ТРИТОЧКОВИ КОРЕЛАЦИОННИ АПРОКСИМАЦИИ ЗА ЕФЕКТИВНАТА ПРОВОДИМОСТ НА СЛУЧАЙНА СРЕДА

КРАСИМИР Д. ЦВЯТКОВ

THREE-POINTS CORRELATION APPROXIMATIONS FOR THE EFFECTIVE CONDUCTIVITY OF RANDOM MEDIA

KRASIMIR D. TSVYATKOV

ABSTRACT: *The relation between two known strong-contrast series expansions of the effective polarizability of random media is established. Although these expansions can be derived from one another, their truncations after the first integral terms lead to different approximations for the effective conductivity of the medium depending on the three-points correlation function of the polarizability field. Possibilities for the application of these approximations for symmetric cell materials are considered.* .

KEYWORDS: *effective conductivity, correlation approximation, symmetric cell material*

1. Две разлагания в ред на ефективната проводимост на хетерогенна среда

Още преди 140 години в знаменития си трактат по електричество и магнетизъм Джеймс Кларк Максуел извежда приближена формула за ефективната проводимост на дисперсия от сфери, имащи една и съща проводимост. Проблемът за предсказването на ефективните свойства на хетерогенни среди продължава да привлича вниманието на много изследователи и в наши дни (вж., например, книгите [1] и [13]) .

Ще изведем формули за триточкови корелационни апроксимации на ефективната проводимост $\boldsymbol{\sigma}_e$ на произволна хетерогенна среда, чиято електрическа проводимост е статистическо хомогенно случайно поле $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$. Изводът следва даденото в детайли изложение на Торкуато [1] за двуфазна среда, който е основан на разлагане в ред на ефективната поляризуемост на средата, получен от Браун [2]. Аналогично разлагане в ред е получено и от Финкелберг [3]. Ще изясним връзката между тях и ще изведем формули за корелационни апроксимации за $\boldsymbol{\sigma}_e$, които следват от тези разлагания. Накрая ще получим в явен вид тези приближения за симетричния клетъчен материал на Милер [4]. Отначало ще предполагаме, че средата може да е локално и макроскопически анизотропна, т.е. $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ и $\boldsymbol{\sigma}_e$ са симетрични двувалентни тензори.

Връзката между електрическото поле $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ и плътността на електрическия ток $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ се дава от закона на Ом:

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{x})\cdot\mathbf{E}(\mathbf{x}). \tag{1}$$

Електрическото поле $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ е потенциално: $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\nabla\varphi(\mathbf{x})$, а при отсъствие на вътрешни токови източници плътността на тока $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ се подчинява на уравнението

$$\nabla\cdot\mathbf{J}(\mathbf{x}) = 0. \tag{2}$$

Ефективната проводимост $\boldsymbol{\sigma}_e$ се дефинира чрез усредняване на този закон:

(3) $$\langle \mathbf{J}(\mathbf{x})\rangle = \boldsymbol{\sigma}_e \cdot \langle \mathbf{E}(\mathbf{x})\rangle.$$

Тук и по-долу ъгловите скоби $\langle\ \rangle$ означават усреднение по ансамбъл.

Разглеждаме голям, но с крайни размери, елипсоидален образец от случайната среда с пространствена размерност $d = 2,3$. Да внесем този образец в безкрайна *отправна среда* (или *среда за сравнение*) с проводимост $\boldsymbol{\sigma}_0$ при приложено към нея електрическо поле $\mathbf{E}_0(\mathbf{x})$ преди това. Ще предполагаме, че $\boldsymbol{\sigma}_0$ е изотропен тензор: $\boldsymbol{\sigma}_0 = \sigma_0 \mathbf{I}$, където $\mathbf{I}$ е единичният двувалентен тензор. Представяйки $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ във вида

(4) $$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\sigma}_0 \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) + \mathbf{P}(\mathbf{x}),$$

въвеждаме индуцираната поляризация $\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \left(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\sigma}_0\right) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x})$ относно средата за сравнение. Тогава уравнението (2) приема вида

(5) $$\sigma_0 \Delta\varphi(\mathbf{x}) = \nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{x}).$$

Използвайки функцията на Грийн за уравнението на Лаплас за цялото пространство, електрическото поле $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ можем да представим в интегралната форма

(6) $$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \mathbf{E}_0(\mathbf{x}) + \int \mathbf{G}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \cdot \mathbf{P}(\mathbf{x}')\,\mathrm{d}\mathbf{x}',$$

където

(7) $$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = -\mathbf{D}\delta(\mathbf{x}) + \mathbf{H}(\mathbf{x}),$$

(8) $$\mathbf{D} = \frac{1}{d\sigma_0}\mathbf{I}, \quad \mathbf{H}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\Omega\sigma_0}\frac{d\mathbf{nn} - \mathbf{I}}{r^d},$$

$\mathbf{n} = \mathbf{r}/r,\ r = |\mathbf{r}|,\ \delta(\mathbf{r})$ е делта-функцията на Дирак, а $\Omega = 2\pi$ при $d = 2$ и $\Omega = 4\pi$ при $d = 3$ (вж. книгата на Торкуато [1], Гл. 20). Тук постоянният изотропен тензор $\mathbf{D}$ се появява при изключването на безкрайно малка сферична кухина с проводимост σ_0 и център в точката $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$ при прехода от интегралния израз за $\varphi(\mathbf{x})$ към съответния му израз (6) за $\mathbf{E}(\mathbf{x})$.

Нека сега вместо да разглеждаме електрическото поле $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ на Максуел, да въведем полето на Лоренц

(9) $$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{E}_0(\mathbf{x}) + \int_{\varepsilon} \mathbf{H}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \cdot \mathbf{P}(\mathbf{x}')\,\mathrm{d}\mathbf{x}',$$

за което след внасяне на (7) в (6) намираме

(10) $$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \left\{\mathbf{I} + \mathbf{D} \cdot \left[\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\sigma}_0\right]\right\} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}).$$

(Интегралът в (9) се разбира в смисъл, че радиусът ε на изключената сферична кухина кло-ни към нула, което е отразено в неговото означение.) От (10) и израза за $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ получаваме следната връзка между полетата $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{F}(\mathbf{x})$:

(11) $$\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}),$$

където

(12) $$\mathbf{L}(\mathbf{x}) = \left[\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\sigma}_0\right] \cdot \left\{\mathbf{I} + \mathbf{D} \cdot \left[\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\sigma}_0\right]\right\}^{-1}$$

е поляризуемостта на средата. Равенството

(13) $$\left\langle \mathbf{P}(\mathbf{x}) \right\rangle = \mathbf{L}_e \cdot \left\langle \mathbf{E}(\mathbf{x}) \right\rangle$$

дефинира ефективната поляризуемост $\mathbf{L}_e$ на средата, за която имаме

(14) $$\mathbf{L}_e = \left[\boldsymbol{\sigma}_e - \boldsymbol{\sigma}_0\right] \cdot \left\{\mathbf{I} + \mathbf{D} \cdot \left[\boldsymbol{\sigma}_e - \boldsymbol{\sigma}_0\right]\right\}^{-1}.$$

След умножаване на (9) с $\mathbf{L}(\mathbf{x})$ получаваме уравнението

(15) $$\mathbf{P}(1) = \mathbf{L}(1) \cdot \mathbf{E}_0(1) + \mathbf{L}(1) \cdot \int_{\varepsilon} \mathbf{H}(1,2) \cdot \mathbf{P}(2)\, \mathrm{d}2$$

за поляризацията $\mathbf{P}(\mathbf{x})$. (За краткост на записа тук означихме $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}'$ съответно с 1 и 2, а тяхната разлика $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$ с $1,2$. Този начин на означаване на пространствените променливи ще следваме и по-долу.) Решението на уравнение (15) може да бъде получено итерационно чрез последователни замествания. Така получаваме

(16) $$\begin{aligned} \mathbf{P}(1) &= \mathbf{L}(1) \cdot \mathbf{E}_0(1) + \mathbf{L}(1) \cdot \int_{\varepsilon} \mathbf{H}(1,2) \cdot \mathbf{L}(2) \cdot \mathbf{E}_0(2) \mathrm{d}2 \\ &+ \mathbf{L}(1) \cdot \iint_{\varepsilon} \mathbf{H}(1,2) \cdot \mathbf{L}(2) \cdot \mathbf{H}(2,3) \cdot \mathbf{L}(3) \cdot \mathbf{E}_0(3) \mathrm{d}2\mathrm{d}3 + \cdots . \end{aligned}$$

Усреднявайки сега (16), изразяваме полето $\mathbf{E}_0(\mathbf{x})$ във вида

(17) $$\mathbf{E}_0(1) = \left\langle \mathbf{L}(1) \right\rangle^{-1} \cdot \left\langle \mathbf{P}(1) \right\rangle - \int_{\varepsilon} \mathbf{T}_2(1,2) \cdot \left\langle \mathbf{P}(2) \right\rangle \mathrm{d}2 - \iint_{\varepsilon} \mathbf{T}_3(1,2,3) \cdot \left\langle \mathbf{P}(3) \right\rangle \mathrm{d}2\mathrm{d}3 - \cdots .$$

В случая на изотропен тензор $\mathbf{L}(\mathbf{x}) = L(\mathbf{x})\mathbf{I}$ ядрата $\mathbf{T}_n(1, \ldots, n)$ се изразяват с формулите

(18) $$\mathbf{T}_n(1, \ldots, n) = T_n(1, \ldots, n)\, \mathbf{H}(1,2) \cdot \cdots \cdot \mathbf{H}(n-1, n), \qquad n = 2, 3, \ldots,$$

където

(19) $$\begin{gathered} T_2^L(1,2) = M_2^L(1,2) \big/ (M_1^L(1) M_1^L(2)), \\ T_3^L(1,2,3) = \left[M_3^L(1,2,3) M_1^L(2) - M_2^L(1,2) M_2^L(2,3) \right] \big/ (M_1^L(1) M_1^L(2) M_1^L(3)), \ldots ; \end{gathered}$$

тук $M_n^L(1, \ldots, n) = \left\langle L(1) \ldots L(n) \right\rangle$ са моментите на полето $L(\mathbf{x})$. Отчитайки (17), в (9) изключваме $\mathbf{E}_0(\mathbf{x})$ и получаваме аналогично разлагане за полето $\mathbf{F}(\mathbf{x})$:

(20) $$\mathbf{F}(1) = \left\langle \mathbf{L}(1) \right\rangle^{-1} \cdot \left\langle \mathbf{P}(1) \right\rangle - \int_{\varepsilon} \tilde{\mathbf{T}}_2(1,2) \cdot \left\langle \mathbf{P}(2) \right\rangle \mathrm{d}2 - \iint_{\varepsilon} \mathbf{T}_3(1,2,3) \cdot \left\langle \mathbf{P}(3) \right\rangle \mathrm{d}2\mathrm{d}3 - \cdots .$$

където

(21) $$\tilde{\mathbf{T}}_2(1,2) = \mathbf{T}_2(1,2) - \mathbf{H}(1,2),$$

а $\mathbf{T}_n(1,\dots,n)$ при $n \geq 3$ са същите функции от представянето (17). Отчитайки накрая (13), за ефективния тензор $\mathbf{L}_e$ получаваме представянето

$$(22)\ \mathbf{L}_e^{-1} = \langle \mathbf{L}(1) \rangle^{-1} - \int \tilde{\mathbf{T}}_2(1,2)\,\mathrm{d}2 - \iint \mathbf{T}_3(1,2,3)\,\mathrm{d}2\mathrm{d}3 - \iiint \mathbf{T}_4(1,2,3,4)\,\mathrm{d}2\mathrm{d}3\mathrm{d}4 - \cdots .$$

По същество това разлагане на $\mathbf{L}_e^{-1}$ е получено от Браун [2] за макроскопически изотропна двуфазна среда при $d=3$, след което е обобщавано и за други среди (вж. например Торкуато [5] и Сен и Торкуато [6] за двуфазни среди и Фам и Торкуато [7] за N -фазна среда). Детайлно извеждане на това разлагане е дадено в книгата на Торкуато [1], Гл. 20. Аналогични разлагания са получени и за ефективните еластични модули [1,8].

От уравнение (20) можем да изразим поляризацията $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ чрез полето $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ чрез аналогичния ред

$$(23)\qquad \mathbf{P}(1) = \langle \mathbf{L}(1) \rangle \cdot \langle \mathbf{F}(1) \rangle + \int_{\varepsilon} \mathbf{K}_2(1,2) \cdot \langle \mathbf{F}(2) \rangle \mathrm{d}2 + \iint_{\varepsilon} \mathbf{K}_3(1,2,3) \cdot \langle \mathbf{F}(3) \rangle \mathrm{d}2\mathrm{d}3 + \cdots .$$

където ядрата $\mathbf{K}_n$ се изразяват чрез ядрата в реда (20). Така в случая на изотропен тензор $\mathbf{L}(\mathbf{x})$ ще получим

$$(24)\qquad \mathbf{K}_n(1,\dots,n) = K_n(1,\dots,n)\mathbf{H}(1,2)\cdot \dots \cdot \mathbf{H}(n-1,n), \qquad n = 2,3,\dots,$$

където

$$(25)\qquad \begin{gathered} K_2^L(1,2) = M_2^L(1,2) - M_1^L(1)M_1^L(2), \\ K_3^L(1,2,3) = M_3^L(1,2,3) - M_2^L(1,2)M_1^L(3) - M_1^L(1)M_2^L(2,3) + M_1^L(1)M_1^L(2)M_1^L(3), \dots . \end{gathered}$$

Отчитайки (23) и (13), за ефективния тензор $\mathbf{L}_e$ сега получаваме разлагането

$$(26)\ \mathbf{L}_e = \langle \mathbf{L}(1) \rangle + \int \mathbf{K}_2(1,2)\,\mathrm{d}2 + \iint \mathbf{K}_3(1,2,3)\,\mathrm{d}2\mathrm{d}3 + \iiint \mathbf{K}_4(1,2,3,4)\,\mathrm{d}2\mathrm{d}3\mathrm{d}4 + \cdots .$$

По същество последното представяне за $\mathbf{L}_e$ при изотропен тензор $\mathbf{L}(\mathbf{x})$ е получено формално от Финкелберг [3], който вместо уравнение (15) разглежда аналогичното му интегрално уравнение за полето $\mathbf{F}(\mathbf{x})$.

2. Частни случаи на разлаганията (22) и (26) за $\mathbf{L}_e^{-1}$ и $\mathbf{L}_e$

В случая на локално изотрона среда $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{x})\mathbf{I}$, а следователно и $\mathbf{L}(\mathbf{x}) = L(\mathbf{x})\mathbf{I}$ е също изотропен тензор. Тогава скаларното поле $L(\mathbf{x})$ може да да се запише във вида

$$(27)\qquad L(\mathbf{x}) = d\sigma_0\beta_0(\mathbf{x}), \qquad \beta_0(\mathbf{x}) = \frac{\sigma(\mathbf{x}) - \sigma_0}{\sigma(\mathbf{x}) + (d-1)\sigma_0}.$$

Да представим в същия вид и ефективния тензор на поляризуемостта: $\mathbf{L}_e = d\sigma_0\,\boldsymbol{\beta}_{e0}$, където в случая на макроскопически изотропна среда

$$(28)\qquad \boldsymbol{\beta}_{e0} = \beta_{e0}\,\mathbf{I}, \qquad \beta_{e0} = \frac{\sigma_e - \sigma_0}{\sigma_e + (d-1)\sigma_0}.$$

Да представим също тензорното поле $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ във вида: $\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \dfrac{1}{\sigma_0}\mathbf{t}(\mathbf{x})$ при тензорно поле

(29) $$\mathbf{t}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\Omega}\frac{d\mathbf{nn} - \mathbf{I}}{r^d} = \nabla\nabla g(\mathbf{x}) \qquad (r \neq 0),$$

независещо от σ_0. (В (29) $g(\mathbf{x})$ е функцията на Грийн за уравнението на Лаплас.) При тези означения разлагането (22) за $\mathbf{L}_e^{-1}$ приема вида

(30) $$\boldsymbol{\beta}_{e0}{}^{-1} = \langle \beta_0(\mathbf{x}) \rangle^{-1} \mathbf{I} - \mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_3 - \mathbf{B}_4 - \cdots,$$

където

(31) $$\mathbf{B}_n = d^{n-1} \int \cdots \int T_n^{\beta}(1,\ldots,n)\, \mathbf{t}(1,2) \cdot \cdots \cdot \mathbf{t}(n-1,n)\, d2\ldots dn, \qquad n = 2,3\ldots,$$

$T_2^{\beta}(1,2) = \left[M_2^{\beta}(1,2) - M_1^{\beta}(1) M_1^{\beta}(2) \right] \big/ (M_1^{\beta}(1) M_1^{\beta}(2))$, а корелационните функции $T_n^{\beta}(1,\ldots,n)$ при $n \geq 3$ се дават от същите изрази (19) при замяна на моментите на полето $L(\mathbf{x})$ със съответните моменти $M_n^{\beta}(1,\ldots,n) = \langle \beta(1)\ldots\beta(n) \rangle$ на полето $\beta(\mathbf{x})$. Аналогично разлагането (26) за $\mathbf{L}_e$ приема вида

(32) $$\boldsymbol{\beta}_{e0} = \langle \beta_0(\mathbf{x}) \rangle\, \mathbf{I} + \boldsymbol{\Phi}_2 + \boldsymbol{\Phi}_3 + \boldsymbol{\Phi}_4 + \cdots,$$

където

(33) $$\boldsymbol{\Phi}_n = d^{n-1} \int \cdots \int K_n^{\beta}(1,\ldots,n)\, \mathbf{t}(1,2) \cdot \cdots \cdot \mathbf{t}(n-1,n)\, d2\ldots dn, \qquad n = 2,3\ldots,$$

а корелационните функции $K_n^{\beta}(1,\ldots,n)$ се дават от същите изрази (25) при замяна на моментите на полето $L(\mathbf{x})$ със съответните моменти $M_n^{\beta}(1,\ldots,n)$ на полето $\beta(\mathbf{x})$.

Нека сега средата е макроскопически изотропна. Тъй като $\mathrm{Tr}\, \mathbf{t}(1,2) = 0$, то и $\mathrm{Tr}\, \mathbf{B}_2(1,2) = 0$. Тогава от (30) за скаларния коефициент $\beta_{e0}{}^{-1}$ получаваме разлагането

(34) $$\beta_{e0}{}^{-1} = \langle \beta_0(\mathbf{x}) \rangle^{-1} - \tilde{B}_3 - \tilde{B}_4 - \cdots,$$

където $\tilde{B}_n = \dfrac{1}{d} \mathrm{Tr}\, \mathbf{B}_n$, $n = 2,3,\ldots$. Напълно аналогично от (32) за скаларния коефициент β_{e0} получаваме разлагането

(35) $$\beta_{e0} = \langle \beta_0(\mathbf{x}) \rangle + \tilde{\Phi}_3 + \tilde{\Phi}_4 + \cdots,$$

където $\tilde{\Phi}_n = \dfrac{1}{d} \mathrm{Tr}\, \boldsymbol{\Phi}_n$, $n = 2,3,\ldots$.

3. Корелационни апроксимации за ефективната проводимост

За простота по-нататък ще предполагаме, че средата е локално и макроскопически изотропна. Срязванията на редовете (34) и (35) след първия член водят до двуточковата апроксимация

(36a) $$\beta_{e0} = \langle \beta_0(\mathbf{x}) \rangle,$$

която пък според израза (28) за β_{e0} води до апроксимацията

(36б) $$\sigma_e \approx \sigma_e^M = \sigma_0 \left\{ 1 + \frac{d\langle \beta_0 \rangle}{1 - \langle \beta_0 \rangle} \right\}$$

за ефективната проводимост σ_e. Лесно се показва, че за дисперсия от сферични включвания, потопени в матрица с проводимост σ_m, изборът $\sigma_0 = \sigma_\mathrm{m}$ в (36) води до формулата на Максуел [9] за σ_e. Следователно апроксимацията (36) може да се разглежда като обобщение на формулата на Максуел за произволна хетерогенна среда. Забелязваме също, че при $\sigma_0 = \inf \sigma(\mathbf{x})$ и $\sigma_0 = \sup \sigma(\mathbf{x})$ формулата (36) води до изразите съответно на долната и горната граници на Хашин и Щрикман [10]. Следва да отбележим още, че при $\sigma_0 = \sigma_e$ апроксимацията (36а) води до уравнението

(37) $$\langle \beta_e(\mathbf{x}) \rangle = 0$$

за ефективната проводимост σ_e, което се удовлетворява за средата, която реализира самоспрегнатия модел в теорията на композитните материали, вж. например книгите [1,13].

Срязването на реда (34) след втория член сега води до триточковата апроксимация

(38а) $$\beta_{e0}{}^{-1} = \langle \beta_0(\mathbf{x}) \rangle^{-1} - \tilde{B}_3 ,$$

откъдето намираме

(38б) $$\sigma_e \approx \sigma_e^B = \sigma_0 \left\{ 1 + \frac{d\langle \beta_0 \rangle}{1 - \langle \beta_0 \rangle \left(1 + \tilde{B}_3\right)} \right\},$$

а срязването на реда (35) — до апроксимацията

(39а) $$\beta_{e0} = \langle \beta_0(\mathbf{x}) \rangle + \tilde{\Phi}_3 ,$$

откъдето получаваме

(39б) $$\sigma_e \approx \sigma_e^\Phi = \sigma_0 \left\{ 1 + \frac{d\left(\langle \beta_0 \rangle + \tilde{\Phi}_3\right)}{1 - \left(\langle \beta_0 \rangle + \tilde{\Phi}_3\right)} \right\}.$$

По същество апроксимацията (38) се използва в редица изследвания на хетерогенни среди (вж., например, [1,5,7]). Веднага се вижда, че апроксимацията (39) има точно вида на формулата (36) на Максуел: статистичеслият параметър $\tilde{\Phi}_3$ представлява просто корекция на еднотоковия момент $\langle \beta_0(x) \rangle$ в тази формула. Изглежда, че апроксимацията (39) остава незабелязана при такива изследвания. Ще отбележим още, че стойностите на статистическите параметри $\tilde{B}_3$ и $\tilde{\Phi}_3$, дефинирани съответно с интегралите в (31) и (33), зависят единствено само от триточковия момент $M_3^\beta(1,2,3)$, тъй като останалите събираеми, участващи в изразите на подинтегралните функции $T_3^\beta(1,2,3)$ и $K_3^\beta(1,2,3)$, дефинирани съответно в (19) и (25), не променят стойностите на тези интеграли, а водят само до такова асимптотично поведение на тези функции, което прави съответните интеграли абсолютно сходящи. Имайки пред вид това може лесно да се покаже, че между параметрите $\tilde{B}_3$ и $\tilde{\Phi}_3$ има следната връзка:

(40) $$\tilde{\Phi}_3 = \langle \beta_0(x) \rangle^2 \tilde{B}_3 \cdot$$

Тази връзка се получава лесно и чрез умножаване на редовете (34) и (35), но само при условие, че се вземат в предвид и членовете $\tilde{B}_2$ и $\tilde{\Phi}_2$, макар че те са равни на нула. Ще разгледаме накратко възможността за приложение на апроксимациите (38) и (39) за класа от симетрични клетъчни материали.

4. Приложение на апроксимациите за симетричен клетъчен материал

Симетричният клетъчен материал на Милер [4] се конструира по следния начин. Пространството се разделя на безкраен брой клетки по такъв начин, че получената геометрична структура да бъде статистически хомогенна. При това разделяне формата и размерите на клетките могат да бъдат различни. След това на всяка клетка случайно се задава постоянна проводимост σ, чиято стойност не зависи нито от геометрията на клетката, нито от зададените проводимости на обкръжаващите я клетки. Класически пример за такъв материал е двумерната (тримерната) „шахматна” дъска. Друг класически пример се получава, когато просранството е разделено само на сферични клетки, чиито радиуси се изменят от определена крайна до безкрайно малка стойност.

Позовавайки се на равенствата (7), (8) и (29), можем да изразим полето $\mathbf{t}(\mathbf{x})$ чрез тензора на Грийн $\mathbf{G}(\mathbf{x})$. Да вземем предвид още, че

(40) $$\left\langle \beta_0'(\mathbf{r}_1)\beta_0'(\mathbf{r}_2)\beta_0'(\mathbf{r}_3)\right\rangle = \left\langle \beta_0'^3\right\rangle g(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_3),$$

където $\beta_0'(\mathbf{r}) = \beta_0(\mathbf{r}) - \langle \beta_0\rangle$ е флуктуацията на $\beta_0(\mathbf{r})$, а $g(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_3)$ сега е вероятността и трите точки $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ и $\mathbf{r}_3$ да лежат в една и съща клетка от материала. (Изводът на (40) следва чрез използване на вероятностни разсъждения на Хори [11].) Позовавайки се накрая на някои свойства на интегрален функционал, имащ вида на (31) и (33) при $n=3$ (вж. Торкуато [1]), ще достигнем до следните изрази за статистическите параметри $\tilde{B}_3$ и $\tilde{\Phi}_3$:

(41) $$\tilde{B}_3 = \frac{\tilde{\Phi}_3}{\langle \beta_0\rangle^2}, \quad \tilde{\Phi}_3 = (d-1)\left[\langle \beta_0\rangle \left\langle \beta_0'^2\right\rangle + \zeta_{\mathrm{cell}} \left\langle \beta_0'^3\right\rangle\right],$$

където $\zeta_{\mathrm{cell}} = (d^2G-1)/(d-1)$, а G сега е статистическият параметър, въведен от Милер [4], който се оказва, че зависи само от формата на клетките, но не и от техните размери. Да отбележим, че чрез параметъра ζ_{cell} се изразяват статистическите параметри ζ_2 и $\zeta_1 = 1-\zeta_2$ за двуфазна среда, въведени от Милтон [12]. Параметърът G, а следователно и ζ_{cell}, са пресметнати за клетки с елиптична, хексагонална, квадратна и триъгълна форма при $d=2$ и елипсоидална и кубична форма при $d=3$, вж. [1,13]. Оказва се, че $0 \le \zeta_{\mathrm{cell}} \le 1$, като $\zeta_{\mathrm{cell}} = 0$
за клетки с кръгова (сферична) форма и $\zeta_{\mathrm{cell}} = 1$ за клетки с игловидна форма при $d=2$ и за равнинни дискове при $d=3$.

Имайки предвид, че сферичният клетъчен материал „прилича” на материала, реализиращ самоспрегнатия модел, т.е. за материал, чиято проводимост σ_e е решение на уравнението (37), Торкуато [1] конструира апроксимация за σ_e за двуфазен клетъчен материал с проводимости на компонентите си σ_1 и σ_2, като се позовава на разлагането (34) при $\sigma_0 = \sigma_1$ и $\sigma_0 = \sigma_2$. Позовавайки се отново на уравнението (37) за материал със сферична форма на клетките, ще конструираме нови апроксимации за σ_e. Изборът $\sigma_0 = \sigma_e$ в апроксимацията (38а) води до същото уравнение (37), т.е. до решението за сферичния клетъчен матвриал (самоспрегнатия модел). Изборът $\sigma_0 = \sigma_e$ в апроксимацията (39а) сега води до уравнението

(42) $$\langle \beta_e \rangle \left[1+(d-1)\langle \beta_e'^2 \rangle\right] + (d-1)\zeta_{\text{cell}} \langle \beta_e'^3 \rangle = 0,$$

чието физически смислено решение ще определи нетривиално предсказание за σ_e. В общия случай (42) е алгебрично уравнение от шеста степен относно σ_e, чието смислено решение може да бъде намерено числено, например итерационно, като се използва формулата (39б) с някаква начална стойност на σ_0, да речем $\langle \sigma \rangle$.

Можем да постъпим и по друг начин, като във формулата (39б) заместим σ_0 с решението σ_e^{sph} на уравнение (37). Така ще получим апроксимацията

(43) $$\sigma_e \approx \sigma_e^{\text{sph}} \left\{1 + \frac{d\,Q_{\text{sph}}}{1-Q_{\text{sph}}}\right\}, \quad Q_{\text{sph}} = (d-1)\langle \beta_{\text{sph}}'^3 \rangle \zeta_{\text{cell}},$$

където $\langle \beta_{\text{sph}}'^3 \rangle$ е стойността $\langle \beta_0'^3 \rangle$ при $\sigma_0 = \sigma_e^{\text{sph}}$. Ако същото се направи във формулата (38б), обаче, то ще доведе до тривиалната (т.е. за сферичен материал) апроксимация σ_e^{sph}. Имайки предвид произхода на получените апроксимации (42) и (43), следва да очакваме, че те ще доведат до разумни предсказания за σ_e само за малки стойности на параметъра ζ_{cell}, т.е. когато формата на клетките на материала е близка до сферичната. Детайлно разгглеждане на тези апроксимации и други въпроси ще бъде разгледано другаде.

Настоящото изследване е частично финансирано от фонд „Научни изследвания” на Шуменския университет „Епископ К. Преславски” по проект РД-08-75/03.02.2016.

ЛИТЕРАТУРА

1. Torquato S., *Random heterogeneous materials*, New York, NY: Springer (2002)
2. Brown, W. F., Solid mixture permittivities, *Journal of Chemical Physics*, **23**, 1514 - 1517 (1955)
3. Finkel'berg V.M., Mean field strength in an inhomogeneous medium, *Sov. Phys. JETP*, **19**, 494 - 498 (1964)
4. Miller, M. N., Bounds for effective electrical, thermal, and magnetic properties ofheterogeneous materials, *1. Math. Phys.* **10**, 1988 - 2004 (1969)
5. Torquato, S., Effective electrical conductivity of two-phase disordered composite media, *Journal of Applied Physics*, **58**, 3790 (1985)
6. Sen A. K., S. Torquato, Effective electrical conductivity of two-phase disordered anisotropic composite media, *Physical Review B*, **39**, 4504 (1989)
7. Pham, D. C. , S. Torquato, Strong-contrast expansions and approximations for the effective conductivity of multiphase composites, *Journal of Applied Physics*, **94**, 6591-6602 (2003)
8. Torquato, S., Effective stiffness tensor of composite Media: I. Exact series expansions, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **45**, 1421 (1997)
9. Maxwell, J. C., *A treatise on electricity and magnetism*, Vol.1, Ch. 9, article No 310-315, pp. 435-441, 1st edn. Oxford, United Kingdom: Clarendon Press (1873)
10. Hashin, Z., S. Shtrikman, A variational approach to the theory of the effective magnetic permeability of multiphase materials, *J. Appl. Phys.*, **3**3, 3125 (1962)
11. Hori, M., Statistical theory of effective electrical, thermal, and magnetic properties ofrandom heterogeneous materials. I. Perturbation expansions for the effective permittivity of cell materials, *J. Math. Phys.*, **14**, 514 (1973)
12. Milton, G. W., Bounds on the elastic and transport properties of two-component composites, *J. Mech. Phys. Solids*, **30**, 177-191 (1982)
13. Milton, G. W., *The theory of composites*, Cambridge University Press, Cambridge, England (2001)