mathbb{N}_0 / x \text{ е съставно число и } x \leq 25\}$ ;
- е)  $H = \{x \in \mathbb{N}_0 / x \text{ е просто число и } x \leq 25\}$ .

**Задача 6.** Дадено е уравнението

$$x(x+2)(x-2)(x+2,5)(x-3,1)(x-\sqrt{3})=0.$$

Да се представи конструктивно множеството от корените на уравнението, ако универсалното множество е:

- а)  $\mathbb{N}$ ; б)  $\mathbb{N}_0$ ; в)  $\mathbb{Z}$ ; г)  $\mathbb{Q}$ ; д)  $\mathbb{R}$ .

**Задача 7.** Да се представят дескриптивно множествата:

- а)  $A = \{1;3;5;7;9\}$ ;
- б)  $B = \{-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;4\}$ ;
- в)  $C = \{-4;-3;-2;-1;0;1;2\}$ ;
- г)  $D = \{-9;-3;-1;1;3;9\}$ ;
- д)  $E = \{-7;7\}$ ;
- е)  $M = \{10;20;30;40;.....90\}$ ;
- ж)  $L = \{1;2;3;6\}$ ;

з)  $K = \{-6; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 6\}$ .

**Задача 8.** Вместо  $*$  поставете знака  $\subset$ ,  $=$  или  $\in$  така, че да се получи вярно твърдение:

а)  $33 * \{x \in \mathbb{N}_0 / x \text{ е съставно число и } x \leq 35\}$

б)  $\{-3; -1\} * \{-7; -5; -3; -1; 0; 3\}$ ;

в)  $\{-4; 4\} * \{x \in \mathbb{Z} / |x| \leq 4\}$ ;

г)  $5 * \{x \in \mathbb{N} / |x| < 6\}$ ;

д)  $\{5, 3; 7, 3; 9, 3\} * \{x \in \mathbb{Q} / x \geq 5, 3\}$ ;

е)  $\{x \in \mathbb{R} / x^2 + 1 = 0\} * \{x \in \mathbb{N} / x < 1\}$ .

**Задача 9.** Да се сравнят по отношение на релациите включване и равенство следните двойки множества:

а)  $A = \{-1; -2; -3; -4; -5\}$  и  $B = \{x \in \mathbb{Z} / |x| < 8\}$ ;

б)  $C = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$  и  $D = \{x \in \mathbb{N} / x \leq 5\}$ ;

в)  $E = \{x \in \mathbb{Z} / (x - 2)(x + 2) = 0\}$  и

$F = \{x \in \mathbb{N} / (x + 2)(x + 1) = 0\}$ ;

г)  $M = \{x \in \mathbb{Z} / |x| = 5\}$  и  $N = \{x \in \mathbb{N} / x < 6\}$ ;

д)  $S = \{x \in \mathbb{Z} / -3 < x < 5\}$  и  $T = \{x \in \mathbb{N} / 3 < x < 4\}$ ;

е)  $K = \{x \in \mathbb{Z} / -2 < x < 3\}$  и

$H = \{x \in \mathbb{Z} / x(x + 1)(x - 1)(x - 2) = 0\}$ ;

ж)  $J = \{x \in \mathbb{N} / x < 1\}$  и  $G = \{x \in \mathbb{N}_0 / x < 0\}$ ;

з)  $P = \{x \in \mathbb{N} / x < 6\}$  и  $R = \{x \in \mathbb{N}_0 / x < 6\}$ ;

и)  $Z = \{x \in \mathbb{N} / x > 6\}$  и  $V = \{x \in \mathbb{N}_0 / x \geq 6\}$ .

**Задача 10.** Да се зададат конструктивно всички подмножества на множеството  $A = \{a; b; c; d\}$ . Кои от тях са истински подмножества на  $A$ ?

**Задача 11.** Нека  $A$  е множеството на всички триъгълници в равнината,  $B$  е множеството на всички правоъгълни триъгълници,  $C$  е множеството на всички равнобедрени триъгълници и  $D$  е множеството на всички равнобедрени триъгълници. Да се начертае диаграма, която определя в какви релации са тези множества.

**Задача 12.** Ако  $A$  е множеството на животните,  $R$  е множеството на рибите,  $S$  – на сомовете,  $P$  – на птиците и

D – на домашните животни. Да се начертае диаграма, която определя в какви релации са тези множества.

## 2. Операции с множества

Ще разгледаме множества, които са подмножества на някакво универсално множество  $U$ .

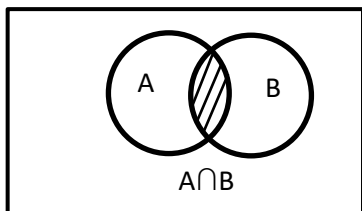
### 2.1. Сечение на множества

**Определение 2.1.1.** *Сечение  $A \cap B$  на множествата  $A$  и  $B$  наричаме множеството, състоящо се само от онези елементи, които принадлежат едновременно на  $A$  и  $B$ . Операцията, чрез която от  $A$  и  $B$  се получава новото множество  $A \cap B$ , също се нарича сечение.*

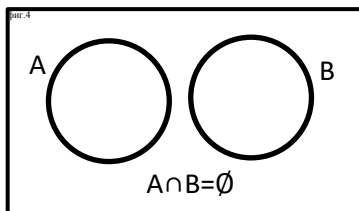
*Например:* 1. Нека са дадени множествата  $A = \{2; 4; 6; 8\}$  и  $B = \{6; 8; 10; 12\}$ . Тяхното сечение е множеството  $C$ , което се състои от елементите 6 и 8, т. е.  $A \cap B = C = \{6; 8\}$ .

2. Нека  $A$  е множеството на момчетата, които учат в дадено училище, а  $B$  – множеството на всички ученици на един от класовете в това училище. Тяхното сечение  $A \cap B$  е множеството на всички момчета, които се учат в този клас.

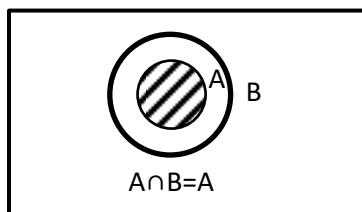
Графично сечението  $A \cap B$  на множествата  $A$  и  $B$  изобразяваме чрез вътрешността на общата част на двата кръга  $A$  и  $B$  (фиг.3, фиг.4 и фиг.5).



фиг.3



фиг.4



фиг.5

Ако  $A \cap B = \emptyset$ , то множества  $A$  и  $B$  наричаме **непресичащи се** (фиг.4).

*Например.* Множеството на четните числа и множеството на нечетните числа са непресичащи се.

**Теорема 2.1.1.** Операцията сечение на множества има **свойствата**:

1. **Комутативност.** За всеки две множества  $A$  и  $B$  е изпълнено  $A \cap B = B \cap A$ ;
2. **Асоциативност.** За всеки три множества  $A$ ,  $B$  и  $C$  е вярно  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ ;
3. За всяко множество  $A$  е изпълнено  $A \cap U = A$ ,  $A \cap \emptyset = \emptyset$ ,  $A \cap A = A$ .

Аналогични свойства има и операцията умножение в множеството на реалните числа  $\mathbb{R}$ , като  $0$  и  $1$  са аналози съответно на  $\emptyset$  и  $U$ . Обаче свойството  $A \cap A = A$  няма аналог в  $\mathbb{R}$ .

Операцията сечение на множества може да се обобщи за повече от две множества.

## 2.2. Обединение на множества

**Определение 2.2.1.** *Обединение  $A \cup B$  на множества  $A$  и  $B$  наричаме множеството, което се състои само от онези елементи, които принадлежат на поне едно от множествата  $A$  и  $B$ . Операцията, чрез която от  $A$  и  $B$  се получава  $A \cup B$ , се нарича също обединение.*

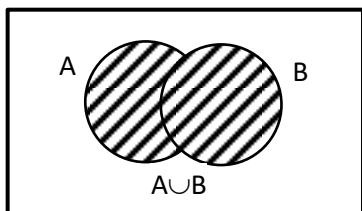


Може да се случи някой елемент  $x$  да принадлежи и на  $A$ , и на  $B$ . Тогава в обединението  $A \cup B$  на множествата  $A$  и  $B$  този елемент влиза само един път.

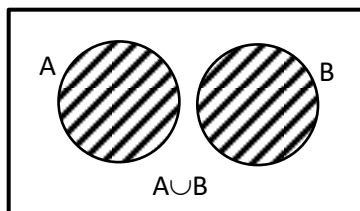
*Например:* 1. Ако  $A = \{2; 4; 6; 8\}$  и  $B = \{6; 8; 10; 12\}$ , то тяхното обединение  $A \cup B = \{2; 4; 6; 8; 10; 12\}$ .

2. Ако  $A$  е множеството на всички момчета, които се учат в дадено училище, а  $B$  – множеството на всички момичета в същото училище, то  $A \cup B$  е множеството на всички ученици в това училище.

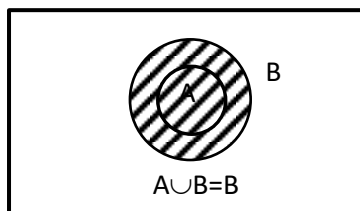
Графично обединението  $A \cup B$  на множествата  $A$  и  $B$  изобразяваме чрез вътрешността на двата кръга  $A$  и  $B$  (фиг. 6, фиг.7 и фиг.8).



фиг. 6



фиг.7



фиг.8

**Теорема 2.2.1.** Операцията обединение на множества има **свойствата:**

1. **Комутативност.** За всеки две множества  $A$  и  $B$  е изпълнено  $A \cup B = B \cup A$ ;

2. **Асоциативност.** За всеки три множества  $A$ ,  $B$  и  $C$  е вярно  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ ;

3. За всяко множество  $A$  е изпълнено  $A \cup U = U$ ,  $A \cup \emptyset = A$ ,  $A \cup A = A$ .

Аналогични свойства има и операцията събиране в множеството на реалните числа  $\mathbb{R}$ . Операцията събиране в множеството на реалните числа притежава свойствата комутативност и асоциативност. Операцията събиране притежава и свойството  $a+0=a$  за всяко  $a \in \mathbb{R}$ , което е аналог на свойството  $A \cup \emptyset = A$ . Но останалите две свойства на операцията обединение  $A \cup U = U$  и

$A \cup A = A$  нямат аналози в  $\mathbb{R}$ .

В множеството на реалните числа познаваме и дистрибутивното свойство, което свойство изразява връзката между операциите събиране и умножение, т. е.  $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$  за всяко  $a, b$  и  $c$  от  $\mathbb{R}$ . Такова свойство имат и операциите обединение и сечение на множества. Връзката между тези операции се дава от следната теорема.

**Теорема 2.2.2. Дистрибутивност.** За всеки три множества  $A$ ,  $B$  и  $C$  е изпълнено:

1.  $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ ;

2.  $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ .

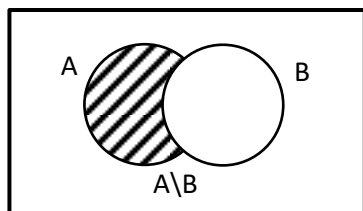
Да отбележим, че свойство 2 от горната теорема няма аналог в множеството на реалните числа  $\mathbb{R}$ .

Операцията обединение на две множества може да се обобщи за повече от две множества.

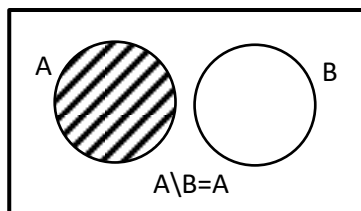
## 2.3. Разлика на множества

**Определение 2.3.1. Разлика  $A \setminus B$  на множествата  $A$  и  $B$**  се нарича множеството, което се състои само от онези елементи на  $A$ , които не принадлежат на  $B$ . Операцията, чрез която от  $A$  и  $B$  се получава новото множество  $A \setminus B$ , също се нарича разлика.

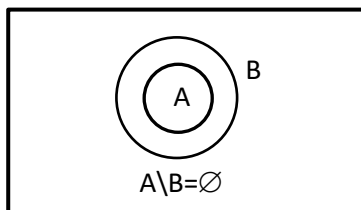
Разликата на множествата  $A$  и  $B$  е представена на фиг.9, фиг.10 и фиг.11.



фиг.9



фиг.10



фиг.11

*Например.* Да разгледаме множествата  $A = \{2; 4; 6; 8; 10\}$   $B = \{6; 8; 10; 12; 14; 16\}$ . Разликата  $A \setminus B$  се състои от онези елементи, които са от множеството  $A$  и не са от множеството  $B$ , т. е.  $A \setminus B = \{2; 4\}$ . Да намерим и разликата  $B \setminus A$ . Това множество се състои само от онези елементи, които са от  $B$  и не са от  $A$ , т.е.  $B \setminus A = \{12; 14; 16\}$ .

От този пример се забелязва, че операцията разлика на множества няма свойството комутативност, т. е.  $A \setminus B \neq B \setminus A$ . Някои свойства на операцията разлика на множества се задават със следващата теорема.

**Теорема 2.3.1.** Операцията разлика на множества има **свойствата:**

1. За всяко множество  $A$  е изпълнено

$$A \setminus A = \emptyset, A \setminus \emptyset = A, \emptyset \setminus A = \emptyset, A \setminus U = \emptyset.$$

2. За всеки две множества  $A$  и  $B$  е вярно  $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$ .

3. За всеки три множества  $A$ ,  $B$  и  $C$  е изпълнено:

$$3.1. C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B);$$

$$3.2. C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B).$$

Свойства 3. от тази теорема се наричат *закони на де Морган* в чест на шотландския математика Август де Морган (1806-1871).

Само свойствата  $A \setminus A = \emptyset$ ,  $A \setminus \emptyset = A$  имат аналози на операцията разлика в множеството на реалните числа  $\mathbb{R}$ , т. е.  $a - a = 0$  и  $a - 0 = a$  за всяко  $a \in \mathbb{R}$ . Лесно се забелязва, че другите свойства нямат аналози в  $\mathbb{R}$ .

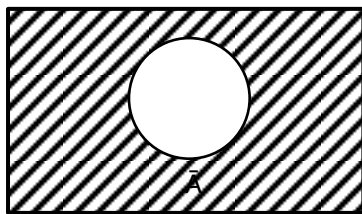
Операцията разлика на множества не притежава и свойството асоциативност.

## 2.4. Допълнение на множества

Да припомним, че с  $U$  означаваме универсалното множество. Нека  $A \subset U$ .

**Определение 2.4.1.** *Допълнението на множеството  $A$  (до  $U$ ) се нарича множеството  $\bar{A} = U \setminus A$ . Операцията, чрез която от  $A$  се получава  $\bar{A}$ , има същото име.*

Графично допълнението на множеството  $A$  е представено на фиг. 12.



фиг. 12

*Например.* Ако  $U = \mathbb{N}$  и  $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ , то допълнението на  $A$  се състои от всички естествени числа, които не са от  $A$ , т. е. от всички естествени числа, които са по-големи от 9, т. е.

$$\bar{A} = \{10; 11; 12; 13; 14; \dots\} = \{x \in \mathbb{N} / x > 9\}.$$

От определението следва, че допълнението на празното множество е  $U$ , а допълнението на  $U$  е празното множество, т. е.  $\overline{\emptyset} = U$ ,  $\overline{U} = \emptyset$ .

Ако универсалното множество е множеството на реалните числа  $\mathbb{R}$ , то допълнението на множеството на рационалните числа е множеството на ирационалните числа, т. е.  $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{I}$ . А допълнението на множеството на ирационалните числа е множеството на рационалните числа, т. е.  $\overline{\mathbb{I}} = \mathbb{Q}$ .

**Теорема 2.4.1.** Допълнението на множество има свойствата:

1. За всяко множество  $A$  е изпълнено  $\overline{(\overline{A})} = A$ ,  $\overline{A} \cup A = U$ ,  $\overline{A} \cap A = \emptyset$ .

2. За всеки две множества  $A$  и  $B$  е изпълнено:

$$2.1. \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B};$$

$$2.2. \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Трябва да отбележим, че свойства 2 от тази теорема са частен случай на законите на де Морган от теорема 2.3 (в случая  $C=U$ ) и също се наричат *закони на де Морган*.

## 2.5. Разделяне на множество на класове

Да разгледаме следните примери:

Нека  $M$  е множеството от всички ученици от дадена паралелка. То се състои от две непресичащи се подмножества:  $A$  – множеството на момичетата и  $B$  – множеството на момчетата. Казва се, че множеството  $M$  е разложено на тези подмножества, или че множеството  $M$  е разделено на класовете  $A$  и  $B$ . За множествата  $A$  и  $B$  са изпълнени условията:  $A \cup B = M$  и  $A \cap B = \emptyset$ .

Множеството на естествените числа  $\mathbb{N}$  може да се раздели на класовете  $A$  и  $B$ , където  $A$  е множеството на нечетните естествени числа, а  $B$  е множеството на четните естествени числа.

Множеството на реалните числа  $\mathbb{R}$  може да се раздели на класовете  $\mathbb{Q}$  и  $\mathbb{I}$ , защото  $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$  и  $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$ .

Множеството  $M$  на всички ъгли се разделя на три класа:  $A$  – остри,  $B$  – прави и  $C$  – тъпи ъгли. И тук обединението на  $A$ ,  $B$  и  $C$  дава множеството  $M$ , т. е.  $A \cup B \cup C = M$ , както и две по две множествата са непресичащи се, т. е.  $A \cap B = \emptyset$ ,  $A \cap C = \emptyset$ ,  $B \cap C = \emptyset$ .

**Определение 2.5.1** *Нека  $M$  е непразно множество и множествата  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  ( $n \geq 2$ ) са непразни подмножества на  $M$ . Казва се, че **множеството  $M$  е разделено на класовете  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$** , ако са изпълнени следните условия:*

1.  $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n = M$ ;
2.  $A_i \cap A_j = \emptyset$  за всички  $i=1,2,3,\dots,n$  и  $j=1,2,3,\dots,n$  и  $i \neq j$ .

Разлагането на множествата на класове стои в основата на всевъзможни класификации. Правилната класификация на обектите и понятията лежи в основата на почти всяка дейност.

## 2.6. Задачи с решения

**Задача 1.** Дадени са множествата  $A$  и  $B$ . Намерете  $A \cap B$ ,  $A \cup B$ ,  $A \setminus B$  и  $B \setminus A$ , ако:

- а)  $A = \{1; 3; 5; 8; 9\}$  и  $B = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ ;
- б)  $A = \{1; 3; 5; 7; 9\}$  и  $B = \{1; 3; 5; 7; 9; 11; 13; 15\}$ ;
- в)  $A = \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2\}$  и  $B = \{0; 1; 2\}$ ;
- г)  $A = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ е нечетно число}\}$  и  $B = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ е четно число}\}$ ;
- д)  $A = \{\blacksquare; \blacktriangle; \bullet\}$  и  $B = \{\bullet; \blacksquare; \blacktriangle\}$

*Решение.* Да намерим търсените множества за дадените множества.

- а) Понеже само елементите 1, 3 и 5 принадлежат и на двете множества, то множеството  $A \cap B = \{1; 3; 5\}$ . Съгласно Определение 2.2 за обединението намираме

$A \cup B = \{0;1;2;3;4;5;8;9\}$ . Съгласно определението за разлика намираме елементите на  $A \setminus B$ . Това са онези елементи, които са от  $A$  и не са от  $B$ , т. е. 8 и 9 са от  $A$  и не са от  $B$ . Така че  $A \setminus B = \{8;9\}$ . Разликата  $B \setminus A$  се състои от онези елементи, които са от  $B$  и не са от  $A$ , т. е. това са елементите 0, 2 и 4. Така  $B \setminus A = \{0;2;4\}$ .

б) Елементите 1, 3, 5, 7 и 9 принадлежат и на двете множества и затова сечението на  $A$  и  $B$  е множеството  $A \cap B = \{1;3;5;7;9\} = A$ . В случая сечението на двете множество съвпада с едно от дадените множества, т. е. с  $A$ . Обединението на множествата  $A$  и  $B$  е множеството

$A \cup B = \{1;3;5;7;9;11;13;15\} = B$ . В случая обединението на двете множества съвпада с едно от дадените, т. е. с  $B$ . Забелязваме, че всеки елемент на  $A$  е елемент и на  $B$  и затова разликата  $A \setminus B$  не притежава елементи, т. е.  $A \setminus B = \emptyset$ . Има елементи от множеството  $B$ , които не принадлежат на множеството  $A$  и затова  $B \setminus A = \{11;13;15\}$ .

в) Елементите 0, 1 и 2 принадлежат и на двете множества. Тогава  $A \cap B = \{0;1;2\} = B$ . И в този случай сечението на двете множество съвпада с едно от дадените множества, т. е. с  $B$ . Да намерим тяхното обединение

$$A \cup B = \{-4;-3;-2;-1;0;1;2\} = A.$$

Разликата  $A \setminus B$  се състои от онези елементи, които са от  $A$  и не са от  $B$ , т. е.  $A \setminus B = \{-4;-3;-2;-1\}$ . Очевидно е, че разликата  $B \setminus A$  не притежава елементи, т. е.  $B \setminus A = \emptyset$ .

г) Множествата  $A$  и  $B$  са непресичащи се, т. е.  $A \cap B = \emptyset$ . Тяхното обединение е множеството на естествените числа, т. е.  $A \cup B = \mathbb{N}$ . За разликите намираме, че  $A \setminus B = \emptyset$  и  $B \setminus A = \emptyset$ .

д) Забелязваме, че  $A = B$ . Тогава  $A \cap B = A$ ,  $A \cup B = A$ ,  $A \setminus B = B \setminus A = A \setminus A = \emptyset$ .

**Задача 2.** Ако  $A$  е множеството на равностранный триъгълници, а  $B$  е множеството на равнобедрените триъгълници, то кое от следните твърдения е вярно:

а)  $A \subset B$ ; б)  $A \cup B = B$ ; в)  $A \cup B = A$ ; г)  $A \cap B = A$ .

*Решение.* а) Понеже всеки равнобедрен триъгълник е и равнобедрен, то  $A \subset B$ , т. е. твърдението е вярно.

б) От факта, че  $A$  е подмножество на  $B$  и определението за операцията обединение следва, че  $A \cup B = B$  и следователно твърдението е вярно.

в) От предната подточка знаем, че  $A \cup B = B$ ,  $A \neq B$  и следователно твърдението не е вярно.

г) От това, че  $A \subset B$  и определението за сечение на множества следва, че  $A \cap B = A$ , т. е. твърдението е вярно.

**Задача 3.** Да се намерят  $x$  и  $y$ , ако  $A = \{2; 3; 6\}$ ,  $B = \{2; 4; x; 6\}$ ,  $C = \{1; 3; 6; x; y\}$ ,  $A \cup B = \{2; 3; 4; 6; 7\}$ ,  $C \cap B = \{2; 6; 7\}$ .

*Решение.* От определението за обединение на множества получаваме, че  $A \cup B = \{2; 3; 4; 6; x\} = \{2; 3; 4; 6; 7\}$ . Следователно  $x = 7$ . Но тогава  $C = \{1; 3; 6; 7; y\}$ . От това, че  $2 \in C \cap B$  следва, че  $2 \in C$  и така намираме, че  $y = 2$ .

И така намерихме, че  $x = 7$  и  $y = 2$ .

**Задача 4.** Като се приеме за универсално множество множеството на естествените числа  $\mathbb{N}$ , да се определят допълненията на следните множества:

а)  $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ ;

б)  $B = \{21; 22; 23; 24\}$ ;

в)  $C = \{1; 3; 5; 7; 9; 11; 13; \dots\}$ ;

г)  $D = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ е едноцифрено или двуцифрено число}\}$ .

*Решение.* а) Дескриптивният запис на множеството  $A$  е  $A = \{x \in \mathbb{N} / x \leq 5\}$ . Тогава от определението за допълнение на множество получаваме, че допълнението на  $A$  е

$$\bar{A} = \{x \in \mathbb{N} / x > 5\}.$$

б) Дескриптивният запис на множеството  $B$  е

$B = \{x \in \mathbb{N} / 21 \leq x \leq 24\}$ . И отново като използваме определението за допълнение получаваме, че допълнението на множеството  $B$  е  $\bar{B} = \{x \in \mathbb{N} / x < 21 \text{ или } x > 24\}$ .



в) Множеството  $C$  се състои от всички нечетни естествени числа. Тогава неговото допълнение е множеството, което се състои от всички четни естествени числа, т. е.

$$\bar{C} = \{x \in \mathbb{N} / x = 2k, k \in \mathbb{N}\}.$$

г) Използвайки определението за допълнение на множество получаваме, че  $\bar{D} = \{x \in \mathbb{N} / x \geq 100\}$ .

**Задача 5.** Като се приеме за универсално множеството на триъгълниците в равнината, да се определят допълненията на следните множества:

а)  $A$  – множеството на правоъгълните триъгълници;

б)  $B$  – множеството на равнобедрените триъгълници.

*Решение.* а) Според големините на ъглите множеството на триъгълниците в равнината се разделя на три подмножества: остроъгълни, правоъгълни и тъпоъгълни. Затова допълнението на множеството  $A$  е множеството на остроъгълните или тъпоъгълните триъгълници.

б) Според дължините на страните множеството на триъгълниците се разделя на три подмножества: равнострани, равнобедрени и разностранни. Но равностранный триъгълници са и равнобедрени, т. е. множеството на равностранный триъгълници е подмножество на разглежданото множество  $B$ . И затова допълнението на множеството  $B$  е множеството на разностранните триъгълници.

**Задача 6.** Нека  $A$  и  $B$  са крайни множества. Ако с  $n(A)$  и  $n(B)$  са означени броят на елементите съответно на множествата  $A$  и  $B$ , то изразете броя на елементите на обединението  $A \cup B$ .

*Решение.* Ако множествата  $A$  и  $B$  нямат общи елементи, то в тяхното обединение  $A \cup B$  се съдържат  $n(A) + n(B)$  елементи:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B).$$

Ако пък сечението  $A \cap B$  не е празно, то от сумата

$n(A) + n(B)$  трябва да се извадят  $n(A \cap B)$ , защото елементите на  $A \cap B$  влизат и в  $A$ , и в  $B$ , а в  $A \cup B$  те влизат само един път. По такъв начин в общия случай имаме

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

**Задача 7.** В един клас има 24 ученици с отлични оценки по математика или по български език. От тях 12 имат отлични оценки по математика и 15 – по български език. Колко са учениците, които имат отлични оценки и по двата предмета?

*Решение.* Нека с  $A$  да означим множеството на учениците с отлични оценки по математика, с  $B$  – множеството на учениците с отлични оценки по български език. Тогава  $n(A \cup B) = 24$ ,  $n(A) = 12$  и  $n(B) = 15$ . И като заместим данните във формулата

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \text{ получаваме} \\ 24 &= 12 + 15 - n(A \cap B). \end{aligned}$$

Получаваме, че  $n(A \cap B) = 3$ , т. е. учениците, които имат отлични оценки и по двата предмета са 3.

**Задача 8.** Нека  $A$ ,  $B$  и  $C$  са крайни множества. Ако с  $n(A)$ ,  $n(B)$  и  $n(C)$  са означени броят на елементите съответно на множествата  $A$ ,  $B$  и  $C$ , то да се изрази броят на елементите на обединението  $A \cup B \cup C$ .

*Решение.* Нека множествата  $A$ ,  $B$  и  $C$  две по две се пресичат.

Понеже  $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C$ , то

$$n(A \cup B \cup C) = n[(A \cup B) \cup C].$$

Сега ще използваме резултата, получен в **задача 6**. Имаме, че

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) &= n[(A \cup B) \cup C] = n(A \cup B) + n(C) - n[(A \cup B) \cap C] = \\ &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) + n(C) - n[(A \cup B) \cap C]. \end{aligned}$$

Сега трябва да пресметнем  $n[(A \cup B) \cap C]$ . Съгласно дистрибутивния закон можем да запишем, че  $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ . Сега вече търсеният брой  $n[(A \cup B) \cap C]$  можем да пресметнем.

$$n[(A \cup B) \cap C] = n[(A \cap C) \cup (B \cap C)] = \\ n(A \cap C) + n(B \cap C) - n[(A \cap C) \cap (B \cap C)] = \\ n(A \cap C) + n(B \cap C) - n(A \cap B \cap C).$$

Така окончателно получаваме, че

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + \\ + n(A \cap B \cap C).$$

**Задача 9.** Седем от децата в една група обичат ябълки, 6 – обичат круши, а 5 – праскови. Четири обичат ябълки и круши, 3 – ябълки и праскови, 2 – круши и праскови. Едно дете обича и трите плода. Колко са децата в групата?

*Решение.* Да означим с  $A$  – множеството от децата, които обичат ябълки, с  $B$  – множеството от децата, които обичат круши, с  $C$  – множеството от децата, които обичат праскови. Известно е, че  $n(A)=7$ ,  $n(B)=6$  и  $n(C)=5$ . Още знаем, че  $n(A \cap B) = 4$ ,  $n(A \cap C) = 3$ ,  $n(B \cap C) = 2$ ,  $n(A \cap B \cap C) = 1$ .

Тогава

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + \\ + n(A \cap B \cap C) = 7 + 6 + 5 - 4 - 3 - 2 + 1 = 10.$$

И така намерихме, че децата в групата са 10.

**Задача 10.** Да се намерят класовете, на които се разделя множеството от точки в равнината от окръжност, лежаща в нея.

*Решение.* Да означим с  $M$  множеството от точки в равнината и с  $K(O, r)$  – окръжност в равнината с център точката  $O$  и радиус  $r$ . Да означим с  $A$  – множеството от точки, които са вътрешни за окръжността  $K(O, r)$ , с  $B$  – множеството от точки, лежащи на окръжността  $K(O, r)$  и с  $C$  – множеството от точки, външни за окръжността  $K(O, r)$ . Лесно се забелязва, че  $A \cup B \cup C = M$ , както и че две по две множествата са непресичащи се, т. е.  $A \cap B = \emptyset$ ,  $A \cap C = \emptyset$ ,  $B \cap C = \emptyset$ . Освен това множествата  $A$ ,  $B$  и  $C$  са непразни подмножества на  $M$ . Следователно множествата  $A$ ,  $B$  и  $C$  са

класовете, на които се разделя множеството от точки в равнината М.

## 2.7. Задачи за самостоятелна работа

**Задача 1.** Дадени са множествата А и В. Намерете  $A \cap B$  и  $A \cup B$ , ако:

- а)  $A=\{a;b;c;d\}$  и  $B=\{d;e;f\}$ ;
- б)  $A=\{\text{София; Пловдив; Варна}\}$  и  $B=\{\text{Букурещ; Атина; София}\}$ ;
- в)  $A=\{\text{Шумен; Плиска; Велики Преслав}\}$  и  $B=\{\text{Велико Търново}\}$ ;
- г)  $A=\{x \in \mathbb{N} / x \text{ е делител на } 6\}$  и  $B=\{x \in \mathbb{N} / x \text{ е делител на } 9\}$ ;
- д)  $A=\{x \in \mathbb{Z} / x \text{ е делител на } 6\}$  и  $B=\{x \in \mathbb{Z} / x \text{ е делител на } 9\}$ ;
- е)  $A=\{x \in \mathbb{N} / x \text{ е двуцифрено число}\}$  и  $B=\{x \in \mathbb{N} / x \geq 10\}$ ;
- ж)  $A=\{x \in \mathbb{N} / x < 1\}$  и  $B=\{x \in \mathbb{N} / x \leq 1\}$ ;
- з)  $A=\{x \in \mathbb{N}_0 / x \leq 1\}$  и  $B=\{x \in \mathbb{N}_0 / x < 1\}$ ;
- и)  $A=\{x \in \mathbb{Z} / -1 < x < 5\}$  и  $B=\{x \in \mathbb{Z} / -1 \leq x \leq 5\}$ .

**Задача 2.** Намерете множествата  $\mathbb{N} \cup \mathbb{N}_0$ ,  $\mathbb{N} \cap \mathbb{N}_0$ ,  $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{N}_0 \cap \mathbb{Z}$ .

**Задача 3.** Дадени са множествата А и В. Намерете  $A \setminus B$  и  $B \setminus A$ , ако:

- а)  $A=\{a;o;e;i\}$  и  $B=\{o;e;f\}$ ;
- б)  $A=\{\text{София; Белград; Атина}\}$  и  $B=\{\text{Букурещ; Атина; София}\}$ ;
- в)  $A=\{\text{Париж; Мадрид; Виена}\}$  и  $B=\{\text{Варшава; Москва}\}$ ;
- г)  $A=\{x \in \mathbb{N} / x \text{ е делител на } 4\}$  и  $B=\{x \in \mathbb{N} / x \text{ е делител на } 8\}$ ;
- д)  $A=\{x \in \mathbb{Z} / x \text{ е делител на } 5\}$  и  $B=\{x \in \mathbb{Z} / x \text{ е делител на } 3\}$ ;
- е)  $A=\{x \in \mathbb{N} / x \text{ е трицифрено число}\}$  и  $B=\{x \in \mathbb{N} / x \geq 10\}$ ;
- ж)  $A=\{x \in \mathbb{N} / x < 1\}$  и  $B=\{x \in \mathbb{N} / x \leq 1\}$ ;
- з)  $A=\{x \in \mathbb{N}_0 / x \leq 1\}$  и  $B=\{x \in \mathbb{N}_0 / x < 1\}$ ;

и)  $A = \{x \in \mathbb{Z} / -2 < x < 4\}$  и  $B = \{x \in \mathbb{Z} / -1 \leq x \leq 5\}$ .

**Задача 4.** Намерете множествата  $\mathbb{N}_0 \setminus \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0$  и  $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ .

**Задача 5.** Да се намерят  $x$  и  $y$ , ако  $A = \{2; 4; 5\}$ ,  
 $B = \{2; 3; x; 6\}$ ,  $C = \{4; 8; x; y\}$ ,  
 $A \cap B = \{2; 5\}$  и  $A \subset C$ .

**Задача 6.** Вместо  $*$  поставете знак  $\cup$  или  $\cap$  така, че да се получат верни равенства:

а)  $A \cap B = B * A$ ;  $A \cup B = B * A$ ;

б)  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cap C)$ ;  $(A * B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ ;

в)  $(A \cup B) * C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ ;

$(A * B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ ;

г)  $\overline{A \cup B} = \overline{A} * \overline{B}$ ;  $\overline{A \cap B} = \overline{A} * \overline{B}$ .

**Задача 7.** Като се приеме за универсално множество множеството на целите числа  $\mathbb{Z}$ , да се определят допълненията на следните множества:

а)  $A = \{x \in \mathbb{Z} / |x| = 5\}$ ;

б)  $B = \{x \in \mathbb{Z} / -2 < x < 3\}$ ;

в)  $C = \{x \in \mathbb{Z} / |x| \leq 6\}$ ;

г)  $D = \{x \in \mathbb{Z} / x < -3 \text{ или } x \geq 3\}$ .

**Задача 8.** Да се начертаят диаграмите на Ойлер-Вен за допълненията на следните множества:

а)  $A \cup B$ ; б)  $A \cap B$ ; в)  $A \setminus B$ ; г)  $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ .

**Задача 9.** На паркинг колите са от марка Опел или са черни. Опелите са 15, а черните коли са 27. Седем от опелите са черни. Колко са колите на паркинга?

**Задача 10.** В специалност «Начална училищна педагогика с чужд език» студентите задължително избират поне един чужд език английски или немски. Двадесет студента изучават английски език, 17 – немски език и 7 студента изучават и двата езика. Колко студента се обучават в тази специалност?

**Задача 11.** В клуб « Приятели на животните» членуват 200 човека, като всеки от тях има куче или котка или и двете. Притежателите на кучета са 175, на котки – 115.

Колко човека притежават и двете? Колко човека имат куче, но нямат котка?

**Задача 12.** Мъж и жена създали семейство след като всеки от тях вече имал деца. Няколко години след брака в къщата се разиграва бурна сцена, в която участвали всичките 12 деца. Жената, разтревожена от сцената, извикала на мъжа си: «Скъпи, моите и твоите деца бият нашите деца». Кой от двата «лагера» има числено превъзходство, ако всеки от родителите има по 9 собствени деца?

**Задача 13.** Във физкултурен салон 16 от топките са шарени, а 11 – волейболни. Колко топки има всичко в салона, ако 6 от волейболните топки са шарени? (Великденско математическо състезание 2012г., 4.клас)

**Задача 14.** Лъжците са с дълъг нос или с къси крака, а някои са едновременно дългоноси и късокраки. Града на глупците обитават общо 100 лъжци, от които 20 са и късокраки, и дългоноси. Ако всички дългоноси лъжци са 50, колко са късокраките? (Великденско математическо състезание 2007г., 4.клас)

**Задача 15.** През един учебен ден учениците от един клас от 30 ученика имат математика и музика. В часа по математика присъстват 23-ма ученика, а по музика – 12. И в двата часа са присъствали 10 ученика. Да се намери:

- а) колко ученика са присъствали само по математика?
- б) колко ученика са присъствали само по музика?
- в) колко ученика са отсъствали и от двата часа?

**Задача 16.** В 4. и 5. клас на едно училище преподават общо 16 учители. Известно е, че в четвърти клас преподават 7 учители, а в пети –12. Колко са учителите, които преподават:

- а) едновременно в двата класа;
- б) само в 4. клас;
- в) само в 5.клас?

**Задача 17.** В школа по музика има 12 цигулари, 14 пианисти и 13 акордеонисти. В школата участват 30 души и всеки свири поне на един инструмент. Ако никой от цигуларите не е акордеонист, а 5 са пианисти, то колко от пианистите са акордеонисти?

**Задача 18.** От 26 студенти спортисти, които са плувци или скиори или футболисти, плувците са 9, скиорите – 11, а футболистите – 13. Ако никой от футболистите не е плувец, но 4 от плувците са скиори, колко от скиорите са футболисти?

**Задача 19.** В един спортен клуб членуват 42 души. От тях 16 тренират баскетбол, 17 – хоккей, 18 – волейбол. Баскетбол и хоккей играят едновременно 4 души, волейбол и баскетбол – 3 души, волейбол и хоккей – 5 души, а трима са треньори.

а) Намерете колко души в този клуб тренират и трите спорта?

б) А колко души тренират само един вид спорт?

**Задача 20.** Всеки ученик от класа участва поне в един от кръжоците по литература, по музика или по математика. Пет ученици участват и в трите кръжока, девет участват в по два кръжока. Осем ученика участват и в литературния, и в математическия кръжок. Също толкова ученици участват и в математическия и в музикалния кръжок. Двадесет ученика участват само в един кръжок, от тях 5 ученика са в литературния и 5 ученика са в математическия кръжок. Колко са учениците в класа?

**Задача 21.** В едно училище всички ученици от четвърти клас изучават един или два западни езика, като 50 ученици изучават английски език, 33 – немски език, 13 – испански, 17 – френски, а 20 изучават едновременно английски и немски, 10 – английски и френски, 8 – немски и испански. Колко са четвъртокласниците в това училище?

**Задача 22.** Образува ли фамилията от множества  $\{A, B, C\}$  разделяне на множеството  $\mathbb{N}_0$  на класове, ако:

а)  $A=\{0\}$ ,  $B=\{1;2;3;4\}$ ,  $C=\{x \in \mathbb{N}/x \geq 5\}$ ;

б)  $A=\{0;1;2\}$ ,  $B=\{x \in \mathbb{N}/2 < x < 3\}$ ,  $C=\{x \in \mathbb{N}/x \geq 3\}$ ;

в)  $A=\{-1;0\}$ ,  $B=\{1;2\}$ ,  $C=\{x \in \mathbb{N}/x \geq 3\}$ ;

г)  $A=\{0;1;2\}$ ,  $B=\{2;3;4\}$ ,  $C=\{x \in \mathbb{N}/x \geq 5\}$ ;

д)  $A=\{1\}$ ,  $B=\{2;3;4;5\}$ ,  $C=\{x \in \mathbb{N}/x > 5\}$ ?

Обосновете отговора си.

### 3. Декартово произведение на множества

#### 3.1. Понятие за декартово произведение на множества

В предходния параграф разгледахме операциите сечение, обединение и разлика на множества. В този параграф ще разгледаме още една операция между множества – декартово произведение. За разлика от множествата  $A \cap B$ ,  $A \cup B$  и  $A \setminus B$ , декартовото произведение на множествата  $A$  и  $B$  е множество, елементите на което са от естество различно от това на елементите на изходните множества  $A$  и  $B$ .

**Определение 3.1.1.** Нека  $A$  и  $B$  са непразни множества и  $a \in A, b \in B$ . Казва се, че елементите  $a$  и  $b$  образуват **наредена двойка** ( $a; b$ ), ако елементът  $a$  е приет за първи, а елементът  $b$  за втори.

Елементите  $a$  и  $b$  се наричат съответно **първа и втора компонента** на наредената двойка ( $a; b$ ).

*Например:* Координатите на точка в равнината са пример на наредена двойка,  $P(5;6)$ . Числото 5 е първата координата (компонента) и 6 е втората координата (компонента). Ако разгледаме точката  $Q(6;5)$ , то това вече е друга точка в равнината и 6 е първата координата, а 5 е втората координата. От числата 5 и 6 можем да образуваме двуцифреното число 56. Така това число, с първа компонента 5 и втора – 6 можем да разглеждаме като



наредената двойка  $(5;6)$  , но в случая са изпуснати скобите. Ясно е, че ако разместим местата на компонентите, ще получим друго двуцифрено число – 65. С цифрите 5 и 6 можем да образуваме дробта  $\frac{5}{6}$  , която е друг пример на наредена двойка с първа компонента 5 и втора компонента 6. Ако разменим местата на компонентите, ще получим друга наредена двойка и това е дробта  $\frac{6}{5}$  , която е различна от  $\frac{5}{6}$  .

**Определение 3.1.2.** *Наредените двойки  $(a;b)$  и  $(c;d)$  са равни, когато имат равни първи и равни втори компоненти.*

Аналогично може да се въведе наредена тройка, четворка, а в общия случай  $n$ -торка , където  $n \geq 2$ .

**Определение 3.1.3.** *Нека  $A$  и  $B$  са непразни множества. Декартово произведение на множествата  $A$  и  $B$  се нарича множеството  $A \times B$  от всички наредени двойки  $(a; b)$ , за които  $a \in A$  и  $b \in B$ . Операцията, чрез която от  $A$  и  $B$  се получава  $A \times B$ , има същото название.*

Ако  $A = \emptyset$  или  $B = \emptyset$  се приема, че  $A \times B = \emptyset$ .

Произведението  $A \times B$  се нарича декартово в чест на великия френски философ и математик Рене Декарт (1596 – 1650) .

**Определение 3.1.4.** Множеството  $A \times A$  се нарича **декартов квадрат на  $A$**  и се означава с  $A^2$ .

## 3.2. Начини на задаване на декартово произведение на множества

Понеже декартовото произведение на множества е множество, то може да се представи по познатите ни начини за задаване на множество.

*Например.* Нека  $A = \{1;2;3\}$  и  $B = \{3;4\}$ . Да запишем конструктивно множествата  $A \times B$ ,  $B \times A$ ,  $A^2$  и  $B^2$ .

$$A \times B = \{(1;3); (1;4); (2;3); (2;4); (3;3); (3;4)\};$$

$$B \times A = \{(3;1); (3;2); ((3;3); (4;1); (4;2); (4;3)\};$$

$$A^2 = A \times A = \{(1;1); (1;2); (1;3); (2;1); (2;2); (2;3); (3;1); (3;2); (3;3)\};$$

$$B^2 = B \times B = \{(3;3); (3;4); (4;3); (4;4)\}.$$

Когато множествата  $A$  и  $B$  са крайни, тяхното декартово произведение може да се зададе и таблично. Да зададем таблично декартовото произведение на  $A$  и  $B$ , т.е.  $A \times B$  в таблица 1.

| B \ A | 3     | 4     |
|-------|-------|-------|
| 1     | (1;3) | (1;4) |
| 2     | (2;3) | (2;4) |
| 3     | (3;3) | (3;4) |

табл.1

Декартовото произведение на  $B$  и  $A$ , т.е.  $B \times A$  е зададено таблично в таблица 2.

| A \ B | 1     | 2     | 3     |
|-------|-------|-------|-------|
| 3     | (3;1) | (3;2) | (3;3) |
| 4     | (4;1) | (4;2) | (4;3) |

табл.2

В таблици 3 и 4 са зададени съответно декартовия квадрат на  $A$  и декартовия квадрат на  $B$ , т.е.

$$A^2 = A \times A \text{ и } B^2 = B \times B.$$

| A \ A | 1     | 2     | 3     |
|-------|-------|-------|-------|
| 1     | (1;1) | (1;2) | (1;3) |
| 2     | (2;1) | (2;2) | (2;3) |
| 3     | (3;1) | (3;2) | (3;3) |

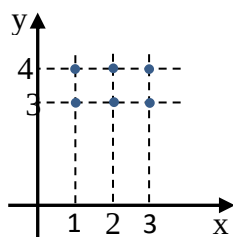
табл.3

| B \ B | 3     | 4     |
|-------|-------|-------|
| 3     | (3;3) | (3;4) |
| 4     | (4;3) | (4;4) |

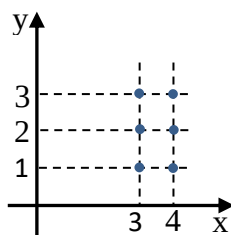
табл.4

Ако множествата  $A$  и  $B$  са числови, тяхното декартово произведение може да се изобрази графично по следния

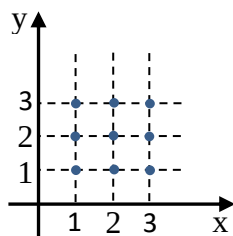
начин. В равнината се избира декартова координатна система. Понеже елементите на декартовото произведение  $A \times B$  са наредени двойки числа, то тези двойки числа задават координатите на съответните точки спрямо избраната координатна система, като елементите на първото множество  $A$  се разполагат по абсцисната ос  $Ox$ , а елементите на второто множество  $B$  – върху ординатната ос  $Oy$ . На чертеж 1 е изобразено множеството  $A \times B$ , на чертеж 2 е изобразено множеството  $B \times A$ , на чертеж. 3 – множеството  $A^2$ , на чертеж 4 – множеството  $B^2$ .



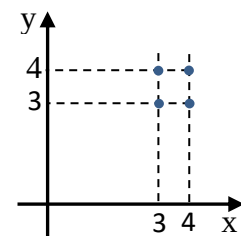
Черт.1



Черт.2



Черт.3



Черт.4

### 3.3. Свойства на декартовото произведение

Нека отново да разгледаме множествата  $A=\{1;2;3\}$  и  $B=\{3;4\}$ . Тяхното декартово произведение  $A \times B$  и  $B \times A$  представихме конструктивно, таблично и графично. И от таблици 1 и 2, и от чертежи 1 и 2 лесно се забелязва, че  $A \times B \neq B \times A$ . Операцията декартово произведение **не**

**притежава свойството комутативност**, за разлика от операциите обединение и сечение.

Разглеждайки отново множествата  $A$  и  $B$ , можем да отбележим, че множеството  $A$  има 3 елемента, множеството  $B$  има 2 елемента. Тяхното декартово произведение има  $6 = 3 \cdot 2$  елемента. Множеството  $A^2 = A \times A$  има 9 елемента, т. е.  $9 = 3 \cdot 3$ . Множеството  $B^2 = B \times B$  има 4 елемента, т.е.  $4 = 2 \cdot 2$ . Разгледаните примери показват, че вероятно съществува зависимост между броя на елементите на дадените множества  $A$  и  $B$  и на тяхното декартово произведение, когато тези множества са крайни.

Може да се покаже, че ако множеството  $A$  има  $n$  елемента, а множеството  $B$  има  $m$  елемента, то тяхното декартово произведение има  $n \cdot m$  елемента, където  $n$  и  $m$  са от  $\mathbb{N}_0$ .

### 3.4. Задачи с решения

**Задача 1.** Кой от следните наредени двойки са равни и при какво условие:

а)  $(x; -1)$  и  $(1; y)$ ; б)  $(2; x^2)$  и  $(y; -1)$ ; в)  $(|x|; -y)$  и  $(x; |y|)$ ; г)  $(\sqrt{x^2}; \sqrt{y^2})$  и  $(|x|; |y|)$ .

*Решение.* От Определение 3.2. следва, че

- а)  $(x; -1) = (1; y)$  ако  $x=1$  и  $y=-1$ ;  
б)  $(2; x^2) = (y; -1)$  ако  $y=2$  и  $x^2 = -1$ . Но  $x^2 \geq 0$  за всяко реално число  $x$ . Така че равенството  $x^2 = -1$  е изпълнимо в  $\mathbb{R}$  и следователно  $(2; x^2) \neq (y; -1)$ ;  
в)  $(|x|; -y) = (x; |y|)$ , когато  $|x| = x$  и  $-y = |y|$ . А това е възможно, ако  $x \geq 0$  и  $y \leq 0$ , съгласно определението за абсолютна стойност;  
г)  $(\sqrt{x^2}; \sqrt{y^2}) = (|x|; |y|)$ , когато  $\sqrt{x^2} = |x|$  и  $\sqrt{y^2} = |y|$ . Тези равенства са възможни за всяко реално число  $x$  и  $y$ .

**Задача 2.** Дадени са множествата  $A = \{a; c\}$  и  $B = \{b; 4; c\}$ , където  $a \neq b \neq c$ . Определете  $a$ ,  $b$  и  $c$  така, че

$$(1;2) \in A \times B, (2;3) \in B \times A, (1;3) \notin A \times B.$$

*Решение.* От определението за декартово произведение и от това, че по условие  $(1;2) \in A \times B$  следва, че  $1 \in A$  и  $2 \in B$ . От това, че  $(2;3) \in B \times A$  следва, че  $2 \in B$  и  $3 \in A$ . Следователно  $1 \in A$ ,  $3 \in A$  и  $2 \in B$ . От факта, че  $(1;3) \notin A \times B$  следва, че  $1 \notin A$  или  $3 \notin B$ . Но вече знаем, че  $1 \in A$  и затова остава възможността  $3 \notin B$ . Така получихме, че  $1 \in A$ ,  $3 \in A$ ,  $2 \in B$  и  $3 \notin B$ , откъдето следва, че  $c \neq 3$ .

Следователно  $a=3$ ,  $b=2$  и  $c=1$ .

**Задача 3.** В общия случай декартовото произведение не е комутативно, т. е.  $A \times B \neq B \times A$ . При какви допълнителни условия ще е в сила  $A \times B = B \times A$ ?

*Решение.* Ако  $A = \emptyset$ , то  $A \times B = \emptyset$  и  $B \times A = \emptyset$ , така че условието ще е изпълнено.

Същите разсъждения можем да проведем и ако  $B = \emptyset$ .

Ако  $A \neq \emptyset$  и  $B \neq \emptyset$  равенството  $A \times B = B \times A$  е налице само ако  $A=B$ .

### 3.5. Задачи за самостоятелна работа

**Задача 1.** Наредени  $n$  – торки ли са:

- а) цифрите в записа на едно трицифрено число;
- б) инициалите на всеки човек;
- в) елементите на множеството  $A = \{2;3;33\}$ ;
- г) основата и степента на операцията степенуване;
- д) буквите в дадена дума;
- е) вашият единен граждански номер;
- ж) имената на дните в седмицата.

**Задача 2.** Равни ли са съответните двойки множества:

- а)  $A = \{(1;2);(11;22);(111;222)\}$  и  $B = \{(1;2);(11;22);(222;111)\}$ ;
- б)  $C = \{(3;5);(7;9)\}$  и  $D = \{(7;9);(3;5)\}$ .

**Задача 3.** Да се запишат всички обикновени дроби, на които числителят е от множеството  $\{1;2;3\}$ , а знаменателят е от множеството  $\{4;5\}$ .

**Задача 4.** Дадени са множествата  $A=\{-1;0;1\}$  и  $B=\{4;2\}$ . Да се зададат конструктивно, таблично и графично множествата  $A \times B$ ,  $B \times A$ ,  $A^2$  и  $B^2$ .

**Задача 5.** Дадени са множествата  $A=\{1;4\}$  и  $B=\{1;3;5\}$ . Да се зададат конструктивно множествата  $A \times B$ ,  $B \times A$ ,  $A^2$ ,  $B^2$ ,  $(A \times B) \cap (B \times A)$  и  $(A \times B) \setminus (B \times A)$ .

**Задача 6.** Дадени са множествата  $A=\{\text{кой; къде; кога; как}\}$ ,  $B=\{\text{то}\}$  и  $C=\{\text{ни; вся; ня}\}$ . Задайте конструктивно множествата  $A \times B$  и  $C \times A$ , като запишете съответните наредени двойки без скоби.

**Задача 7.** Дадени са множествата  $A=\{\text{уч}\}$  и  $B=\{\text{а; иш; и; им; ите; ат}\}$ . Задайте конструктивно множеството  $A \times B$ , като запишете съответните наредени двойки без скоби.

**Задача 8.** Ако  $A=\{2;3;4;5;6\}$ ,  $B=\{7;8;9;10;11;12;13;14\}$ , то определете броя на елементите на  $A \times B$  без да го представяте конструктивно.

## 4. Двучленна релация

### 4.1. Понятие за двучленна релация

**Определение 4.1.1.** Нека  $A$  и  $B$  са непразни множества. Всяко подмножество на декартовото произведение  $A \times B$  се нарича **двучленна релация** от  $A$  в  $B$ .

Всяка двучленна релация от  $A$  в  $A$  се нарича двучленна релация в  $A$ .

За означаване на релациите най-често се използват малките букви от гръцката азбука:  $\rho$ ,  $\mu$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$  и др.

*Например.* Нека  $A=\{1;2;3\}$ ,  $B=\{2;3;4;5\}$  и  $\rho$  е релация от  $A$  в  $B$ , за която  $x \rho y \Leftrightarrow x = y$ .

$$\rho = \{(2;2);(3;3)\}.$$

**Определение 4.1.2.** Нека  $\rho$  е двучленна релация от  $A$  в  $B$ . Множеството  $X$  от първите компоненти на елементите на  $\rho$  се нарича **дефиниционна област** на  $\rho$ , а множеството

$Y$  от вторите компоненти на елементите на  $\rho$  – множество от стойностите на  $\rho$ .

От определението следва, че  $X \subset A$ ,  $Y \subset B$  и  $X \times Y \subset A \times B$ .

## 4.2. Начини за представяне на двучленна релация

В изложението по-долу ще разглеждаме само двучленни релации и затова за по- кратко ще използваме термина релация.

Релациите са подмножества на декартовото произведение и затова те се представят по начините по които се задава декартовото произведение.

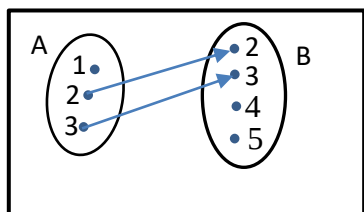
Нека  $A = \{1; 2; 3\}$ ,  $B = \{2; 3; 4; 5\}$  и  $\rho$  е релация от  $A$  в  $B$ , за която  $x\rho y \Leftrightarrow x = y$ .

$\rho = \{(2; 2); (3; 3)\}$ . Тук релацията е зададена конструктивно. Дескриптивно тя има вида  $\rho = \{(x; y) \in A \times B / x = y\}$ . Таблично релацията  $\rho$  се дава както  $A \times B$ , но не се записват наредените двойки, а в клетките на наредените двойки  $(x; y) \in \rho$  се поставя някакъв знак или се заштриховат, както е направено в таблица 5.

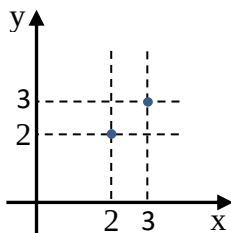
На чертеж 5 релацията  $\rho$  е изобразена графично чрез диаграми и стрелки. Понеже множествата  $A$  и  $B$  са числови, то релацията  $\rho$  може да се изобрази и чрез точки в равнината (черт. 6).

| $A \backslash B$ | 2 | 3 | 4 | 5 |
|------------------|---|---|---|---|
| 1                |   |   |   |   |
| 2                |   |   |   |   |
| 3                |   |   |   |   |

Табл.5



Черт.5



Черт.6

### 4.3. Обратна релация

**Определение 4.3.1.** Нека  $\rho$  е релация от  $A$  в  $B$ .

Релацията  $\rho^{-1}$  от  $B$  в  $A$ , за която

$\rho^{-1} = \{(y; x) / (x; y) \in \rho\}$  се нарича **обратна** на  $\rho$ .

От определението следва, че дефиниционната област на  $\rho^{-1}$  е множеството от стойности на  $\rho$ , а множеството от стойности на  $\rho^{-1}$  е дефиниционната област на релацията  $\rho$ .

Например. Ако  $\rho$  е релацията по-малко ( $<$ ) в множеството на естествените числа  $\mathbb{N}$ , то нейната обратна, е релацията по - голямо ( $>$ ) в същото множество.

При графично изобразяване на релацията  $\rho^{-1}$  от  $B$  в  $A$  чрез диаграми и стрелки, стрелките излизат от множеството  $B$  и са насочени към множеството  $A$ .

### 4.4. Свойства на релациите

Ще разглеждаме само релации, които са определени в непразно множество  $A$ .

**Определение 4.4.1.** Релацията  $\rho$ , зададена в множеството  $A$ , притежава свойството **рефлексивност**, ако за всяко  $x \in A$  е изпълнено условието  $x\rho x$ .

Например: Релацията „равно“ в множеството на реалните числа  $\mathbb{R}$  притежава свойството рефлексивност, защото за всяко  $x \in \mathbb{R}$  е изпълнено  $x=x$ . Релацията „по-малко или



равно“ в множеството  $\mathbb{R}$  също притежава това свойство, защото за всяко  $x \in \mathbb{R}$  е изпълнено  $x \leq x$ .

Релацията  $\rho$  не притежава свойството рефлексивност в  $A$ , ако съществува  $x \in A$ , за което не е изпълнено условието  $x\rho x$ .

*Например:* Релацията „по-малко“ в множеството  $\mathbb{R}$  не притежава свойството рефлексивност, защото за никое  $x \in \mathbb{R}$  не е изпълнено  $x < x$ .

**Определение 4.4.2.** Релацията  $\rho$ , зададена в множеството  $A$ , притежава свойството **симетричност**, ако за всеки два елемента  $x, y \in A$  от верността на  $x\rho y$  следва и верността на  $y\rho x$ .

*Например:* Релацията „равенство на множества“ притежава свойството симетричност.

Релацията  $\rho$  в  $A$  не притежава това свойство, ако съществуват  $x, y \in A$  за които  $x\rho y$ , но не е изпълнено  $y\rho x$ .

*Например:* Релацията „по-малко“ в множеството  $\mathbb{R}$  не притежава свойството симетричност, защото от това, че  $5 < 6$  не следва, че  $6 < 5$ .

**Определение 4.4.3.** Релацията  $\rho$ , зададена в множеството  $A$ , притежава свойството **антисиметричност**, ако за всеки два елемента  $x, y \in A$  от  $x\rho y$  и  $y\rho x$  следва, че  $x=y$ .

*Например:* Релацията „включване на множества“ притежава свойството антисиметричност, защото от Т 1.2. имаме, че за всеки две множества  $A$  и  $B$ , ако  $A \subseteq B$  и  $B \subseteq A$ , то  $A=B$ .

Релацията  $\rho$ , зададена в множеството  $A$ , не притежава свойството антисиметричност, ако съществуват два елемента  $x, y \in A$ , за които  $x\rho y$  и  $y\rho x$ , но  $x \neq y$ .

*Например:* Релацията „по-малко“ в множеството  $\mathbb{R}$  не притежава свойството антисиметричност, защото условията  $x < y$  и  $y < x$  са несъвместими за всеки  $x, y \in \mathbb{R}$ .

**Определение 4.4.4.** Релацията  $\rho$ , зададена в множеството  $A$ , притежава свойството **транзитивност**, ако за всеки три елемента  $x, y, z \in A$  от  $x\rho y$  и  $y\rho z$  следва  $x\rho z$ .

*Например:* Релациите „равно“, „по-малко“ или „по-малко или равно“ в множеството  $\mathbb{R}$  притежават свойството транзитивност.

Релацията  $\rho$  в  $A$  не притежава това свойство, ако съществуват  $x, y, z \in A$  за които  $x\rho y$  и  $y\rho z$ , но не е изпълнено  $x\rho z$ .

*Например:* Релацията „перпендикулярност на прави в равнината“ не притежава свойството транзитивност, защото ако  $a \perp b$  и  $b \perp c$ , то правите  $a$  и  $c$  са или успоредни, или се сливат, но не е вярно, че  $a \perp c$ .

Ако релацията  $\rho$  в  $A$  притежава свойството рефлексивност (симетричност, антисиметричност, транзитивност), то се казва още, че тя е рефлексивна (симетрична, антисиметрична, транзитивна).

## 4.5. Релация еквивалентност

**Определение 4.5.1.** Релацията  $\rho$ , зададена в множеството  $A$ , се нарича **релация еквивалентност** в  $A$ , ако притежава свойствата рефлексивност, симетричност и транзитивност.

*Например:* Релацията „равенство на множества“ е релация еквивалентност, защото според Теорема 1.1. релацията равенство на множества има следните свойства:

1. **Рефлексивност.** За всяко множество  $A$  е вярно, че  $A=A$ .
2. **Симетричност.** За всеки две множества  $A$  и  $B$  ако  $A=B$ , то  $B=A$ .
3. **Транзитивност.** За всеки три множества  $A$ ,  $B$  и  $C$  ако  $A=B$  и  $B=C$ , то  $A=C$ .

#### 4.6. Клас на еквивалентност

**Определение 4.6.1.** Ако  $\rho$  е релация еквивалентност, определена в множеството  $A$  и  $a$  е произволен елемент от  $A$ , то множеството от всички елементи  $x$  от  $A$ , които са в релация с  $a$ , се нарича **клас на еквивалентност** за релацията  $\rho$  с **представител**  $a$ . Означава се с  $K(a)$ .

*Например:* Нека  $\rho$  е релацията „успоредност“ в множеството от прави в равнината и  $a$  и  $b$  са две различни прави от тази равнина, които не са успоредни помежду си.

$K(a)$  ще бъде множеството, което съдържа правата  $a$  и всички прави в равнината, които са успоредни на  $a$ ,  $K(b)$  ще бъде множеството, което съдържа правата  $b$  и всички прави, които са успоредни на правата  $b$ . В този случай се казва, че  $K(a)$  и  $K(b)$  определят две различни направления в равнината, защото  $K(a) \cap K(b) = \emptyset$ .

И всяко друго множество от успоредни помежду си прави, които не са успоредни на  $a$  и  $b$ , определя друго направление в равнината. По този начин като използвахме свойствата на една релация еквивалентност, ние дефинирахме нови понятия в математиката, които се използват и в разговорния език.

#### 4.7. Релация наредба

**Определение 4.7.1.** Релацията  $\rho$ , зададена в множеството  $A$  се нарича **релация наредба в  $A$** , ако тя притежава свойствата рефлексивност, антисиметричност и транзитивност в  $A$ .

*Например:* Релацията „по-малко или равно“ в множеството на реалните числа е релация наредба.

**Определение 4.7.2.** Ако в множеството  $A$  е определена релация наредба  $\rho$ , то  $A$  се нарича **наредено множество спрямо  $\rho$** .

*Например:* Множеството на естествените числа  $\mathbb{N}$  е наредено спрямо релацията „по-малко или равно“ ( $\leq$ ).

#### 4.8. Задачи с решения

**Задача 1.** Релацията  $\rho$  е зададена в множеството  $A = \{0;1;2;3;4\}$  с условието

$x\rho y \Leftrightarrow x$  е четно, а  $y$  – нечетно число.

а) Вярно ли е, че:  $1\rho 0$ ,  $5\rho 1$ ,  $2\rho 8$ ,  $2\rho 3$ ,  $2\rho 2$ ?

б) Намерете дефиниционната област и множеството от стойности на  $\rho$ .

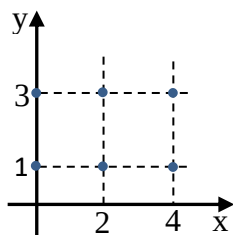
в) Представете релацията конструктивно, таблично, графично и чрез диаграма.

г) Определете релацията  $\rho^{-1}$ . Намерете дефиниционната област и множеството от стойностите  $y$ . Представете релацията по познатите начини.

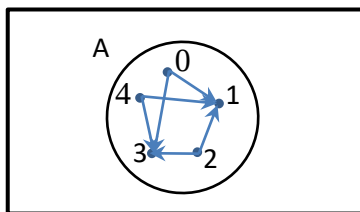
*Решение.* а) Не е вярно, че  $1\rho 0$ , защото 1 е нечетно число. От това, че 5 и 8 не са елементи на множеството  $A$  следва, че не е вярно  $5\rho 1$  и  $2\rho 8$ . Вярно е, че  $2\rho 3$  защото (2;3) е от декартовия квадрат на  $A$  и 2 е четно, а 3 е нечетно число. Не е вярно обаче, че  $2\rho 2$ , защото втората компонента е четно число.

б) Дефиниционната област на релацията се състои от всички четни числа, принадлежащи на  $A$ , т. е.  $X = \{0;2;4\}$ . Множеството от стойностите  $y$  се състои от всички нечетни числа, принадлежащи на  $A$ , т. е.  $Y = \{1;3\}$ .

в) Конструктивното представяне на релацията е  $\rho = \{(0;1);(0;3);(2;1);(2;3);(4;1);(4;3)\}$ . Останалите начини на представяне са посочени на чертеж 7 а) и б) и таблица 6.



Черт. 7 а)



Черт. 7 б)

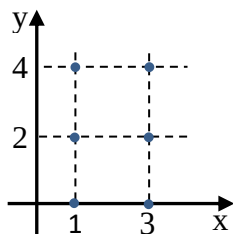
| A \ A | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|-------|---|---|---|---|---|
| 0     |   |   |   |   |   |
| 1     |   |   |   |   |   |
| 2     |   |   |   |   |   |
| 3     |   |   |   |   |   |
| 4     |   |   |   |   |   |

Табл.6

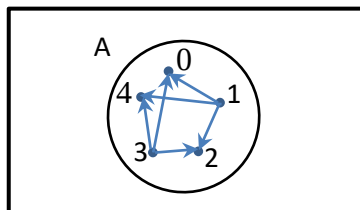
г) Съгласно Определение 4.3.1 за обратна релация  $\rho^{-1}$  се определя от условието  $y \rho^{-1} x \Leftrightarrow x \rho y$ . Дефиниционната област на  $\rho^{-1}$  е множеството  $X_1 = \{1; 3\} = Y$ . Множеството от стойностите на обратната релация е множеството  $Y_1 = \{0; 2; 4\} = X$ .

Конструктивният запис на обратната релация е  $\rho^{-1} = \{(1; 0); (1; 2); (1; 4); (3; 0); (3; 2); (3; 4)\}$ .

Останалите начини на задаване на обратната релация са представени на чертежи 8 а) и 8 б) и таблица 7.



Черт. 8 а)

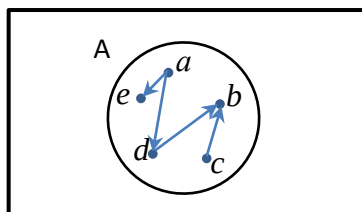


Черт. 8 б)

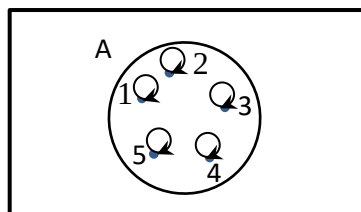
| A \ A | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|-------|---|---|---|---|---|
| 0     |   |   |   |   |   |
| 1     |   |   |   |   |   |
| 2     |   |   |   |   |   |
| 3     |   |   |   |   |   |
| 4     |   |   |   |   |   |

Табл. 7

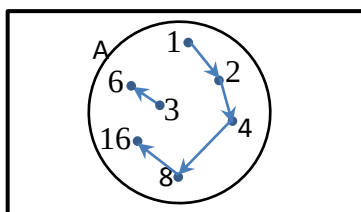
**Задача 2.** Кои от диаграмите, изобразени на чертеж 9 а), б), в) и г) задават двучленни релации? Определете дефиниционната област и множеството от стойности на всяка от тези релации. Представете релациите по останалите начини, ако това е възможно. Определете обратните релации и намерете дефиниционната област и множеството от стойности на всяка от тях.



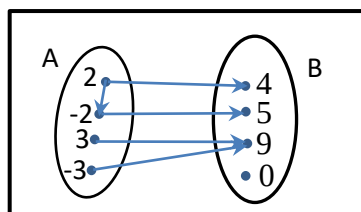
Черт. 9 а)



Черт. 9 б)



Черт. 9 в)



Черт. 9 г)

*Решение.* а) Понеже стрелките излизат от елементите  $a$ ,  $c$  и  $d$  и са насочени към елементите  $b$ ,  $d$  и  $e$ , то диаграмата изобразява двучленна релация в множеството  $A = \{a; b; c; d; e\}$  с дефиниционна област  $X = \{a; c; d\}$  и множество от стойности  $Y = \{b; d; e\}$ . Понеже не са дадени числени стойности на елементите на  $A$ , то релацията може да бъде представена само конструктивно и таблично. Конструктивният запис е  $\rho = \{(a; d); (a; e); (d; b); (c; b)\}$ . Табличният запис е представен на таблица 8.

| A \ A | a | b | c | d | e |
|-------|---|---|---|---|---|
| a     |   |   |   |   |   |
| b     |   |   |   |   |   |
| c     |   |   |   |   |   |
| d     |   |   |   |   |   |
| e     |   |   |   |   |   |

Табл. 8

За да получим обратната релация е достатъчно да се промени посоката на стрелките. Дефиниционната област на обратната релация  $\rho^{-1}$  е  $X_1 = \{b; d; e\} = Y$ , а множеството от стойности  $Y_1 = \{a; c; d\} = X$ .

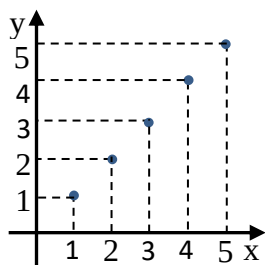
б) Понеже всяка от стрелките излиза от елемент на  $A$  и е насочена към същия елемент, то с тази диаграма е представена идентичната релация в множеството  $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ . За тази релация  $X = Y = A$ .

Конструктивният запис на тази релация е  $\rho = \{(1; 1); (2; 2); (3; 3); (4; 4); (5; 5)\}$ .

Таблично релацията е представена на таблица 9, а графично – на чертеж 10. От това, че обратната на всяка идентична релация съвпада с нея следва, че обратната релация е същата.

| A \ A | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-------|---|---|---|---|---|
| 1     |   |   |   |   |   |
| 2     |   |   |   |   |   |
| 3     |   |   |   |   |   |
| 4     |   |   |   |   |   |
| 5     |   |   |   |   |   |

Табл. 9



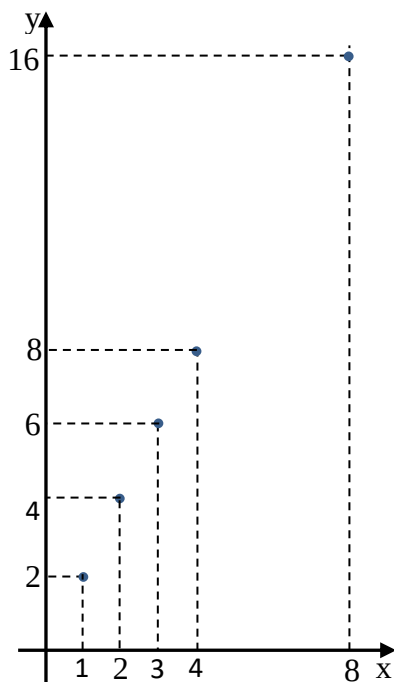
Черт.10

в) Диаграмата на черт. 9 в) задава в множеството  $A=\{1;2;3;4;5;6;8;16\}$  релацията  $\rho$ , която е определена с условието  $x \rho y \Leftrightarrow y=2x$ . За тази релация дефиниционната област  $X=\{1;2;3;4;8\}$ , а множеството от стойности  $Y=\{2;4;6;8;16\}$ . Конструктивното представяне на тази релация е  $\rho=\{(1;2);(2;4);(3;6);(4;8);(8;16)\}$ . Табличното представяне е изобразено с таблица 10, а графичното – на чертеж 11. Обратната релация  $\rho^{-1}$  се определя от условието  $x \rho^{-1} y \Leftrightarrow y \rho x \Leftrightarrow x=2y$ . Дефиниционната ѝ област е множеството  $X_1=\{2;4;6;8;16\}$ , а множеството от стойностите ѝ е  $Y_1=\{1;2;3;4;8\}$ .

| A \ A | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 16 |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|----|
| 1     |   |   |   |   |   |   |   |    |
| 2     |   |   |   |   |   |   |   |    |
| 3     |   |   |   |   |   |   |   |    |
| 4     |   |   |   |   |   |   |   |    |
| 5     |   |   |   |   |   |   |   |    |
| 6     |   |   |   |   |   |   |   |    |
| 8     |   |   |   |   |   |   |   |    |
| 16    |   |   |   |   |   |   |   |    |

табл. 10





Черт.11

г) Диаграмата на черт. 9 г) не задава релация от  $A$  в  $B$ , защото е посочена и връзка между два елемента от  $A$ . Диаграмата не задава и релация в  $A$ , понеже са посочени връзки между елементи на  $A$  и  $B$ .

Диаграмата обаче задава релация в множеството  $A \cup B$ .

**Задача 3.** Кои двучленни релации са представени с таблици 11 и 12.

| $B \backslash A$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|------------------|---|---|---|---|---|
| 2                |   |   |   |   |   |
| 3                |   |   |   |   |   |
| 4                |   |   |   |   |   |

Табл.11

| $A \backslash B$ | 1 | 2 | 3 |
|------------------|---|---|---|
| 1                |   |   |   |
| 2                |   |   |   |
| 3                |   |   |   |

Табл. 12

*Решение.* На таблица 11 е представена релацията  $\rho$  от множеството  $A=\{2;3;4\}$  в множеството  $B=\{2;3;4;5;6\}$ , която е определена с условието  $x \rho y \Leftrightarrow x < y$ .

На таблица 12 е представена релацията  $\rho$  в множеството  $A=\{1;2;3\}$  с условието  $x \rho y \Leftrightarrow x \leq y$ .

**Задача 4.** В множеството  $A=\{5;6;7;8\}$  е определена релацията  $\rho$  с условието  $x \rho y \Leftrightarrow x < y$ . Да се зададе конструктивно релацията и да се определи кои свойства притежава  $\rho$ .

*Решение.* Конструктивният запис на релацията е  $\rho=\{(5;6);(5;7);(5;8);(5;9);(6;7);(6;8);(6;9);(7;8);(7;9);(8;9)\}$ . Релацията не е рефлексивна, защото никой елемент не е в релация със себе си. Тази релация не притежава свойството симетричност. Тази релация е транзитивна, защото от това, че  $x < y$  и  $y < z$  следва, че  $x < z$ .

**Задача 5.** В множеството  $A=\{1;2;3\}$  са определени релациите:

- а)  $\rho=\{(1;1);(1;3);(2;2);(3;1);(3;3)\}$ ;
- б)  $\mu=\{(1;1);(1;2);(2;2);(3;1);(3;3)\}$ ;
- в)  $\varphi=\{(2;1);(1;3);(2;3)\}$ .

Кои от тях са релации еквивалентност в  $A$ ? Намерете класовете на еквивалентност, когато това е възможно.

*Решение.* а) Понеже  $1\rho 1$ ,  $2\rho 2$  и  $3\rho 3$ , то релацията  $\rho$  е рефлексивна. Тази релация е симетрична, защото от  $1\rho 3$  следва  $3\rho 1$ . Тази релация е транзитивна, защото от

$1\rho 1$  и  $1\rho 3$  следва  $1\rho 3$ , от  $1\rho 3$  и  $3\rho 3$  следва  $1\rho 3$ , от  $1\rho 3$  и  $3\rho 1$  следва  $1\rho 1$ , от  $3\rho 1$  и  $1\rho 1$  следва  $3\rho 1$ , от  $3\rho 1$  и  $1\rho 3$  следва  $3\rho 3$ . Но щом релацията  $\rho$  е рефлексивна, симетрична и транзитивна, то тя е релация еквивалентност в  $A$ . Класовете на еквивалентност са:

$K(1)=\{x \in A/x\rho 1\}=\{1;3\}$ ,  $K(2)=\{x \in A/x\rho 2\}=\{2\}$  и  $K(3)=\{x \in A/x\rho 3\}=\{1;3\}$ .

В случая забелязваме, че  $K(1)=K(3)$ .

- б) Релацията  $\mu$  не е симетрична, защото например от  $1\mu 2$  не следва  $2\mu 1$ . Ето защо тя не е релация еквивалентност и следователно не поражда класове на еквивалентност.
- в) Релацията  $\phi$  не е рефлексивна, защото например не е изпълнено  $2\phi 2$ . Ето защо  $\phi$  не е релация еквивалентност.

#### 4.9. Задачи за самостоятелна работа

**Задача 1.** Нека  $A=\{5;6;7;8\}$ ,  $B=\{10;15\}$ . Кои от множествата задават двучленна релация  $\rho$  в  $A \times B$  или в  $B \times A$ ?

- а)  $\{(5;10); (7;15); (8;15)\}$ ;  
 б)  $\{(5;15); (6;10); (7;15); (10;8); (7;10)\}$ ;  
 в)  $\{(10;6); (10;7); (15;7); (15;5)\}$ .

Представете конструктивно дефиниционната област и множеството от стойностите на двучленните релации.

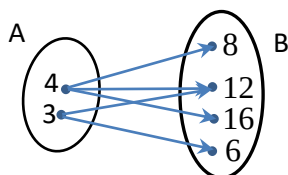
**Задача 2.** Дадени са множествата  $A=\{-2;-1;0\}$  и  $B=\{0;1;2;3\}$  и релацията

$$\rho = \{(-2;1); (-2;2); (0;2); (0;0)\} \text{ от } A \text{ в } B.$$

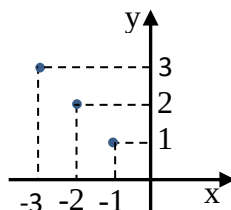
- а) Вярно ли е, че  $0\rho 2$ ,  $0\rho 1$ ,  $0\rho 0$ ,  $-2\rho 3$ ,  $3\rho 0$ ,  $-2\rho 2$ ,  $-2\rho 4$ ,  $2\rho 1$ ? Обосновете отговора си.
- б) Представете конструктивно дефиниционната област  $X$  и множеството от стойностите  $Y$  на релацията  $\rho$ .
- в) Кои от следните включвания са верни:  $X \subset A$ ,  $X \subset B$ ,  $A \subset X$ ,  $Y \subset A$ ,  $Y \subset B$ ,  $B \subset Y$ ?
- г) Представете конструктивно множествата  $A \times B$  и  $X \times Y$ .
- д) Кои от следните включвания са верни  $\rho \subset X \times Y$ ,  $X \times Y \subset \rho$ ,  $X \times Y \subset A \times B$ ,  $A \times B \subset X \times Y$ ?
- е) Представете конструктивно обратната релация  $\rho^{-1}$ , нейната дефиниционна област  $X_1$  и множеството от стойностите  $Y_1$ .
- ж) Сравнете множествата  $X_1$ ,  $Y_1$ ,  $X$  и  $Y$ .
- з) Кои от следните включвания са верни:  $X_1 \subset A$ ,  $X_1 \subset B$ ,  $Y_1 \subset A$ ,  $Y_1 \subset B$ ,  $\rho^{-1} \subset X_1 \times Y_1$ ,  $\rho^{-1} \subset A \times B$ ,  $\rho^{-1} \subset B \times A$ ,  $X_1 \times Y_1 \subset B \times A$ .

**Задача 3.** Нека  $A=\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$ ,  $B=\{0;1;2;3;4\}$ , а  $\rho$  е релацията, зададена от  $A$  в  $B$  с условието:  $x \rho y \Leftrightarrow x$  се дели на  $y$ . Представете релацията конструктивно, таблично и графично. Намерете дефиниционната ѝ област и множеството от стойностите ѝ. Вярно ли е, че  $0\rho 2$ ,  $2\rho 0$ ,  $8\rho 1$ ,  $1\rho 8$ ,  $8\rho 4$ ,  $8\rho 2$ ,  $8\rho 8$ ,  $10\rho 5$ ?

**Задача 4.** Кои релации са зададени чрез диаграмите на чертежи 12 и 13 и таблично чрез таблици 13 и 14?



Черт.12



Черт.13

| B \ A | 4 | 5 | 6 | 7 |
|-------|---|---|---|---|
| 1     |   |   |   |   |
| 2     |   |   |   |   |
| 3     |   |   |   |   |

Табл. 13

| A \ B | -1 | 0 | 1 |
|-------|----|---|---|
| -1    |    |   |   |
| 0     |    |   |   |
| 1     |    |   |   |

Табл. 14

**Задача 5.** Дадени са релациите, определени с множествата:

а)  $\rho=\{(0;2); (2;2); (1;3); (2;1); (0;4); (2;4); (4;1)\}$ ;

б)  $\varphi=\{(1;2); (1;3); (1;4); (3;2); (3;3); (3;4); (2;1)\}$ ;

в)  $\psi= \{(0;1); (1;0); (0;0); (1;1); (0;2); (2;0); (2;2)\}$ .

Определете дефиниционните области и множествата от стойностите им. Намерете обратните им релации. Определете дефиниционните области и множествата от стойностите им. Изобразете на един чертеж дадената релация и нейната обратна и ги сравнете. Какви са графиките им?

**Задача 6.** В множеството  $A=\{1; 2; 3; 4\}$  са дадени релациите:

а)  $\rho$ , която е определена с условието  $x\rho y \Leftrightarrow x$  е нечетно и  $y$  е четно число;

б)  $\phi$ , която е определена с условието  $x\phi y \Leftrightarrow x$  е четно и  $y$  е нечетно число;

в)  $\psi$ , която е определена с условието  $x\psi y \Leftrightarrow x$  се дели на  $y$ .

Притежават ли тези релации свойствата рефлексивност, симетричност, антисиметричност и транзитивност?

**Задача 7.** В множеството  $A=\{0; 2; 4; 6\}$  са определени релациите:

а)  $\rho=\{(0; 0); (0; 2); (2; 0); (2; 2); (4; 4); (6; 6)\}$ ;

б)  $\phi=\{(0; 0); (0; 4); (4; 0); (2; 2); (4; 4); (6; 6); (4; 2)\}$ .

Кои от тях са релации еквивалентност? Задайте конструктивно класовете на еквивалентност за релацията еквивалентност.

**Задача 8.** Дадени са релациите:

а)  $\rho=\{(4; 4); (4; 2); (2; 4); (2; 2); (3; 3)\}$ ;

б)  $\phi=\{(1; 1); (2; 5); (5; 2); (2; 2); (5; 5); (3; 4); (4; 3); (3; 3); (4; 4)\}$ .

Докажете, че те са релации еквивалентност. Определете множествата, в които са зададени релациите и класовете на еквивалентност, породени от  $\rho$  и  $\phi$ .

## 5.Изображения

### 5.1. Понятие за изображение

Да разгледаме следните релации между множествата  $A$  и  $B$ :

$\rho=\{(1; 4); (2; 5); (3; 6)\}$  от  $A=\{1; 2; 3\}$  в  $B=\{4; 5; 6\}$ ;

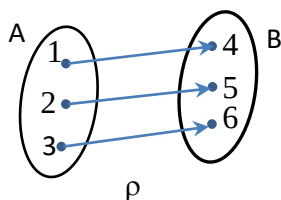
$\mu=\{(1; 4); (2; 6); (3; 8)\}$  от  $A=\{1; 2; 3\}$  в  $B=\{4; 5; 6; 8\}$ ;

$\phi=\{(1; 4); (2; 4); (3; 4)\}$  от  $A=\{1; 2; 3\}$  в  $B=\{4; 5; 6\}$ ;

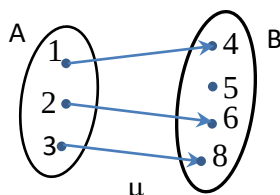
$\psi=\{(1; 3); (1; 4); (2; 5)\}$  от  $A=\{1; 2\}$  в  $B=\{4; 5; 6\}$ ;

$\tau=\{(1; 4); (2; 5)\}$  от  $A=\{1; 2; 3\}$  в  $B=\{4; 5; 6\}$ .

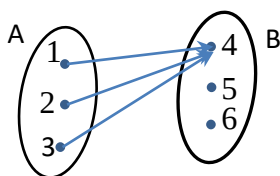
Тези релации са изобразени чрез диаграми и стрелки на чертежи 14 до 18.



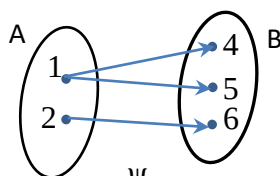
Черт.14



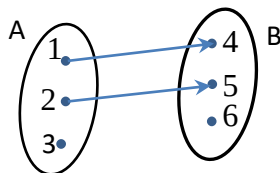
Черт.15



Черт.16



Черт.17



Черт.18

За релациите  $\rho$ ,  $\mu$  и  $\varphi$  можем да забележим, че удовлетворяват условията:

1. Всеки елемент на  $A$  се намира в дадената релация с някакъв елемент от  $B$ , т. е. от всяка точка на множеството  $A$  излиза стрелка към точка от множеството  $B$ ;
2. Всеки елемент на  $A$  е в дадената релация само с един елемент на  $B$ , т. е. от всяка точка на  $A$  излиза само една стрелка към точка от  $B$ .

За релацията  $\psi$  от точката 1 излизат две стрелки към точки от  $B$ . А за релацията  $\tau$  от точката 3 не излиза стрелка към точка от  $B$ .

Двучленни релации, които удовлетворяват условията 1. и 2., посочени по-горе, се наричат изображения на множеството  $A$  в множеството  $B$ .

Нека  $A$  и  $B$  са непразни множества.

**Определение 5.1.1.** Нека  $A$  и  $B$  са произволни множества. Двучленната релация  $g$  от  $A$  в  $B$  се нарича **изображение** на множеството  $A$  в множеството  $B$ , ако **всеки** елемент  $x \in A$  е в релация  $g$  с **точно един** елемент  $y \in B$ .

Ако  $g$  е изображение на  $A$  в  $B$ , ще записваме  $g: A \rightarrow B$ . Вместо записът  $xgy$ , където  $x \in A$  и  $y \in B$  се използва записът  $y = g(x)$ , като  $y$  се нарича **образ** на елемента  $x$ . Множеството  $\{x \in A / g(x) = y\}$  се нарича **прообраз** на елемента  $y$  от  $B$  при изображението  $g$  и се означава с  $g^{-1}(y)$ . Това множество може да е празно, да е едноелементно или многоелементно.

Изображенията по-нататък ще означаваме с  $g, h, f$  и др.

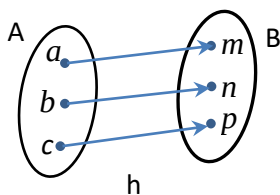
## 5.2. Начини на задаване на изображение

Понеже изображенията са вид релации, то те се задават по начините, по които се задават двучленните релации – конструктивно, таблично, графично и чрез диаграми и стрелки.

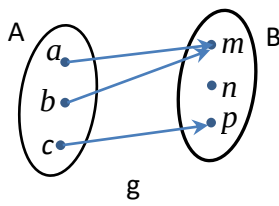
## 5.3. Видове изображения

**Определение 5.3.1.** Нека  $h$  е изображение на  $A$  в  $B$ . Ако за всеки два различни елемента  $x, y \in A$  следва, че и образите им  $h(x)$  и  $h(y)$  са различни,  $h$  се нарича **инективно изображение** или **инекция**.

*Примери.* Изображението  $h = \{(a; m); (b; n); (c; p)\}$  от  $A = \{a; b; c\}$  в  $B = \{m; n; p\}$  е инекция (черт. 19). Изображението  $g = \{(a; m); (b; m); (c; p)\}$  от  $A = \{a; b; c\}$  в  $B = \{m; n; p\}$  не е инекция (черт. 20).



Черт.19



Черт.20

**Определение 5.3.2.** Нека  $h$  е изображение на  $A$  в  $B$ . Ако всеки елемент на  $B$  е образ на **поне един** елемент  $x$  от  $A$ , то  $h$  се нарича **сюрективно изображение** или **сюрекция**.

*Примери.* Изображението  $h$  от чертеж 19 е сюрекция. Изображението  $g$  от чертеж 20 не е сюрекция.

**Определение 5.3.3.** Ако изображението  $h$  на  $A$  в  $B$  е инекция и сюрекция, то  $h$  се нарича **биективно изображение** или **биекция**.

*Примери.* 1.Изображението  $h$  на  $A$  в  $B$  на черт. 19 е биекция.

2.Ако всички места в семинарната зала са заети от студенти и няма правостоящи студенти и празни места, то изображението на множеството  $A$ (студенти) в множеството  $B$  (места) е биективно.

## 5.4. Равномощни множества

**Определение 5.4.1.** Множеството  $A$  е **равномощно** на множеството  $B$ , ако съществува биекция  $f$  на  $A$  в  $B$ . Записва се  $A \sim B$ .

Ако  $A=B$ , то се приема, че  $A \sim B$ .

*Примери.* 1. Изображението  $h$  на чертеж 19 е биекция на  $A=\{a; b; c\}$  в  $B=\{m; n; p\}$ . Множествата  $A$  и  $B$  са равномощни.

2. Да разгледаме множеството на естествените числа  $\mathbb{N}$  и множеството



$A=\{5;6;7;8; \dots\dots\dots\}$ . Да конструираме биекцията  $f$  от  $\mathbb{N}$  в  $A$  така, че  $f(n) = n+4$ . В този случай множествата  $\mathbb{N}$  и  $A$  са равномошни, т. е.  $\mathbb{N} \sim A$ .

### 5.5. Крайни и безкрайни множества

От училищния курс по геометрия знаем, че множеството от точки върху една права линия е безкрайно. Множеството от точки върху една отсечка е също безкрайно. Но отсечката е истинско подмножество на правата, върху която тя лежи. Някои питат как е възможно това? Оказва се, че едно множество може да бъде равномошно на някое свое истинско подмножество, ако то е безкрайно.

**Определение 5.5.1.** *Ако едно множество  $A$  е равномошно на някое свое истинско подмножество, то това множество е безкрайно.*

**Определение 5.5.2.** *Ако едно множество  $A$  не е равномошно на някое свое истинско подмножество, то това множество е крайно.*

### 5.6. Задачи с решения

**Задача 1.** Дадени са двучленните релации  $\rho$ ,  $\mu$  и  $\varphi$  от  $A=\{1;2;3;4;5\}$  в  $B=\{6;7;8;9\}$ :

- а)  $\rho=\{(1;6); (2;9); (4;8); (5;7)\}$ ;
- б)  $\mu=\{(1;6); (2;6); (3;9); (4;7); (5;8)\}$ ;
- в)  $\varphi=\{(1;6); (2;6); (3;7); (3;8); (4;8); (5;9)\}$ .

Кои от тях са изображения на  $A$  в  $B$ ? Определете вида им.

**Решение.** а) Съгласно определението за изображение релацията  $\rho$  не е изображение на  $A$  в  $B$ , защото елементът 3 не е в релация с нито един елемент на  $B$ .

б) Релацията  $\mu$  е изображение на  $A$  в  $B$ . Изображението  $\mu$  не е инекция, защото на два различни елемента от  $A$  – 1 и 2 образите им съвпадат, т. е. имаме двойките (1;6); (2;6), които имат различни първи компоненти и равни втори компоненти. Релацията  $\mu$  е сюрекция.

в) Релацията  $\varphi$  не е изображение на  $A$  в  $B$ , защото съдържа двойките  $(3;7)$  и  $(3;8)$ , т. е. двойки с равни първи компоненти и различни втори компоненти.

**Задача 2.** Ако  $A=\{0;2;4;6;8\}$ ,  $B=\{a;b;c;d;e\}$ ,  $C=\{1;2;3\}$ ,  $D=\{x;y;z\}$ , то кое от следните твърдения е вярно:

- а)  $A \sim B$ ; б)  $C \sim D$ ; в)  $A \sim C$ .

*Решение.* а) Между елементите на множествата  $A$  и  $B$  може да се установи биекция. Например така:  $f=\{(0;a); (2;b); (4;c); (6;d); (8;e)\}$ . Следователно множествата  $A$  и  $B$  са равномощни, т. е. твърдението  $A \sim B$  е вярно.

б) Между елементите на множествата  $C$  и  $D$  може да се установи биекция. Например такава е  $\varphi=\{(1;y); (2;z); (3;x)\}$ . Следователно множествата  $C$  и  $D$  са равномощни, т. е. твърдението  $C \sim D$  е вярно.

в) Множеството  $A$  съдържа пет елемента, които са повече от елементите на множеството  $C$  и каквото и изображение да конструираме, поне два елемента от  $A$  ще се изобразяват в един и същи елемент от  $C$ , с което ще се наруши изискването за инективност и следователно е нарушено изискването за биективност. Но в този случай твърдението  $A \sim C$  не е вярно.

## 5.7. Задачи за самостоятелна работа

**Задача 1.** Изображения ли са двучленните релации, зададени със следните таблици:

| B \ A | 1 | 2 | 3 | 4 |
|-------|---|---|---|---|
| a     |   |   |   |   |
| b     |   |   |   |   |
|       |   |   |   |   |

Табл.15

| $\begin{smallmatrix} & B \\ A \end{smallmatrix}$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|--------------------------------------------------|---|---|---|---|
| $a$                                              |   |   |   |   |
| $b$                                              |   |   |   |   |
| $c$                                              |   |   |   |   |

Табл.16

| $\begin{smallmatrix} & B \\ A \end{smallmatrix}$ | 1 | 2 | 3 |
|--------------------------------------------------|---|---|---|
| $a$                                              |   |   |   |
| $b$                                              |   |   |   |
| $c$                                              |   |   |   |

Табл.17

Определете дефиниционната област  $X$  и множеството от стойностите  $Y$  на изображенията. Намерете образа на елемента  $a$  и прообраза на елемента 2 при всяко от изображенията.

**Задача 2.** Изобразете чрез диаграми и стрелки следните релации и определете кои от тях са изображения на множеството  $A$  в множеството  $B$ :

- а)  $\rho = \{(1;4);(2;5);(3;6)\}$  от  $A = \{1;2;3\}$  в  $B = \{4;5;6\}$ ;
- б)  $\mu = \{(1;4);(2;5);(3;6)\}$  от  $A = \{0;1;2;3\}$  в  $B = \{4;5;6\}$ ;
- в)  $\tau = \{(1;4);(2;5);(3;6)\}$  от  $A = \{1;2;3\}$  в  $B = \{4;5;6;7\}$ ;
- г)  $\varphi = \{(1;4);(2;5);(3;6)\}$  от  $A = \{1;2;3\}$  в  $B = \{4;5\}$ .

За всяко изображение намерете дефиниционната област  $X$  и множеството от стойностите  $Y$ . Намерете образа на елемента 3 и образа на елемента 2. Намерете прообраза на елемента 5. Определете вида на изображенията.

**Задача 3.** Нека  $A = \{a;b;c\}$ ,  $B = \{1;2;3;4\}$ ,  $C = \{-1;-2;-3;-4\}$ . Да се зададат чрез диаграми и стрелки:

- а) инекция от  $A$  в  $B$ , инекция на  $B$  в  $C$ ;
- б) сюрекция на  $B$  в  $C$ , сюрекция на  $B$  в  $A$ ;
- в) биекция на  $B$  в  $C$ , биекция на  $A$  в себе си.

Възможно ли е да се зададе:

- а) сюрекция на  $A$  в  $B$ ;
- б) биекция на  $A$  в  $B$ ;
- в) биекция на  $C$  в  $A$ ?

Обосновете отговора си.

**Задача 4.** Кои от следните множества са равномошни на множеството  $A=\{1;2;3\}$ :

а)  $B=\{4;5;6\}$ ;

б)  $C=\{6\}$ ;

в)  $D=\{a;b;c\}$ ;

г)  $E=\{4;5;6;7\}$ ;

д)  $\emptyset$ .

**Задача 5.** Дадени са множествата  $A=\{11;22;33;44\}$  и  $B=\{1;2;3\}$ . Кое от следните твърдения е вярно:

а)  $A \sim B$ ;

б)  $B \sim D$ , където  $D = \{11;22;33\}$ ?

Посочете различни подмножества на  $A$ , които са равномошни на  $B$ . Колко е броят на тези подмножества?

**Задача 6.** Попълнете празните места така, че получените твърдения да са верни.

а) Ако множеството  $A$  е безкрайно и  $A \sim B$ , то  $B$  е .....

б) Ако множеството  $A$  е крайно и  $A \sim B$ , то  $B$  е .....

в) Ако поне едно подмножество на  $A$  е безкрайно, то  $A$  е .....

Обосновете отговора си.

## Втора глава

### Съждително смятане

Науката, която изучава общите методи на правилните разсъждения, без да се интересува от конкретното им съдържание, се нарече *логика*. За неин основоположник се счита древногръцкият философ Аристотел, живял в периода 384-322г. пр. н. е.

Великият немски математик и философ Готфрид Вилхелм Лайбниц (1646–1716) пръв дава идеята за математическа логика в труда си „Разсъждение за комбинаторното изкуство”, издаден през 1666г.

През втората половина на 19. век възниква науката **математическа логика**. Математическата логика е логика по своя предмет и математика по своите методи. Исторически първа форма на математическа логика е *алгебрата на логиката*. Английският математик Джордж Бул (1815–1864) се счита за неин създател. Възникването на съвременната форма на математическата логика се свързва с името на немския математик Готлоб Фреге (1848–1925).

#### **1. Съждения. Видове съждения. Логически операции със съждения**

Ще разгледаме един дял от математическата логика, който изучава форми на мисленето, наречени съждения.

Този дял се нарича съждително смятане (алгебра на съжденията). Основна роля в съждителното смятане играе понятието **съждение**. В известен смисъл може да се каже, че съждителното смятане е своеобразно смятане със съждения.

### 1.1. Съждения и предикати

*Мисъл, за която може да се каже дали е вярна или не, се нарича **съждение**.*

Мислите се изразяват чрез изречения. Да разгледаме следните изречения:

1. Всяка права е непразно множество от точки.
2. Четните числа се делят на 2.
3. Къде отиваш?
4. Мадрид е столица на Испания.
5.  $8-2=5$ .
6. Здравей ти Слънце, скрий се тъмнина!
7.  $x-3=0$ .
8. 15 се дели на 2.
9. Спри на светофара!

Изреченията 1., 2., 4., 5., 8 изразяват мисли, за които може да се каже дали са верни или не. Изреченията 1., 2. и 4. изразяват мисли, които са верни. А изреченията 5. и 8. изразяват мисли, които са неверни. За изречение 7. нищо конкретно не може да се каже за числото  $x$  и затова не може да се каже дали тази мисъл е вярна или не. За изреченията 3., 6. и 9. няма смисъл да се поставя въпросът дали изразяват вярна или невярна мисъл. Затова изреченията 1., 2., 4., 5. и 8 са съждения, а изреченията 3., 6., 7. и 9. не са съждения.

Съжденията ще означаваме с малките букви от латинската азбука:  $p, q, r, s, \dots$

Знаем, че изреченията биват съобщителни, възклицателни и въпросителни. Ясно е, че възклицателните и въпросителните изречения не са съждения. Но и не всяко

съобщително изречение е съждение. Например съобщителното изречение „ $x$  е четно число“, не е съждение. Но ако на променливата  $x$  дадем конкретна числена стойност, например 16, се получава вярното съждение „16 е четно число“, а ако дадем стойността 15 се получава невярното съждение „15 е четно число“. Изречението „ $x$  е четно число“ се нарича предикат (съждителна функция).

*Изречение, съдържащо променливи, което се превръща в съждение при конкретни стойности на променливите, се нарича **предикат** или съждителна функция.*

## 1.2. Логическа стойност на съждения

Ако едно съждение  $p$  е вярно, ще казваме, че то има логическа (вярностна) стойност 1 и ще пишем  $v(p)=1$ . Ако  $p$  е невярно съждение, ще казваме, че то има логическа (вярностна) стойност 0 и ще пишем  $v(p)=0$ .

Символът  $v$  произлиза от латинската дума *verum* (истина).

*Например:* Съжденията 1., 2. и 4. имат логическа стойност 1, а съжденията 5. и 8. – логическа стойност 0.

## 1.3. Видове съждения

Да разгледаме следните съждения:

1. София е столица на България.
2. Варна не е столица на България.
3. Числото 2 е четно и просто число.
4. Петър е болен или недоспал.

При разглеждане на горните съждения можем да забележим, че съжденията 1. и 2. не са съставени от други съждения. Тях ще ги наричаме **прости (елементарни)**. А съжденията 3. и 4. са съставени от две съждения. Тях ще ги наричаме **съставни (сложни)**.

*Например:* Сложното съждение 3. е съставно и е образувано от следните прости съждения:

$p$ : Числото 2 е четно число и  $q$ : Числото 2 е просто число.  
Сложното съждение 3. има структура „ $p$  и  $q$ “.  
Сложното съждение 4. е съставно и е образувано от следните прости съждения:  
 $r$ : Петър е болен и  $s$ : Петър е недоспал.  
Това сложно съждение има структура „ $r$  или  $s$ “.

## 1.4. Логически операции със съждения

### 1.4.1.Отрицание на съждение

В разговорния език използваме частицата *не* за отричане на нещо.

*Например.1.* Числото 2 е просто число; Числото 2 *не* е просто число.

2.Варна е столица на Р. България; Варна *не* е столица на Р. България.

Частичката *не* поражда логическа операция в множеството на съжденията, която се нарича отрицание.

*Нека  $p$  е произволно съждение. Съждението „не  $p$ “ наричаме **отрицание** на съждението  $p$  и го означаваме с  $\bar{p}$ . Логическата операция, чрез която от  $p$  се получава  $\bar{p}$ , има същото наименование.*

Ако разгледаме отново примерите по-горе, можем да забележим, че ако съждението е вярно, то неговото отрицание е невярно. Такъв е пример 1. Ако даденото съждение е невярно, то неговото отрицание е вярно съждение. Такъв е пример 2., т.е. можем да кажем, че между логическите стойности на съждението  $p$  и неговото отрицание  $\bar{p}$  има връзка. Тази връзка можем да опишем с помощта на следната таблица (табл.18). Тази таблица наричаме вярностна таблица на отрицанието. Таблицата съдържа два хоризонтални реда. На първия ред е записана първата възможност: ако  $p$  има вярностна стойност 1, то неговото отрицание има вярностна стойност 0. На втория ред  $p$  има вярностна стойност 0 и неговото отрицание – 1.



|     |           |
|-----|-----------|
| $p$ | $\bar{p}$ |
| 1   | 0         |
| 0   | 1         |

Табл.18

### 1.4.2. Конюнкция на съждения

Да разгледаме съждението „Числото 2 е четно и просто число“. Това съждение е съставно и е съставено от следните прости съждения:

$p$ : Числото 2 е четно число и  $q$ : Числото 2 е просто число. Разгледаното сложно съждение има структура „ $p$  и  $q$ “. Съюзът и поражда логическа операция, която се нарича конюнкция.

*Нека  $p$  и  $q$  са произволни съждения. Съждението „ $p$  и  $q$ “ наричаме **конюнкция** на съжденията  $p$  и  $q$ , която е вярно съждение само когато едновременно са верни и двете съждения. Ако поне едно от двете съждения е невярно, то и конюнкцията на съжденията  $p$  и  $q$  е невярна. Означава се  $p \wedge q$ . Логическата операция, чрез която от  $p$  и  $q$  се получава  $p \wedge q$ , също се нарича конюнкция.*

Терминът на новото понятие произхожда от латинската дума „conjunction“ и означава съюз, връзка.

В разгледания по-горе пример съждението  $p \wedge q$  е вярно съждение, защото са верни съставлящите го съждения  $p$ : Числото 2 е четно число и  $q$ : Числото 2 е просто число.

Вярностната таблица на тази операция е представена чрез таблица 19.

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ |
|-----|-----|--------------|
| 1   | 1   | 1            |
| 1   | 0   | 0            |
| 0   | 1   | 0            |
| 0   | 0   | 0            |

Табл.19

Тази таблица има четири хоризонтални реда, които отговарят на четирите възможни случая:

- двете съждения са верни и конюнкцията им също е вярна. Този резултат е нанесен на първия хоризонтален ред;
- първото съждение е вярно, а второто – невярно. Конюнкцията има стойност 0. Резултатът е нанесен на втория хоризонтален ред;
- първото съждение е невярно, а второто – вярно. Конюнкцията има пак стойност 0. Резултатът е нанесен на третия хоризонтален ред;
- двете съждения са неверни. Конюнкцията им също е невярно съждение. Резултатът е записан на четвъртия хоризонтален ред.

### 1.4.3. Дизюнкция на съждения

Да разгледаме съждението „Числото 6 се дели на 3 или на 4“. Това съставно съждение е образувано от простите съждения  $p$ : Числото 6 се дели на 3 и  $q$ : Числото 6 се дели на 4. Използван е съюза *или*. Това сложно съждение има структура „ $p$  или  $q$ “. Съюзът *или* поражда логическа операция, която се нарича дизюнкция.

*Нека  $p$  и  $q$  са произволни съждения. Съждението „ $p$  или  $q$ “ наричаме **дизюнкция** на съжденията  $p$  и  $q$ , която е вярно съждение само когато поне едно от съжденията  $p$  и  $q$  е вярно. Ако и двете съждения са неверни, то и дизюнкцията на съжденията  $p$  и  $q$  е невярна. Означава се  $p \vee q$ . Логическата операция, чрез която от  $p$  и  $q$  се получава  $p \vee q$ , също се нарича дизюнкция.*

Терминът на новото понятие произхожда от латинската дума „disjunctio“ и означава различие, разединение.

В разгледания по-горе пример съждението  $p \vee q$  е вярно съждение, защото е вярно съждението „Числото 6 се дели на 3“.

Вярностната таблица на тази операция е представена чрез таблица 20. Тази таблица също има четири хоризонтални реда.

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ |
|-----|-----|------------|
| 1   | 1   | 1          |
| 1   | 0   | 1          |
| 0   | 1   | 1          |
| 0   | 0   | 0          |

Табл.20

#### 1.4.4. Импликация на съждения

Да разгледаме съжденията  $p$ : Числото 2 е четно число и  $q$ : Числото 2 е просто число. Ако свържем тези съждения с използване на словосъчетанието ако..., то... получаваме съставното съждение „Ако числото 2 е четно, то 2 е просто число“, което се нарича тяхна импликация. Това сложно съждение има структура „Ако  $p$ , то  $q$ “. Словосъчетанието ако...,то... поражда логическа операция, която се нарича импликация. Първото съждение  $p$  се нарича предходник, а второто съждение  $q$  – наследник.

В разговорния език със съждението „Ако  $p$ , то  $q$ “ се твърди, че е невъзможно предходникът  $p$  да е налице, а наследникът  $q$  да не е налице. Затова при  $v(p)=1$  и  $v(q)=1$  се счита, че импликацията е вярна, а при  $v(p)=1$  и  $v(q)=0$  – невярна. В обикновения език за съждението „Ако  $p$ , то  $q$ “ нищо не се твърди за случаите, когато  $p$  не е налице, т. е. когато  $v(p)=0$ . Имайки предвид, че в съждителното смятане основно изискване е всяко съждение да бъде вярно или невярно, то това налага в двата случая  $v(p)=0$  и  $v(q)=0$ ;

$v(p)=0$  и  $v(q)=1$  да се приеме някаква стойност на импликацията. Приема се, че в тези случаи импликацията „Ако  $p$ , то  $q$ “ има вярностна стойност 1.

Нека  $p$  и  $q$  са произволни съждения. Съждението „Ако  $p$ , то  $q$ “ наричаме **импликация** на съжденията  $p$  и  $q$ , която е невярно съждение само когато  $p$  е вярно съждение, а  $q$  е невярно съждение. Означава се  $p \rightarrow q$ . Логическата операция, чрез която от  $p$  и  $q$  се получава  $p \rightarrow q$ , също се нарича импликация.

Терминът на новото понятие произхожда от латинската дума „*implico*“ и означава тясно свързвам.

В разгледания по-горе пример съждението  $p \rightarrow q$  е вярно съждение, защото е вярно съждението  $p$ : Числото 2 е четно число и съждението  $q$ : Числото 2 е просто число.

Вярностната таблица на тази операция е представена чрез таблица 21. Тази таблица също има четири хоризонтални реда. Но докато при конюнкцията и дизюнкцията редът на съжденията  $p$  и  $q$  не е от значение за верността им, то при импликацията този ред е от значение.

| $p$ | $q$ | $p \rightarrow q$ |
|-----|-----|-------------------|
| 1   | 1   | 1                 |
| 1   | 0   | 0                 |
| 0   | 1   | 1                 |
| 0   | 0   | 1                 |

Табл.21

За по-доброто осмисляне на тази логическа операция да разгледаме примерите, които дава холандският математик Фройдентал:

1. „Ако влак пристигне в гарата, то се дава сигнал за закриване на коловоза му“.

В случая  $v(p)=1$  и  $v(q)=1$ . Даденото съставно съждение е вярно.

2. „Ако влак пристигне в гарата, то не се дава сигнал за закриване на коловоза му“.

В случая  $v(p)=1$  и  $v(q)=0$ . Съждението е невярно от съображения за сигурност.

3. „Ако влак не пристигне в гарата, то се дава сигнал за закриване на коловоза му“.

В случая  $v(p)=0$  и  $v(q)=1$ . Съждението е вярно, защото може и поради ремонт на коловоза да се даде сигнал за закриването му.

4. „Ако влак не пристигне в гарата, то не се дава сигнал за закриване на коловоза му“. В случая  $v(p)=0$  и  $v(q)=0$ . Импликацията е вярно съждение.

#### 1.4.5. Равнозначност на съждения

Да разгледаме съставното съждение „ $p > 3$  тогава и само тогава, когато  $p < 4$ “. То има вида „ $p$  тогава и само тогава, когато  $q$ “. Словосъчетанието „тогава и само тогава, когато....“ поражда логическа операция, която се нарича равнозначност.

*Нека  $p$  и  $q$  са произволни съждения. Съждението „ $p$  тогава и само тогава, когато  $q$ “ наричаме **равнозначност** на съжденията  $p$  и  $q$ . Означава се с  $p \leftrightarrow q$ . Логическата операция, чрез която от  $p$  и  $q$  се получава  $p \leftrightarrow q$ , има същото име.*

В ежедневиия език равнозначността на две съждения се приема за вярно съждение само когато двете съставлящи я съждения имат еднакви (равни) вярностни стойности; в останалите случаи тя се приема за невярна. Разгледаното по-горе съждение „ $p > 3$  тогава и само тогава, когато  $p < 4$ “ е вярно съждение ( $v(p)=1$  и  $v(q)=1$ ).

И така, за произволни съждения  $p$  и  $q$  приемаме, че съждението  $p \leftrightarrow q$  е вярно само когато и двете съждения  $p$  и  $q$  са едновременно верни или едновременно неверни.

Вярностната таблица на тази операция е представена чрез таблица 22. Тази таблица също има четири хоризонтални реда.

| $p$ | $q$ | $p \leftrightarrow q$ |
|-----|-----|-----------------------|
| 1   | 1   | 1                     |
| 1   | 0   | 0                     |
| 0   | 1   | 0                     |
| 0   | 0   | 1                     |

Табл.22

Образуването на отрицанието, конюнкцията, дизюнкцията, импликацията и равнозначността се нарича **логическа операция** (съжителна операция). Отрицанието е **унарна операция** (операция над едно съждение), а останалите са **бинарни операции** (операции над две съждения). Такива операции се срещат и в алгебрата. Така например намирането на реципрочното на едно число е унарна операция, а намирането на сбора, разликата, произведението и частното на две числа е бинарна операция.

### 1.5. Задачи с решения

**Задача 1.** Да се определят логическите стойности на следните съждения:

- а) Числото 9 се дели на 3 и на 6;
- б) Числото 9 се дели на 3 или на 6;
- в) Ако числото 9 се дели на 3, то 9 се дели на 6;
- г) Ако числото 16 се дели на 4, то 16 се дели на 2;
- д)  $3 < 77$  тогава и само тогава, когато  $3 - 77 > 0$ ;
- е)  $3 < 77$  тогава и само тогава, когато  $3 - 77 < 0$ .

*Решение.* а) Даденото съждение е конюнкция на съжденията:  $p$  „Числото 9 се дели на 3“ и  $q$  „Числото 9 се дели на 6“, т. е. има вида  $p \wedge q$ . И понеже  $v(p)=1$  и  $v(q)=0$ , то конюнкцията е невярно съждение, т. е.  $v(p \wedge q)=0$ .

б) Даденото съждение е дизюнкция на съжденията:  $p$  „Числото 9 се дели на 3“ и  $q$  „Числото 9 се дели на 6“, т. е. има вида  $p \vee q$ . И понеже  $v(p)=1$  и  $v(q)=0$ , то дизюнкцията е вярно съждение, т. е.  $v(p \vee q)=1$ .

в) Даденото съждение е импликация на съжденията:  $p$  „Числото 9 се дели на 3“ и  $q$  „Числото 9 се дели на 6“, т. е. има вида  $p \rightarrow q$ . И понеже  $v(p)=1$  и  $v(q)=0$ , то импликацията е невярно съждение, т. е.  $v(p \rightarrow q)=0$ .

г) Даденото съждение е импликация на съжденията:  $p$  „Числото 16 се дели на 4“ и  $q$  „Числото 16 се дели на 2“, т. е. има вида  $p \rightarrow q$ . И понеже  $v(p)=1$  и  $v(q)=1$ , то импликацията е вярно съждение, т. е.  $v(p \rightarrow q)=1$ .

д) Даденото съждение е равнозначност на съжденията:  $p$  „ $3 < 77$ “ и  $q$  „ $3-77 > 0$ “, т. е. има вида  $p \leftrightarrow q$ . И понеже  $v(p)=1$  и  $v(q)=0$ , то равнозначността е невярно съждение, т. е.  $v(p \leftrightarrow q)=0$ .

е) Даденото съждение е равнозначност на съжденията:  $p$  „ $3 < 77$ “ и  $q$  „ $3-77 < 0$ “, т. е. има вида  $p \leftrightarrow q$ . И понеже  $v(p)=1$  и  $v(q)=1$ , то равнозначността е вярно съждение, т. е.  $v(p \leftrightarrow q)=1$ .

**Задача 2.** Ако  $p$  и  $q$  са съответно съжденията „Преподавателят чете лекции“ и „Студентите посещават лекции“, то да се изразят с думи следните съждения:

- а)  $p \wedge q$ ;      б)  $p \vee q$ ;      в)  $\bar{p} \wedge q$ ;      г)  $p \vee \bar{q}$ ;  
д)  $\bar{p} \wedge \bar{q}$ ;      е)  $\bar{p} \wedge \bar{q}$ ;      ж)  $p \rightarrow q$ ;      з)  $p \leftrightarrow q$ .

*Решение.* а) Преподавателят чете лекции и студентите ги посещават.

б) Преподавателят чете лекции или студентите ги посещават.

- в) Преподавателят не чете лекции и студентите ги посещават.
- г) Преподавателят чете лекции или студентите не ги посещават.
- д) Не е вярно, че преподавателят чете лекции и студентите ги посещават.
- е) Преподавателят не чете лекции и студентите не ги посещават.
- ж) Ако преподавателят чете лекции, то студентите ги посещават.
- з) Преподавателят чете лекции тогава и само тогава, когато студентите ги посещават.

При съставянето на сложните съждения излишните повторения се избягват.

**Задача 3.** На мястото на многоточията да се запишат съответните логически съюзи така, че получените съждения да са верни ( $a$  и  $b$  са означения на числа):

- а) Ако  $a^2 + b^2 = 0$ , то  $a=0 \dots\dots\dots b=0$ ;
- б) Ако  $a^2 + b^2 \neq 0$ , то  $a \neq 0 \dots\dots\dots b \neq 0$ ;
- в) Ако  $\frac{a}{b}=0$ , то  $a=0 \dots\dots\dots b \neq 0$ ;
- г) Ако  $ab=0$ , то  $a=0 \dots\dots\dots b=0$ ;
- д) Ако  $ab=0$ , то  $a \neq 0 \dots\dots\dots b=0$ ;
- е) Ако  $ab \neq 0$ , то  $a \neq 0 \dots\dots\dots b \neq 0$ .

*Решение.* а) Ако  $a^2 + b^2 = 0$ , то  $a=0$  и  $b=0$ .

б) Ако  $a^2 + b^2 \neq 0$ , то  $a \neq 0$  или  $b \neq 0$ .

в) Ако  $\frac{a}{b}=0$ , то  $a=0$  и  $b \neq 0$ .

г) Ако  $ab=0$ , то  $a=0$  или  $b=0$ .

д) Ако  $ab=0$ , то  $a \neq 0$  и  $b=0$ .

е) Ако  $ab \neq 0$ , то  $a \neq 0$  и  $b \neq 0$ .

## 1.6. Задачи за самостоятелна работа

**Задача 1.** Кое от следните изречения е съждение:

- а) Числото 9 е нечетно;



- б) Нечетните числа се делят на 3;
- в) Какво изящество!
- г) 66 е двуцифрено число;
- д) Числото  $y$  е трицифрено;
- е)  $33 < 77$  ;
- ж) Марс е по-далече от Слънцето, отколкото Венера;
- з) Кой е авторът на романа „Под игото“?

За тези от тях, които са съждения, определете логическата им стойност.

**Задача 2.** Кои от следващите съждения са прости и кои съставни:

- а) Числото 36 се дели на 2 и на 9;
- б) Числото 12 не е просто;
- в)  $4 \geq 3$ ;
- г) 66 е двуцифрено и четно число;
- д) Числото 666 е трицифрено или нечетно;
- е)  $333 > 777$  ;
- ж) Четириъгълникът ABCD е успоредник тогава и само тогава, когато дигоналите му се разполовяват от пресечната си точка;
- з) Ако числото 18 се дели на 9, то 18 се дели на 3.

От кои прости съждения са съставени сложните съждения и с помощта на коя логическа операция се получава всяко от тях. Определете логическите им стойности.

**Задача 3.** Ако  $p$  е съждението „ $a \perp c$ “,  $q$  е съждението „ $b \perp c$ “ и  $r$  е съждението „ $a \parallel b$ “, то запишете символично съжденията ( $a$ ,  $b$  и  $c$  са означения на прави):

- а) Ако  $a \perp c$  и  $b \perp c$ , то  $a \parallel b$ ;
- б) Ако  $a \perp c$  и  $a \parallel b$ , то  $b \perp c$ .

**Задача 4.** Ако  $p$  и  $q$  са съответно съжденията „Студено е“ и „Температурата се понижава“, то да се изразят с думи следните съждения:

- |                              |                               |                         |                            |
|------------------------------|-------------------------------|-------------------------|----------------------------|
| а) $p \wedge q$ ;            | б) $p \vee q$ ;               | в) $\bar{p} \wedge q$ ; | г) $p \vee \bar{q}$ ;      |
| д) $\overline{p \wedge q}$ ; | е) $\bar{p} \wedge \bar{q}$ ; | ж) $p \rightarrow q$ ;  | з) $p \leftrightarrow q$ . |

**Задача 5.** Ако  $p$ ,  $q$  и  $r$  са съответно съжденията „Числото 30 се дели на 5“, „Числото 30 се дели на 10 “ и „Числото 30 се дели на 6“, то да се запишат символично и да се определят логическите стойности на съжденията:

- а) Числото 30 се дели на 5 и на 6;
- б) Числото 30 се дели на 5 или на 10;
- в) Ако числото 30 се дели на 5, то 30 се дели на 6;
- г) Ако числото 30 се дели на 10, то 30 се дели на 5;
- д) Числото 30 се дели на 10 тогава и само тогава, когато 30 се дели на 5.

**Задача 6.** Постройте таблица с логическите стойности за всички бинарни логически операции, с които се запознахме.

## 2. Съждителни изрази. Закони на съждителното смятане

### 2.1. Съждителни изрази

Нека  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , ... да са числови променливи. На тяхно място можем да поставяме конкретни числа от произволно числово множество, например от множеството на естествените числа, целите, рационалните или реалните числа. С помощта на знаците за аритметичните действия  $+$ ,  $-$ ,  $.$ ,  $:$  и пр. от тях се получават  $a+b$ ,  $a-b$ ,  $a.b$ ,  $a:b$  и пр., които също са означения на числа. Ако над числовите променливи, сбора, разликата, произведението и частното на две числа отново приложим някое аритметично действие, ще получим още по-сложни означения на числа. Например:  $(a+b).c$ .

Алгебричен израз наричаме крайна редица от знаците  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , ...,  $+$ ,  $-$ ,  $.$ ,  $:$  и пр.,  $(, )$ , която е означение на число. В алгебричния израз могат да присъстват не само променливи на числа, но и означения на конкретни числа. Например:  $(a+b).3$ .

По аналогия с алгебричен израз ще говорим за **съждителен израз**. В предния параграф приехме, че на всяко вярно съждение ще съпоставяме числото 1, а на всяко невярно съждение – 0. По-нататък 1 и 0 ще наричаме **съждителни константи**, а произволни съждения  $p, q, r, \dots$  – **съждителни променливи**. От съждителните константи и съждителните променливи с помощта на логическите операции могат да се образуват съждителни изрази. И така можем да определим понятието **съждителен израз**.

*Всяка крайна редица от съждителни променливи и константи, свързани в определен ред с логическите операции, се нарича **съждителен израз**. Всяка съждителна променлива и всяка съждителна константа е съждителен израз.*

*Например:* Съждителни изрази са:  $(p \leftrightarrow q) \wedge q$ ;  $p \vee \bar{q}$ ; 1; 0.

Не са съждителни изрази:  $p \wedge q \wedge r \dots$ ;  $(p \rightarrow q) \wedge (\vee \bar{q})$ .

Съждителните изрази ще означаваме с главните букви от латинската азбука- $P, Q, R, \dots$

Всеки израз на съждителното смятане се обръща в означение на някакво съждение, ако в него вместо съждителните променливи поставим означения на съждения (разбира се, ако например  $p$  се среща на три места в израза, и на трите места вместо  $p$  поставяме означение на едно и също съждение). Поради това всеки израз се нарича още **схема на съждение** (съждителна схема, съждителна форма).

По аналогия с числова стойност на алгебричен израз говорим за **вярностна стойност** на съждителен израз. В дадения съждителен израз след като заместим съждителните променливи с конкретни съждения, т. е. с техни конкретни логически стойности се получава **вярностната (логическата) стойност** на израза.

От аритметиката знаем, че е установен **ред на действията**. Така например при пресмятане на даден числов израз най-напред се извършва действието

степенуване (действие от трети ред), след това – действията умножение и деление (действия от втори ред) и накрая – действията събиране и изваждане (действия от първи ред).

В съждителното смятане също се установява *ред на операциите*. Приемаме най-напред да намираме отрицанието, след това конюнкцията и дизюнкцията и накрая импликацията и равнозначността. Например за израза  $p \leftrightarrow q \wedge \bar{q}$  най-напред трябва да извършим операцията отрицание на  $q$ , след това конюнкцията на  $q$  и  $\bar{q}$  и накрая операцията равнозначност. Ако искаме да променим реда на операциите и най-напред да извършим равнозначността, а след това конюнкцията на тази равнозначност с отрицанието на  $q$ , тогава ще използваме скоби и ще запишем така  $(p \leftrightarrow q) \wedge \bar{q}$ , т.е. този израз е различен от горния.

Можем още да забележим, че докато един алгебричен израз може да има произволен брой различни числени стойности според стойностите на буквите, то вярностната стойност на един съждителен израз е или 0, или 1.

Ако съждителният израз съдържа *една* съждителна променлива  $p$ , възможни са два случая за стойности на  $p$ : 0 и 1. Вярностната таблица за израза ще съдържа два хоризонтални реда.

Ако изразът съдържа *две* съждителни променливи  $p, q$ , възможни са четири случая за стойностите на  $p$  и  $q$ . Вярностната таблица на израза ще съдържа четири хоризонтални реда.

Да съставим вярностните таблици на изразите  $\bar{p} \wedge p$ ,  $p \vee \bar{q}$  и  $(p \rightarrow q) \wedge \bar{q} \rightarrow \bar{q}$ .

| $p$ | $\bar{p}$ | $\bar{p} \wedge p$ |
|-----|-----------|--------------------|
| 1   | 0         | 0                  |
| 0   | 1         | 0                  |

Табл.23

| $p$ | $q$ | $\bar{q}$ | $p \vee \bar{q}$ |
|-----|-----|-----------|------------------|
| 1   | 1   | 0         | 1                |
| 1   | 0   | 1         | 1                |
| 0   | 1   | 0         | 0                |
| 0   | 0   | 1         | 1                |

Табл.24

| $p$ | $q$ | $\bar{q}$ | $p \rightarrow q$ | $(p \rightarrow q) \wedge \bar{q}$ | $(p \rightarrow q) \wedge \bar{q} \rightarrow \bar{q}$ |
|-----|-----|-----------|-------------------|------------------------------------|--------------------------------------------------------|
| 1   | 1   | 0         | 1                 | 0                                  | 1                                                      |
| 1   | 0   | 1         | 0                 | 0                                  | 1                                                      |
| 0   | 1   | 0         | 1                 | 0                                  | 1                                                      |
| 0   | 0   | 1         | 1                 | 1                                  | 1                                                      |

Табл.25

Да сравним последните вертикални колони на трите таблици. Последната колона на табл.23 се състои само от нули, на табл. 25 – само от единици, на табл. 24 – от нули и единици.

От тези примери е ясно, че съждителните изрази биват три вида:

1. **Общовалидни**, които имат винаги стойност 1, независимо от значенията на съждителните променливи. Последната колона във вярностната таблица на такъв израз се състои само от единици.
2. **Неизпълними**, които имат винаги стойност 0, независимо от значенията на съждителните променливи. Последната колона във вярностната таблица на такъв израз се състои само от нули.

**3. Неутрални**, които имат в някои случаи стойност 1, в други – 0. Последната колона във вярностната таблица на такъв израз се състои от нули и единици.

Използвайки тази терминология, можем да уточним, че изразът  $\bar{p} \wedge p$  е неизпълним, изразът  $p \vee \bar{q}$  е неутрален, а изразът  $(p \rightarrow q) \wedge \bar{q} \rightarrow \bar{q}$  – общовалиден.

Общовалидните съждителни изрази се наричат още закони на съждителното смятане.

Да разгледаме съжденията  $p$ : Числото 2 е четно число и  $q$ : Бургас е разположен на брега на Черно море. Тези съждения са верни и  $v(p)=1=v(q)$ . Сега да разгледаме съжденията  $s$ : Числото 22 е едноцифрено число и  $t$ : Шумен е разположен на брега на Черно море. За тези съждения  $v(s)=0=v(t)$ .

*Две съждения  $p$  и  $q$  са еквивалентни, ако имат равни логически стойности. Записва се  $p \Leftrightarrow q$ .*

Така например съжденията  $p$  и  $q$  са еквивалентни и записваме  $p \Leftrightarrow q$ , съжденията  $s$  и  $t$  също са еквивалентни и записваме  $s \Leftrightarrow t$ , но съжденията  $p$  и  $s$  не са еквивалентни.

*Съждителните изрази  $P$  и  $Q$  са еквивалентни, ако имат равни логически стойности за всеки избор от логически стойности на съждителните променливи в тях. Записваме  $P \Leftrightarrow Q$ .*

## **2.2. Закони на съждителното смятане**

Законите на съждителното смятане са много, но ние ще запишем само най-важните от тях, които изразяват свойствата на логическите операции.

**1. Комутативни (разместителни) закони.** *За всеки две съждения  $p$  и  $q$  е вярно:*

1.1.  $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ ;

1.2.  $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ .

**2. Асоциативни (съдружителни) закони.** *За всеки три съждения  $p$ ,  $q$  и  $r$  е вярно:*

- 2.1.  $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$ ;  
 2.2.  $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$ .
3. **Дистрибутивни (разпределителни) закони.** За всеки три съждения  $p, q$  и  $r$  е вярно:  
 3.1.  $(p \vee q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge r \vee q \wedge r$ ;  
 3.2.  $(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$ .
4. **Закони за повторение.** За всяко съждение  $p$  е изпълнено:  
 4.1  $p \wedge p \Leftrightarrow p$  ;  
 4.2.  $p \vee p \Leftrightarrow p$  .
5. **Закони с 1 и 0.** За всяко съждение  $p$  е изпълнено:  
 5.1.  $p \wedge 1 \Leftrightarrow p$  ;  
 5.2.  $p \vee 1 \Leftrightarrow 1$  ;  
 5.3.  $p \wedge 0 \Leftrightarrow 0$  ;  
 5.4.  $p \vee 0 \Leftrightarrow p$  .
6. **Закон за противоречието.** За всяко съждение  $p$  е изпълнено:  
 $p \wedge \bar{p} \Leftrightarrow 0$  .
7. **Закон за изключеното трето.** За всяко съждение  $p$  е вярно:  
 $p \vee \bar{p} \Leftrightarrow 1$  .
8. **Закон за двойното отрицание.** За всяко съждение  $p$  е вярно:  
 $\bar{\bar{p}} \Leftrightarrow p$  .
9. **Закони на де Морган.** За всеки две съждения  $p$  и  $q$  е вярно:  
 9.1.  $\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow \bar{p} \vee \bar{q}$  ;  
 9.2.  $\overline{p \vee q} \Leftrightarrow \bar{p} \wedge \bar{q}$  .
10. **Закон за контрапозицията.** За всеки две съждения  $p$  и  $q$  е изпълнено:  
 $p \rightarrow q \Leftrightarrow \bar{q} \rightarrow \bar{p}$  .

### 2.3. Задачи с решения

**Задача 1.** Посочете кое от изреченията:

а) Ако не вали дъжд, то аз не си отварям чадъра;  
 б) Не е вярно, че ако вали дъжд не си отварям чадъра;  
 в) Вали дъжд и не си отварям чадъра,  
 изразява съждение, което е отрицание на съждението „Ако вали дъжд, то аз си отварям чадъра“.

*Решение.* Нека означим с  $p$  и  $q$  съответно съжденията: „Вали дъжд“ и „Отварям си чадъра“.

При тези означения дадената задача можем да преформулираме така: Кои от съжденията:

$$\text{а) } \bar{p} \rightarrow \bar{q}; \quad \text{б) } \overline{p \rightarrow \bar{q}}; \quad \text{в) } p \wedge \bar{q}$$

са еквивалентни на съждението  $\overline{p \rightarrow \bar{q}}$ .

За да отговорим на поставения въпрос е достатъчно да построим вярностната таблица на съжденията  $\bar{p} \rightarrow \bar{q}$ ;  $\overline{p \rightarrow \bar{q}}$ ;  $p \wedge \bar{q}$  и  $\overline{p \rightarrow \bar{q}}$ .

| $p$ | $q$ | $\bar{p}$ | $\bar{q}$ | $\bar{p} \rightarrow \bar{q}$ | $p \rightarrow \bar{q}$ | $\overline{p \rightarrow \bar{q}}$ | $p \wedge \bar{q}$ | $p \rightarrow q$ | $\overline{p \rightarrow \bar{q}}$ |
|-----|-----|-----------|-----------|-------------------------------|-------------------------|------------------------------------|--------------------|-------------------|------------------------------------|
| 1   | 1   | 0         | 0         | 1                             | 0                       | 1                                  | 0                  | 1                 | 0                                  |
| 1   | 0   | 0         | 1         | 1                             | 1                       | 0                                  | 1                  | 0                 | 1                                  |
| 0   | 1   | 1         | 0         | 0                             | 1                       | 0                                  | 0                  | 1                 | 0                                  |
| 0   | 0   | 1         | 1         | 1                             | 1                       | 0                                  | 0                  | 1                 | 0                                  |

Сравнявайки резултатите от осмата и десетата колона можем да заключим, че  $p \wedge \bar{q} \Leftrightarrow \overline{p \rightarrow \bar{q}}$ .

Следователно изречението „Вали дъжд и не си отварям чадъра“ изразява съждение, което е отрицание на съждението „Ако вали дъжд, то аз си отварям чадъра“.

**Задача 2.** Да се образуват отрицанията на следните съждения:

- 7 не е просто число;
- 3 дели числото А тогава и само тогава, когато дели сумата от значенията на цифрите му;
- Числото 6 се дели на 2 и на 3.



*Решение.* а) Нека означим с  $p$  съждението: „7 е просто число“. Неговото отрицание ще бъде: „7 не е просто число“. Отрицанието на отрицанието на  $p$  е самото  $p$  (съгласно закона за двойното отрицание  $\bar{\bar{p}} \Leftrightarrow p$ ). Следователно отрицанието на съждението „7 не е просто число“ е съждението „7 е просто число“.

б) Нека означим с  $p$  и  $q$  съответно съжденията: „3 дели числото А“ и „3 дели сумата от значенията на цифрите на числото А“. Тогава даденото съждение има вида  $p \leftrightarrow q$ . Търсеното отрицание е  $\overline{p \leftrightarrow q}$  или „Не е вярно, че 3 дели числото А тогава и само тогава, когато 3 дели сумата от значенията на цифрите на А“.

в) Нека означим с  $p$  и  $q$  съответно съжденията: „Числото 6 се дели на 2“ и „6 се дели на 3“. Даденото съждение има вида  $p \wedge q$ . Да образуваме отрицанието на това съждение, използвайки закона на де Морган 9.1, т. е.  $\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow \bar{p} \vee \bar{q}$ . Тогава отрицанието на даденото съждение е: „Числото 6 не се дели на 2 или не се дели на 3“.

## 2.4. Задачи за самостоятелна работа

**Задача 1.** Кой от следните символични записи представлява съжителен израз, кой не е и защо:

- а)  $(p \vee q) \wedge \bar{q} \rightarrow \bar{p}$  ;    б)  $(p \vee ) \wedge \bar{q} \rightarrow \bar{p}$ ;    в)  $\overline{p \rightarrow q} \leftrightarrow q$ ;  
г)  $(p \vee q) \wedge \bar{q} \leftrightarrow (q \vee )$ .

**Задача 2.** Премахнете излишните скоби:

- а)  $(p \vee q) \rightarrow \overline{(p \vee q)}$ ;    б)  $\overline{(p \vee q)} \leftrightarrow (p \wedge q)$ .

Съставете таблици за вярностните стойности на тези изрази.

**Задача 3.** Кои от следните съжителни изрази са общовалидни, кои – неизпълними и кои – неутрални:

- а)  $p \vee p$ ,     $p \vee \bar{p}$ ,     $p \vee 1$ ,     $p \vee 0$ ,     $\bar{\bar{p}} \vee \bar{p}$ ;  
б)  $p \wedge p$ ,     $p \wedge \bar{p}$ ,     $p \wedge 1$ ,     $p \wedge 0$ ,     $\bar{\bar{p}} \wedge \bar{p}$ .

**Задача 4.** Да се образува отрицанието на съжденията:

- а) Числото 15 се дели на 5 и на 3;  
б) Петър е болен или недоспал;

- в)  $5 \leq 9$ ;
- г)  $33 \geq 3$ ;
- д) Числото 6 е четно или нечетно.

**Задача 5.** Като се използва законът за двойното отрицание, да се преформулира съждението:

- а) Не е вярно, че аз не съм студент;
- б) Не е вярно, че Несебър не се намира на брега на Черно море;
- в) Не е вярно, че 18 не се дели на 6;
- г) Не е вярно, че 16 е нечетно число.

**Задача 6.** Кой от съжденията:

- а) Седя си в къщи и гледам телевизия;
  - б) Седя си в къщи и не гледам телевизия
- са еквивалентни на отрицанието на съждението „Ако съм си в къщи, гледам телевизия“?

## Литература

1. Виленкин, Н. Математика 4-5 клас, теоретични основи, ДИ „Народна просвета“, С., 1976.
2. Дерелиев, Л. Увод в математическата логика, Печатница на централната станция на младите техници, С., 1973.
3. Петров, Д. и колектив, Методическо ръководство по математика за начални учители, Издателство „Абагар“, В. Т., 1999.
4. Славова, Сл. Математика, Част I, Издателство „Епископ Константин Преславски“, Ш., 1996.
5. Славова, С., Първулов, С., Каракашева, Л. Математика. Част I. Методическо ръководство за решаване на задачи, Университетско издателство „Епископ Константин Преславски“, Ш., 2002.