ПЕРТУРБАЦИОННИ ОЦЕНКИ ЗА МАКСИМАЛНОТО РЕШЕНИЕ НА МАТРИЧНОТО УРАВНЕНИЕ $\mathbf{X + A^*X^{-1}A + B^*X^{-1}B = Q}$

ДЕСИСЛАВА И. БОРИСОВА, ВЕЖДИ И. ХАСАНОВ

PERTURBATION ESTIMATES FOR THE MAXIMAL SOLUTION OF THE MATRIX EQUATION $\mathbf{X + A^*X^{-1}A + B^*X^{-1}B = Q}$

DESISLAVA I. BORISOVA, VEJDI I. HASANOV

ABSTRACT: *In this paper the nonlinear matrix equation $X + A^*X^{-1}A + B^*X^{-1}B = Q$ is considered. Perturbation estimations for the maximal solution of the considered equation are obtained. The results are illustrated by using numerical examples.*

KEYWORDS: *Nonlinear matrix equation, Perturbation estimate, Maximal solution*

1. Въведение

Разглеждаме нелинейното матрично уравнение

$$X + A^*X^{-1}A + B^*X^{-1}B = Q, \tag{1}$$

където A, B, $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ и Q е ермитова положително определена матрица, $\mathbb{C}^{n\times n}$ е множеството на всички $n \times n$ комплексни матрици, а A^* е означение за комплексно спрегната и транспонирана матрица на матрицата A. Търсеното решение X на уравнението (1) е също ермитова положително определена матрица.

Уравнението (1) може да се сведе до вида

$$Y + C^*Y^{-1}C + D^*Y^{-1}D = I, \tag{2}$$

където I е единичната матрица.

За първи път уравнение (2) е разгледано от Лонг и др.[1]. По-късно е изследвано от Попчев и др. [2] и са получени локални и нелокални пертурбационни оценки. Хасанов и Али[3] изследват реда на сходимост на три итерационни матода за уравнението (2). Хи и Лонг [4] и Дуан и др. [5] разглеждат по-общото уравнение $X + \sum_{n=1}^{m} A_i^*X^{-1}A_i = I$, а Лиу и Чен [6] изследват уравнението $X^s + A^*X^{-t_1}A + B^*X^{-t_2}B = Q$.

В случай на $B = 0$, уравнението (1) се свежда до уравнението $X + A^*X^{-1}A = Q$, което е изучавано интензивно през последните три десетилетия. Изследванията са насочени към: намирането на необходини и достатъчни условия за съществуването на положително определено решение и неговите свойства [7, 8, 9]; методи за намиране на положително определено решение [10, 11, 12] и пертурбационен анализ [13, 14].

Ксю [13] прави пертурбационен анализ на максималното решение на уравнението$X + A^*X^{-1}A = Q$ и дава оценка, зависеща само от матричните коефициенти A, Q и техните смущения. Следвайки идеите на Ксю ние обобщаваме резултата за максималното решение на уравнението (1). Освен това обобщена е и оценката на Дуан и др. [5] при произволна дясна част$Q > 0$ в случая на $m = 2$. Получени са границите на смущенията (пертурбациите) на матричните коефициенти, при които пертурбираното уравнение има положително определено решение. Резултатите са сравнени с тези на Попчев и др. [2] и Дуан и др. [5].

Една положително определена матрица X_L, която е решение на едно матрично уравнение ще наричаме максимално, ако $X_L \geq X$ за всяко положително определено решение X на уравнението, където $X_L \geq X$ означава, че матрицата $X_L - X$ е положително полудефинитна. В статията ще използваме още означенията $A > 0 (A \geq 0)$, за ермитова положително определена (полуопределена) матрица A. С $\|\cdot\|$ означаваме спектралната норма на матриците.

2. Предварителни резултати

В тази секция представяме някои предварителни резултати.

Лема1[1] *Ако* $\|A\|^2 + \|B\|^2 < \frac{1}{4}$, *тогава уравнението* (2) *има единствено положително определено решение* $Y \in (\frac{1}{2}I, I]$.

От доказателството на Теорема 3.1 в [1] става ясно, че решението в $Y \in (\frac{1}{2}I, I]$ при условията на Лема1 е максимално положително определено решение Y_L. Следователно

$$\|Y_L^{-1}\| < 2 \quad \text{и} \frac{1}{2} \leq \|Y_L\| \leq 1.$$

Ще обобщим Лема1 за уравнение (1).

Лема2 *Ако* $(\|A\|^2 + \|B\|^2)^{\frac{1}{2}} < \frac{1}{2}\|Q^{-1}\|^{-1}$, *то максималното решение* X_L *на матричното уравнение* (1) *съществува и удовлетворява*

$$\|X_L^{-1}\| < 2\|Q^{-1}\| \text{и} \frac{1}{2}\|Q\| \leq \|X_L\| \leq \|Q\|.$$

Доказателство: Доказателството е аналогично на [13, Лема 2.3, Лема 2.4]. □

Попчев и др. [2] дават локални и глобални пертурбационни оценки на положително определено решение на уравнението. Ще опишем някои означения използвани от Попчев и др. [2] за представяне на техния резултат (нелокална оценка). Ще се ограничим само с представянето на нелокалната оценка, тъй като при локалните оценки не са известни какви са границите на смущения на матричните коефициенти. Общ недостатък при оценките на Попчев и др. [2] е, че не е ясно дали оценката е за смущенията на максималното решение на разглежданото уравнение.

Нека X и $\tilde{X}$ са съответно положително определени решения на и съответното пертурбирано уравнение. Освен това

$\mu := \|X^{-1}\|,\ l := \|L^{-1}\|,\ S := (A, B),\ L := I_{n^2} - (X^{-1}A)^T \otimes (A^H X^{-1}) - (X^{-1}B)^T \otimes (B^H X^{-1}),$

$$a_0(\delta) := g(\delta) + l\mu(\delta_A^2 + \delta_B^2),\ \delta_X := \|\delta X\|_F,\ \delta_A := \|\delta A\|_F,\ \delta_B := \|\delta B\|_F,\ \delta := [\delta_A \delta_B]^T$$

$$a_1(\delta) := \sum_{Z \in S} [\mu(\|L^{-1}(I_n \otimes Z^H X^{-1})\| + \|L^{-1}((X^{-1}Z)^T \otimes I)\mathcal{P}_{n^2}\|)\delta_Z + l\mu^2\delta_Z^2],$$

$$a_2(\delta) := \sum_{Z \in S} \mu^3[\|L^{-1}(Z^T \otimes Z^H)\| + \|L^{-1}(Z^T \otimes I)\mathcal{P}_{n^2} + L^{-1}(I \otimes Z^H)\|)\delta_Z + l\delta_Z^2],$$

$$d(\delta) := (1 - a_1(\delta) + \mu a_0(\delta))^2 - 4a_0(\delta)(a_2(\delta) + \mu(1 - a_1(\delta)),$$

$$(3) \qquad f(\delta) := \frac{2a_0(\delta)}{1 - a_1(\delta) + \mu a_1(\delta) + \sqrt{d(\delta)}}, \quad \Omega := \{\delta \in \mathbb{R}^2 : d(\delta) \geq 0\},$$

където $\mathcal{P}_{n^2} \in \mathbb{C}^{n^2 \times n^2}$ е пермутационна матрица, $\otimes$ означава Кронекерово произведение, $g(\delta)$ е локална пертурбационна оценка. За повече подробности вижте [2]. Означението $\|\cdot\|_F$ е норма на Фробениус.

Теорема 2.1. [2, Теорема 2] *За $\delta \in \Omega$ нелокалната пертурбационна граница $f(\delta)$ на уравнението* (2) *съществува и $\|\tilde{X} - X\|_F \leq f(\delta)$.*

Дуан и др. [5] изследват уравнението

$$(4) \qquad X + \sum_{n=1}^{m} A_i^* X^{-1} A_i = I$$

и получават пертурбационна оценка на максималното положително определено решение.

Теорема 2.2. [5, Теорема 3.1] *Нека $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2 \dots \tilde{A}_m$ са пертурбираните матрици на матричните коефициенти A_1, A_2, …, A_m на уравнението* (4) *и $\Delta A_i = \tilde{A}_i - A_i$, $i = 1,2,\dots,m$. Ако*

$$\sum_{n=1}^{m} \|A_i\|^2 < \frac{1}{4} \text{ и } \quad 2\sum_{n=1}^{m} (\|A_i\| \|\Delta A_i\|) + \sum_{n=1}^{m} \|\Delta A_i\|^2 < \frac{1}{4} - \sum_{n=1}^{m} \|A_i\|^2,$$

тогава уравнението (4) *и съответното пертурбационно уравнение имат максимални положителни решения съответно X_L и $\tilde{X}_L$, които удовлетват*

$$(5) \qquad \|\tilde{X}_L - X_L\| \leq \sum_{n=1}^{m} \frac{4(\|A_i\| + \|\Delta A_i\|)\|\Delta A_i\|}{1 - 4\sum_{n=1}^{m} (\|A_i\| + \|\Delta A_i\|)^2} =: S_{err}.$$

3. Пертурбационен анализ

Разглеждаме уравнението (1) и съответното му пертурбирано уравнение

$$(6) \qquad \tilde{X} + \tilde{A}^* \tilde{X}^{-1} \tilde{A} + \tilde{B}^* \tilde{X}^{-1} \tilde{B} = \tilde{Q},$$

където $\tilde{Q} = Q + \Delta Q$, $\tilde{A} = A + \Delta A$, $\tilde{B} = B + \Delta B$ и $\tilde{X} = X + \Delta X$.

Следващият резултат е обобщение на оценката на Дуан (за уравнение (4) при $m = 2$) за произволна дясна част $Q > 0$ на уравнението (1).

Теорема 3.1 *Ако за матричните коефициенти на уравненията* (1) *и* (6) *са изпълнени условията:*

(i) $(\|A\|^2 + \|B\|^2)^{\frac{1}{2}} \|Q^{-1}\| < \frac{1}{2}$;

(ii) $\|\Delta Q\| \leq \left[\frac{1}{2} - (\|A\|^2 + \|B\|^2)^{\frac{1}{2}} \|Q^{-1}\|\right] \|Q^{-1}\|^{-1}$;

(iii) $\|\Delta A\|^2 + \|\Delta B\|^2 + 2\|A\|\|\Delta A\| + 2\|B\|\|\Delta B\| < \left[\frac{1}{4} - (\|A\|^2 + \|B\|^2)\|\tilde{Q}^{-1}\|^2\right] \|\tilde{Q}^{-1}\|^{-2}$,

тогава максималните решения X_L и $\tilde{X}_L$ съответно на (1) *и* (6) *съществуват и*

$$(7) \qquad \|\Delta X_L\| \leq \frac{1}{c_1} \left[\|\Delta Q\| + 2\|\tilde{Q}^{-1}\|(2\|A\| + \|\Delta A\|)\|\Delta A\| + 2\|\tilde{Q}^{-1}\|(2\|B\| + \|\Delta B\|)\|\Delta B\|\right] =: E_1,$$

където $c_1 = 1 - 4(\|A\|^2 + \|B\|^2)\|Q^{-1}\|\|\tilde{Q}^{-1}\|$.

Доказателство: Ще покажем, че

$$(\|A\|^2 + \|B\|^2)^{\frac{1}{2}}\|\tilde{Q}^{-1}\| < \frac{1}{2}, \tag{8}$$

$$(\|\tilde{A}\|^2 + \|\tilde{B}\|^2)^{\frac{1}{2}}\|\tilde{Q}^{-1}\| < \frac{1}{2}. \tag{9}$$

От тъждеството $\tilde{Q}^{-1} = Q^{-1} - Q^{-1}\Delta Q\tilde{Q}^{-1}$ и условие *(ii)* имаме

$$\|\tilde{Q}^{-1}\| \le \|Q^{-1}\| + \|Q^{-1}\|\|\Delta Q\|\|\tilde{Q}^{-1}\| \le \|Q^{-1}\| + \left(\frac{1}{2} - (\|A\|^2 + \|B\|^2)^{\frac{1}{2}}\|Q^{-1}\|\right)\|\tilde{Q}^{-1}\|.$$

Следователно

$$\|\tilde{Q}^{-1}\| \le \frac{\|Q^{-1}\|}{\frac{1}{2} + (\|A\|^2 + \|B\|^2)^{\frac{1}{2}}\|Q^{-1}\|}.$$

Оттук и условие *(i)* получаваме

$$(\|A\|^2 + \|B\|^2)^{\frac{1}{2}}\|\tilde{Q}^{-1}\| \le \frac{(\|A\|^2 + \|B\|^2)^{\frac{1}{2}}\|Q^{-1}\|}{\frac{1}{2} + (\|A\|^2 + \|B\|^2)^{\frac{1}{2}}\|Q^{-1}\|} < \frac{1}{2}.$$

Следователно дясната страна на неравенството в *(iii)* е положително число.

От *(iii)* имаме

$$(\|\tilde{A}\|^2 + \|\tilde{B}\|^2)\|\tilde{Q}^{-1}\|^2 \le [(\|\Delta A\| + \|A\|)^2 + (\|\Delta B\| + \|B\|)^2]\|\tilde{Q}^{-1}\|^2 < \frac{1}{4}.$$

Следователно от *(i)*, (9) и Лема 2 следва, че максималните решения X_L и $\tilde{X}_L$ съответно на уравненията (1) и (6) съществуват и

$$\|X_L^{-1}\| < 2\|Q^{-1}\|, \quad \frac{1}{2}\|Q\| \le \|X_L\| \le \|Q\|, \tag{10}$$

$$\|\tilde{X}_L^{-1}\| < 2\|\tilde{Q}^{-1}\|, \quad \frac{1}{2}\|\tilde{Q}\| \le \|\tilde{X}_L\| \le \|\tilde{Q}\|. \tag{11}$$

От разликата на тъждествата

$$X_L = Q - A^*X_L^{-1}A - B^*X_L^{-1}B \quad \text{и} \quad \tilde{X}_L = \tilde{Q} - \tilde{A}^*\tilde{X}_L^{-1}\tilde{A} - \tilde{B}^*\tilde{X}_L^{-1}\tilde{B}$$

получаваме

$$\begin{aligned}\Delta X_L - A^*\tilde{X}_L^{-1}\Delta X_L X_L^{-1}A - B^*\tilde{X}_L^{-1}\Delta X_L X_L^{-1}B = \\ = \Delta Q - \Delta A^*\tilde{X}_L^{-1}\tilde{A} - A^*\tilde{X}_L^{-1}\Delta A - \Delta B^*\tilde{X}_L^{-1}\tilde{B} - B^*\tilde{X}_L^{-1}\Delta B\,.\end{aligned} \tag{12}$$

Нека

$\varphi := \Delta X_L - A^*\tilde{X}_L^{-1}\Delta X_L X_L^{-1}A - B^*\tilde{X}_L^{-1}\Delta X_L X_L^{-1}B,$

$\psi := \Delta Q - \Delta A^*\tilde{X}_L^{-1}\tilde{A} - A^*\tilde{X}_L^{-1}\Delta A - \Delta B^*\tilde{X}_L^{-1}\tilde{B} - B^*\tilde{X}_L^{-1}\Delta B.$

От (10) и (11) получаваме

$$\|\varphi\| \geq \|\Delta X_L\| - \|A\|^2\|\tilde{X}_L^{-1}\|\|\Delta X_L\|\|X_L^{-1}\| - \|B\|^2\|\tilde{X}_L^{-1}\|\|\Delta X_L\|\|X_L^{-1}\|$$
$$= \|\Delta X_L\|\left(1 - (\|A\|^2 + \|B\|^2)\|\tilde{X}_L^{-1}\|\|X_L^{-1}\|\right)$$
$$\geq \|\Delta X_L\|\left(1 - 4(\|A\|^2 + \|B\|^2)\|Q^{-1}\|\|\tilde{Q}^{-1}\|\right) = c_1\|\Delta X_L\|,$$
$$\|\psi\| \leq \|\Delta Q\| + \|\Delta A\|\|\tilde{X}_L^{-1}\|(\|\tilde{A}\| + \|A\|) + \|\Delta B\|\|\tilde{X}_L^{-1}\|(\|\tilde{B}\| + \|B\|)$$
$$\leq \|\Delta Q\| + 2\|\Delta A\|\|\tilde{Q}^{-1}\|(2\|A\| + \|\Delta A\|) + 2\|\Delta B\|\|\tilde{Q}^{-1}\|(2\|B\| + \|\Delta B\|) = c_1 E_1,$$

откъдето $\|\Delta X_L\| \leq \frac{1}{c_1}\|\varphi\| = \frac{1}{c_1}\|\psi\| \leq E_1$. □

Следва аналогичен резултат на Ксю за по-общото уравнение (1).

Теорема 3.2 *Ако за матричните коефициенти на уравненията* (1) *и* (6) *са изпълнени условията:*

(i) $\|A\|\|Q^{-1}\| < \frac{\sqrt{2}}{4}$, $\|B\|\|Q^{-1}\| < \frac{\sqrt{2}}{4}$;

(ii) $\|\Delta A\| < \frac{\sqrt{2}}{4}\left[\frac{1}{2} + \left[(\|A\|^2 + \|B\|^2)^{\frac{1}{2}} - 2\sqrt{2}\|A\|\right]\|Q^{-1}\|\right]\|Q^{-1}\|^{-1}$;

(iii) $\|\Delta B\| < \frac{\sqrt{2}}{4}\left[\frac{1}{2} + \left[(\|A\|^2 + \|B\|^2)^{\frac{1}{2}} - 2\sqrt{2}\|B\|\right]\|Q^{-1}\|\right]\|Q^{-1}\|^{-1}$;

(iv) $\|\Delta Q\| \leq \left[\frac{1}{2} - (\|A\|^2 + \|B\|^2)^{\frac{1}{2}}\|Q^{-1}\|\right]\|Q^{-1}\|^{-1}$,

тогава максималните решения X_L и $\tilde{X}_L$ съответно на ((1) *и* (6) *съществуват и*

$$\|\Delta X_L\| \leq \frac{1}{c_2}\left(\frac{1}{2}\|\Delta Q\| + \frac{2+\sqrt{2}}{4}\|\Delta A\| + \frac{2+\sqrt{2}}{4}\|\Delta B\|\right) =: E_2, \tag{13}$$

$$\frac{\|\Delta X_L\|}{\|X_L\|} \leq \frac{1}{c_2}\left(\frac{\|\Delta Q\|}{\|Q\|} + \frac{1+\sqrt{2}}{4}\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{1+\sqrt{2}}{4}\frac{\|\Delta B\|}{\|B\|}\right) =: RE_2, \tag{14}$$

където $c_2 = \frac{1}{2} - (\|A\|^2 + \|B\|^2)^{\frac{1}{2}}\|Q^{-1}\|$.

Доказателство: От условие *(i)* и Лема 2 следва, че максималното положително определено решение X_L на уравнението (1) съществува и $\|X_L^{-1}\| < 2\|Q^{-1}\|$.

Ще покажем, че $\|\tilde{A}\|\|\tilde{Q}^{-1}\| < \frac{\sqrt{2}}{4}$ и $\|\tilde{B}\|\|\tilde{Q}^{-1}\| < \frac{\sqrt{2}}{4}$.

От условие *(iv)* имаме (вижте в доказателството на предната теорема)

$$\|\tilde{Q}^{-1}\| \leq \frac{\|Q^{-1}\|}{\frac{1}{2} + (\|A\|^2 + \|B\|^2)^{\frac{1}{2}}\|Q^{-1}\|}. \tag{15}$$

Оттук и условие *(ii)* получаваме

$$\|\tilde{A}\|\|\tilde{Q}^{-1}\| \leq (\|A\| + \|\Delta A\|)\|\tilde{Q}^{-1}\|$$

$$< \frac{\|A\|\|Q^{-1}\| + \frac{\sqrt{2}}{4}\left[\frac{1}{2} + \left((\|A\|^2 + \|B\|^2)^{\frac{1}{2}} - 2\sqrt{2}\|A\|\right)\|Q^{-1}\|\right]}{\frac{1}{2} + (\|A\|^2 + \|B\|^2)^{\frac{1}{2}}\|Q^{-1}\|} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

По аналогичен начин от условие *(iii)* и (15) следва $\|\tilde{B}\|\|\tilde{Q}^{-1}\| < \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Следователно от Лема 2 и

$$(16) \qquad \|\tilde{A}\|\|\tilde{Q}^{-1}\| < \frac{\sqrt{2}}{4}, \quad \|\tilde{B}\|\|\tilde{Q}^{-1}\| < \frac{\sqrt{2}}{4}$$

заключаваме, че максималното решение $\tilde{X}_L$ на уравнението (6) съществува и е в сила неравенството. $\|\tilde{X}_L^{-1}\| < 2\|\tilde{Q}^{-1}\|$.

Освен това от неравенство (15) имаме $(\|A\|^2 + \|B\|^2)^{\frac{1}{2}}\|\tilde{Q}^{-1}\| < \frac{1}{2}$, откъдето получаваме

$$(17) \qquad (\|A\|^2 + \|B\|^2)^{\frac{1}{2}}\|\tilde{X}_L^{-1}\| < 1, \quad \|A\|\|\tilde{X}_L^{-1}\| < 1, \quad \|B\|\|\tilde{X}_L^{-1}\| < 1,$$

а от (16) и $\|\tilde{X}_L^{-1}\| < 2\|\tilde{Q}^{-1}\|$ имаме

$$(18) \qquad \|\tilde{A}\|\|\tilde{X}_L^{-1}\| < \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \|\tilde{B}\|\|\tilde{X}_L^{-1}\| < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

За максималните решения X_L и $\tilde{X}_L$ разглеждаме уравнение (12) и въведените означения φ и ψ на лявата и дясната част съответно. Като използваме частично резултатите от предната теорема, неравенства (17) и (18) получаваме

$$\|\varphi\| \geq \|\Delta X_L\|\left(1 - (\|A\|^2 + \|B\|^2)\|\tilde{X}_L^{-1}\|\|X_L^{-1}\|\right)$$
$$\geq \|\Delta X_L\|\left(1 - 2(\|A\|^2 + \|B\|^2)^{\frac{1}{2}}\|Q^{-1}\|\right) = 2c_2\|\Delta X_L\|,$$
$$\|\psi\| \leq \|\Delta Q\| + (\|A\|\|\tilde{X}_L^{-1}\| + \|\tilde{A}\|\|\tilde{X}_L^{-1}\|)\|\Delta A\| + (\|B\|\|\tilde{X}_L^{-1}\| + \|\tilde{B}\|\|\tilde{X}_L^{-1}\|)\|\Delta B\|$$
$$\leq \|\Delta Q\| + \frac{2+\sqrt{2}}{2}\|\Delta A\| + \frac{2+\sqrt{2}}{2}\|\Delta B\| = 2c_2 E_2,$$

откъдето $\|\Delta X_L\| \leq \frac{1}{c_2}\|\varphi\| = \frac{1}{c_2}\|\psi\| \leq E_2$.

От *(i)* и Лема 2 следват неравенствата $\frac{\|Q\|}{\|X_L\|} < 2$, $\frac{\|A\|}{\|X_L\|} < \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\frac{\|B\|}{\|X_L\|} < \frac{\sqrt{2}}{2}$, откъдето получаваме и $\frac{\|\Delta X_L\|}{\|X_L\|} \leq RE_2$. □

4. Числени експерименти

В тази секция илюстрираме постигнатите резултати в Теорема 1. за максималното положително решение на (1).

Пример 1 *Разглеждаме уравнение* (1) *с матрици*

$$Q := I, \quad A := A_k = \alpha_k A_0, \quad B := B_k = \beta_k I, \quad \text{където}$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} \alpha_k = (\frac{1}{2} - 3.10^{-k})\frac{1}{k+1+(k-1)\|A_0\|}, \\ \beta_k = (\frac{1}{2} - 2\alpha_k)/15. \end{array}$$

и смущения на коефициентите $\Delta A_{kj} = \frac{\alpha_k^{j+1}}{\|C^T + C\|}(C^T + C)$ *и* $\Delta B_{kj} = \beta_k^{j+1} dI$, *където* C *и* d *са съответно матрица и число генерирани с функцията* **rand** *на* Matlab.

Максималното решение на уравнение (1) при $Q = I$ и комутиращи се матрици A и B може да се пресметне по формулата $X_L = \frac{1}{2}\left[I + (I - 4(A^*A + B^*B))^{\frac{1}{2}}\right]$. Такива са свойствата на матричните коефициенти в Пример 1, както и кофицентите на пертурбираното уравнение.

В Таблица 1 са дадени резултатите от експериментите за Пример 1. В случая на $k = 1$ понеже условията *(i)* на Теорема 3.2 не са изпълнени, оценките са отбелязани с "*". Оценките на Попчев и др. [2] са най-близки съответно до истинската грешка, но при тях се изисква информация за решението на изходното уравнение. Макар да има минимална разлика нашата оценка в Теорема 3.1 е по-добра от тази на Дуан и др. [5].

Пример 2 *Разглеждаме уравнение* (1) *с коефициенти* .

$$A = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Таблица 1: Резултати за Пример 1

j		1	2	3	4	5
				k=1		
$\lVert\Delta\tilde{X}_L\rVert/\lVert X_L\rVert$		1.0445e − 02	1.0169e − 03	1.0142e − 04	1.0139e − 05	1.0139e − 06
$f(\delta)/\lVert X_L\rVert$	(3)	1.1959e − 02	1.1620e − 03	1.1587e − 04	1.1584e − 05	1.1584e − 06
$S_{err}/\lVert X_L\rVert$	(5)	3.7346e − 02	3.4191e − 03	3.3900e − 04	3.3871e − 05	3.3868e − 06
$E_1/\lVert X_L\rVert$	(7)	3.4331e − 02	3.3914e − 03	3.3872e − 04	3.3868e − 05	3.3868e − 06
$E_2/\lVert X_L\rVert$	(13)	*	*	*	*	*
RE_2	(14)	*	*	*	*	*
				k=2		
$\lVert\Delta\tilde{X}_L\rVert/\lVert X_L\rVert$		2.7752e − 03	1.9117e − 04	1.3332e − 05	9.3069e − 07	6.4976e − 08
$f(\delta)/\lVert X_L\rVert$	(3)	3.1236e − 03	2.1529e − 04	1.5018e − 05	1.0484e − 06	7.3194e − 08
$S_{err}/\lVert X_L\rVert$	(5)	7.2459e − 03	4.9011e − 04	3.4138e − 05	2.3829e − 06	1.6636e − 07
$E_1/\lVert X_L\rVert$	(7)	7.0780e − 03	4.8931e − 04	3.4134e − 05	2.3829e − 06	1.6636e − 07
$E_2/\lVert X_L\rVert$	(13)	1.7745e − 02	1.2231e − 03	8.5200e − 054	5.9460e − 06	4.1509e − 07
RE_2	(14)	5.5411e − 02	3.4038e − 03	2.3206e − 04	1.6134e − 05	1.1256e − 06

и $Q := X_L + A^*X_L^{-1}A + B^*X_L^{-1}B$, където $X_L = diag(1,2,3,2,1)$ и съответни смущения

$$\Delta A_j = \frac{10^{-2j}}{\lVert C_1\rVert}C_1, \quad \Delta B_j = \frac{10^{-2j}}{\lVert C_2\rVert}C_2, \quad \text{и} \quad \Delta X_j = \frac{10^{-2j}}{\lVert C_3^T + C_3\rVert}(C_3^T + C_3),$$

където C_1, C_2 и C_3 са произволни матрици, получени с функцията **rand** на Matlab.

Таблица 2: Резултати за Пример 2

j	1	2	3	4	5
$\lVert\Delta\tilde{X}_L\rVert/\lVert X_L\rVert$	3.3333e − 03	3.3333e − 05	3.3333e − 07	3.3333e − 09	3.3333e − 11
$E_1/\lVert X_L\rVert$	5.7659e − 03	5.6338e − 05	5.6325e − 07	5.6325e − 09	5.6325e − 11
$E_2/\lVert X_L\rVert$	2.0968e − 02	2.1002e − 04	2.1002e − 06	2.1002e − 08	2.1002e − 10
RE_2	2.7610e − 01	2.7617e − 03	2.7617e − 05	2.7617e − 07	2.7617e − 09

В Таблица 2 са дадени резултатите от експериментите за Пример 2. За този пример оценките на Попчев и др. [2] и Дуан и др. [5] не са приложими, т.к. те са за случай на $Q = I$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **J.H. Long, X.Y. Hu, L. Zhang**, On the Hermitian positive definite solution of the nonlinear matrix equation $X + A^*X^{-1}A + B^*X^{-1}B = I$, Bull. Braz. Math. Soc. 39(3) (2008) 371-386.
2. **I. Popchev, P. Petkov, M. Konstantinov, V. Angelova** Perturbation bounds for the nonlinear matrix equation $X + A^*X^{-1}A + B^*X^{-1}B = I$, in: I. Lirkov, S. Margenov, and J. Wanśiewski (Eds.) LSSC 2011, LNCS 7116, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, pp. 155–162, 2012.
3. **V. Hasanov, A. Ali**, On the convergence of three iterative methods for solving of the matrix equation $X + A^*X^{-1}A + B^*X^{-1}B = I$, Comp. Appl. Math. DOI 10.1007/s40314-015-0215-6, in press.
4. **You-mei He, Jian-hui Long**, On the Hermitian positive definite solution of the nonlinear matrix equation $X + \sum_{i=1}^{m} A_i^*X^{-1}A = I$, Appl. Math. Comput. 216 (2010) 3480-3485
5. **X. Duan, C. Li, A. Liao** Solutions and perturbation analysis for the nonlinear matrix equation $X + \sum_{i=1}^{m} A_i^*X^{-1}A = I$, Appl. Math. Comput. 218 (2011) 4458–4466
6. **A.Lui, G.Chen** , On the Hermitian positive definite solutions of nonlinear matrix equation $X^s + A^*X^{t_1}A + B^*X^{t_2}B = Q$, Math. Probl. Eng. Article ID 163585 (2011)
7. **J.C. Engwerda, A.C.M. Ran, A.L. Rijkeboer**, Necessary and sufficient conditions for the existence of a positive definite solution of the matrix equation $X + A^*X^{-1}A = Q$, Linear Algebra Appl. 186 (1993) 255–275.
8. **J.C. Engwerda**, On the existence of a positive definite solution of the matrix equation $X + A^*X^{-1}A = I$, Linear Algebra Appl. 194 (1993) 91–108.
9. **X.Z. Zhan, J.J. Xie**, On the matrix equation $X + A^TX^{-1}A = I$, Linear Algebra Appl. 247 (1996) 337–345.
10. **C.H. Guo, P. Lancaster**, Iterative solution of two matrix equations, Math. Comput. 68 (1999) 1589–1603.
11. **I.G. Ivanov, V.I. Hasanov, F. Uhilg**, Improved methods and starting values to solve the matrix equations $X \pm A^*X^{-1}A = I$ iteratively, Math. Comput. 74 (2004) 263–278.
12. **X.Z. Zhan**, Computing the extreme positive definite solutions of a matrix equation, SIAM J. Sci. Comput. 17 (1996) 632–645.
13. **S. F. Xu**, Perturbation analysis of the maximal solution of the matrix equation $X + A^*X^{-1}A = P$, Linear Algebra Appl. 336 (2001) 61–70.
14. **V.I. Hasanov, I.G. Ivanov**, On two perturbation estimates of the extreme solutions to the equations $X \pm A^*X^{-1}A = Q$, Linear Algebra Appl. 413 (2006) 81–92.