ЗА МНОГОМЕРНИТЕ ДИСКРЕТНИ СЪСТАВНИ РАЗПРЕДЕЛЕНИЯ С ЕДНАКЪВ БРОЙ СЪБИРАЕМИ*

ПАВЛИНА К. ЙОРДАНОВА

ON MULTIVARIATE DISCRETE COMPOUND DISTRIBUTIONS WITH ONE AND THE SAME NUMBER OF SUMMANDS

PAVLINA K. JORDANOVA

ABSTRACT: *Here is considered a class of multivariate random vectors, which coordinates can be presented as random sums with one and the same number of summands in any coordinate.*

Such distributions appear in many practical problems. In Risk theory they characterize the total claim amount received by the company in a fixed time point. In Queuing theory they describe cumulative waiting times of customers up to time t. In Theory of branching processes they model the number of heirs at some point in time.

The article starts with the general properties and formulas for numerical characteristics of these distributions. Then some particular cases are considered.

KEYWORDS: *Compound distributions; Multinomial distribution; Negative multinomial distribution.*

1. Въведение

Въпросите за точните разпределения на случайните суми и граничните разпределения на подходящо трансформирани такива са били изследвани интензивно още в началото на миналия век. В литературата се срещат различни дефиниции за тези разпределения. Ние ще използваме следващата.

Дефиниция 1. Нека N е целочислена случайна величина и Y_1, Y_2, …, да са независими еднакво разпределени случайни величини, дефинирани в същото вероятностно пространство. Случайната величина X_N, дефинирана с равенството

$$X_N = I_{N>0}\sum_{i=1}^{N} Y_i \,, \tag{1}$$

се нарича съставно разпределена случайна величина (compound). Тук $I_{N>0}$ е Бернулиева случайна величина, която има стойност 0, когато събитието „N > 0“ не се е сбъднало и стойност 1, когато същото събитие се е реализирало.

В тази точка ще припомним основните резултати за едномерните съставни разпределения (compounds). Унгарският математик Abraham Wald [10] изучава такива случайни величини във връзка с последователният анализ и общото случайно блуждаене и показва, че:

- Ако $EY_1 < \infty$ и $EN < \infty$, то

$$EX_N = EN\, EY_1 \text{ и } E(X_N|N=n)=nEY_1. \tag{2}$$

- Ако $EY_1^{\,2} < \infty$ и $EN^2 < \infty$, то

$$Var\, X_N = Var\, N\, (EY_1)^2 + EN\, Var\, Y_1, \qquad FI\, X_N = FI\, N.\, EY_1 + FI\, Y_1 \tag{3}$$

$$cov(X_N, N) = EY_1\, Var\, N,$$

* Работата е финансирана от НИП РД-08-69/02.02.2016 в ШУ „Епископ Константин Преславски“.

$$cor(X_N, N) = EY_1\sqrt{\frac{Var\ N}{Var\ N\ (EY_1)^2 + EN\ Var\ Y_1}} = \sqrt{\frac{FI\ N}{FI\ N\ + FI\ Y_1}}\ .$$

Виж също Фелер II [1].

Пораждащата вероятностите функция на тези разпределения също е отдавна известна.

- Ако z ≥ 0 е такова, че $G_{Y_1}(z) = Ez^{Y_1} < \infty$ и стойността на тази функция е в радиуса на сходимост на $G_N(z)$, то

(4) $$G_{X_N}(z) = G_N(G_{Y_1}(z)).$$

Виж например Athreya и Karlin, [3].

Частни случаи на такива разпределения са разглеждани още през 1923 г. от F. Eggenberger и G. Polya. Най-често използван е случаят, когато N е Поасоново разпределена случайна величина. В своята докторска дисертация, O. Lundberg [8] изглежда прави първото систематизирано изследване на Сложните Поасонови (СлП) процеси и показва връзката им със Съставните Поасонови (СП) процеси, като показва възможни приложения за тези процеси в застраховането. Maceda [9] намира необходимо и достатъчно условие едно СлП разпределение да е безгранично делимо. През 1943г. Feller [4] отбелязва много полезни свойства на СП разпределения като например, че тяхната пораждащата вероятностите функция (п.в.ф.) е

(5) $$\exp[-\lambda(1 - g(z))],$$

където $\lambda > 0$ е параметъра на N, а g(z) е п.в.ф. на събираемите.

Anscombe [2] разглежда Отрицателното Биномно разпределение като Съставното Поасоново разпределение, с разпределение на събираемите, което може да бъде представено в логаритмичен ред. Той получава различни критерии за съгласуваност за тези разпределения и прави много добър преглед на литературата по темата до този момент.

Едно систематизирано изложение на резултатите, касаещи едномерните съставни разпределения е монографията на Б. Гнеденко и В. Королев [5].

По аналогичен начин на едномерните се въвеждат многомерни съставни разпределения. Това са разпределения, чиито координати удовлетворяват Дефиниция 1. От (2), (3) и (4) е ясно, че ако разполагаме с разпределенията на координатите, то разполагаме и с техните математически очаквания, дисперсии и пораждащи функции. Всеизвестен факт е обаче, че едномерните разпределения, не определят многомерните. Поради това, за да дефинираме добре случайния вектор с тези координати е необходимо да опишем многомерните разпределения. В тази работа зависимостта между координатите ще се определя от два фактора. Първият от тях е, че броят на събираемите в различните координати е една и съща случайна величина N. Вторият фактор ще е разпределението на случайния вектор $(Y_{1i}, Y_{2i}, \ldots Y_{ki})$, който съдържа i – тите събираеми в различните координати. Буквата k ще описва размерността на разглеждания случаен вектор.

2. Дефиниция и основни свойства

Дефиниция 2. Нека N е целочислена случайна величина и $(Y_{1i}, Y_{2i}, \ldots Y_{ki})$, да са независими еднакво разпределени случайни вектори, дефинирани в същото вероятностно пространство. Случайният вектор $(X_{1N}, X_{2N}, \ldots, X_{kN})$, чиито координати са дефинирани с равенството

(6) $$X_{s,N} = I_{N>0}\sum_{i=1}^{N} Y_{s\,i}\ , \quad s = 1, 2, \ldots, k$$

се нарича съставно разпределен случаен вектор, с еднакъв брой събираеми.

➢ От формулата за двойното математическо очакване, ако $z_1, z_2, \ldots, z_k$ са такива, че $G_{Y_{11},Y_{21},\ldots,Y_{k1}}(z_{1i}, z_{2i},\ldots,z_{ki})$ = E $z_1^{Y_{11}} z_2^{Y_{21}} \ldots z_k^{Y_{k1}} < \infty$ и стойността на тази функция е в интервала [0, 1] и в радиуса на сходимост на $G_N(z) = Ez^N$, то п.в.ф. на случайния вектор ($X_{1N}, X_{2N},\ldots, X_{kN}$) е

(7) $$G_{X_{1N},X_{2N},\ldots,X_{kN}}(z_1,z_2,\ldots,z_k) = G_N(G_{Y_{11},Y_{21},\ldots,Y_{k1}}(z_1,z_2,\ldots,z_k)).$$

Т.к. $G_{Y_{11},Y_{21},\ldots,Y_{k1}}(0,0,\ldots,0) = P(Y_{11} = 0,\ Y_{21} = 0,\ \ldots, Y_{k1} = 0)$, то разпределението на вектора се определя със следващите две равенства:

$P(X_{1N} = 0,\ X_{2N} = 0,\ \ldots, X_{kN} = 0) = G_N(G_{Y_{11},Y_{21},\ldots,Y_{k1}}(0,0,\ldots,0)) = G_N(P(Y_{11} = 0,\ Y_{21} = 0,\ \ldots, Y_{k1} = 0))$

и за $x_s \in \{0, 1, \ldots\}$, s = 1, 2, …, k, такива, че $(x_1,\ldots, x_k) \neq (0,\ldots,0)$

(8) $$P(X_{1N} = x_1,\ X_{2N} = x_2,\ \ldots,\ X_{kN} = x_k) = \left.\frac{\partial^{x_1+x_2+\ldots+x_k} G_N(G_{Y_{11},Y_{21},\ldots,Y_{k1}}(z_1,z_2,\ldots,z_k))}{x_1!x_2!\ldots x_k!\,\partial z_1^{x_1}\partial z_2^{x_2}\ldots\partial z_k^{x_k}}\right|_{(z_1,z_2,\ldots,z_k)=(0,0,\ldots,0)} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P(N=n) \sum_{i_{11}+\ldots+i_{1n}=x_1}\ \sum_{i_{21}+\ldots+i_{2n}=x_2} \ldots \sum_{i_{k1}+\ldots+i_{kn}=x_k}\ \prod_{s=1}^{n} P\,(Y_{1s}=i_{1s},\ \ldots,\ Y_{ks}=i_{ks}).$$

➢ От (7) и от основните свойства на пораждащите вероятностите функции, за всяко r = 1, 2, …, k и за всяко подмножество от координати $X_{i_1N}, X_{i_2N},\ldots, X_{i_rN}$

(9) $$G_{X_{i_1N},X_{i_2N},\ldots,X_{i_rN}}(z_{i_1}, z_{i2},\ldots,z_{i_r}) = G_N(G_{Y_{11},Y_{21},\ldots,Y_{k1}}(\vec{z}_{i\bar{i}})),$$

където векторът $\vec{z}_{i\bar{i}}$ има координати равни на единица на местата, различни от $i_1, i_2, \ldots, i_r$ и съответно координати $z_{i_1}, z_{i_2},\ldots, z_{i_r}$ на останалите места. Тогава

(10) $$P(X_{i_1N} = x_{i_1}, X_{i_2N} = x_{i_2},\ldots, X_{i_rN} = x_{i_r}) = \left.\frac{\partial^{x_{i_1}+x_{i_2}+\ldots+x_{i_r}} G_N(G_{Y_{11},Y_{21},\ldots,Y_{k1}}(\vec{z}_{i\bar{i}}))}{x_{i_1}!x_{i_2}!\ldots x_{i_r}!\,\partial z_{i_1}^{x_{i_1}}\partial z_{i_2}^{x_{i_2}}\ldots\partial z_{i_r}^{x_{i_r}}}\right|_{(z_{i_1},z_{i_2},\ldots,z_{i_r})=(0,0,\ldots,0)}$$

➢ От (7) и от основните свойства на п.в.ф., за всяко i = 1, 2, …, k,

(11)
$$P(X_{iN} = m) = \left.\frac{\partial^m G_N(G_{Y_{11},\ldots,Y_{k1}}(1,\ldots,1,z_i,1,\ldots,1))}{m!\,\partial z_i^m}\right|_{z_i=0} =$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} P(N=n)P(Y_{i1}=0)^n & ,\quad m=0 \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} P(N=n) \sum_{j_1+\ldots+j_n=m} P(Y_{i1}=j_1)\ldots P(Y_{i1}=j_n) & ,\quad m\neq 0 \end{cases}.$$

$$G_{X_{iN}}(z_i) = G_N(G_{Y_{i1}}(z_i)) = G_N(G_{Y_{11},\ldots,Y_{k1}}(1,\ldots,1,z_i,1,\ldots,1)).$$

От (2), ако $EY_{i1} < \infty$ и $EN < \infty$, то

$$EX_{iN} = EN\,EY_{i1},$$

а от (3), ако $EY_{i1}^{\,2} < \infty$ и $EN^2 < \infty$, то

$$Var\,X_{iN} = Var\,N\,(EY_{i1})^2 + EN\,Var\,Y_{i1}, \qquad FI\,X_{iN} = FI\,N.\,EY_{i1} + FI\,Y_{i1}.$$

➢ От дефиницията за условна вероятност

(12) $$\mathrm{P}(X_{iN}=x_i \mid X_{jN}=x_j) = \frac{1}{x_i!}\,\frac{\left.\dfrac{\partial^{x_i+x_j} \mathrm{G_N}(\mathrm{G}_{Y_{11},Y_{21},\dots,Y_{k1}}(\vec{z}_{ij\bar{i}\bar{j}}))}{\partial z_i^{x_i}\partial z_j^{x_j}}\right|_{(z_i,z_j)=(0,0)}}{\left.\dfrac{\partial^{x_j} \mathrm{G_N}(\mathrm{G}_{Y_{11},\dots,Y_{k1}}(1,\dots,1,z_j,1,\dots,1))}{\partial z_j^{x_j}}\right|_{z_j=0}}$$

където векторът $\vec{z}_{ij\bar{i}\bar{j}}$ има координати равни на единица на местата, различни от i, j и съответно координати z_i, z_j на i – то и j - то място.
От основните свойства на пораждащите функции

(13) $$G_{X_{iN}}(z_i \mid X_{jN}=x_j) =$$

$$=\sum_{x_i=0}^{\infty}\frac{z_i^{x_i}}{x_i!}\,\frac{\left.\dfrac{\partial^{x_i+x_j} \mathrm{G_N}(\mathrm{G}_{Y_{11},Y_{21},\dots,Y_{k1}}(\vec{z}_{ij\bar{i}\bar{j}}))}{\partial z_i^{x_i}\partial z_j^{x_j}}\right|_{(z_i,z_j)=(0,0)}}{\left.\dfrac{\partial^{x_j} \mathrm{G_N}(\mathrm{G}_{Y_{11},\dots,Y_{k1}}(1,\dots,1,z_j,1,\dots,1))}{\partial z_j^{x_j}}\right|_{z_j=0}} = \frac{\left.\dfrac{\partial^{x_j} \mathrm{G_N}(\mathrm{G}_{Y_{11},Y_{21},\dots,Y_{k1}}(\vec{z}_{ij\bar{i}\bar{j}}))}{\partial z_j^{x_j}}\right|_{z_j=0}}{\left.\dfrac{\partial^{x_j} \mathrm{G_N}(\mathrm{G}_{Y_{11},\dots,Y_{k1}}(1,\dots,1,z_j,1,\dots,1))}{\partial z_j^{x_j}}\right|_{z_j=0}},$$

(14) $$\mathrm{E}(X_{iN} \mid X_{jN}=x_j) = \frac{\displaystyle\sum_{x_i=1}^{\infty}\frac{1}{(x_i-1)!}\left.\dfrac{\partial^{x_i+x_j} \mathrm{G_N}(\mathrm{G}_{Y_{11},Y_{21},\dots,Y_{k1}}(\vec{z}_{ij\bar{i}\bar{j}}))}{\partial z_i^{x_i}\partial z_j^{x_j}}\right|_{(z_i,z_j)=(0,0)}}{\left.\dfrac{\partial^{x_j} \mathrm{G_N}(\mathrm{G}_{Y_{11},\dots,Y_{k1}}(1,\dots,1,z_j,1,\dots,1))}{\partial z_j^{x_j}}\right|_{z_j=0}} =$$

$$= \frac{\left.\dfrac{\partial}{\partial z_i}\left\{\left.\dfrac{\partial^{x_j} \mathrm{G_N}(\mathrm{G}_{Y_{11},Y_{21},\dots,Y_{k1}}(\vec{z}_{ij\bar{i}\bar{j}}))}{\partial z_j^{x_j}}\right|_{z_j=0}\right\}\right|_{z_i=1}}{\left.\dfrac{\partial^{x_j} \mathrm{G_N}(\mathrm{G}_{Y_{11},\dots,Y_{k1}}(1,\dots,1,z_j,1,\dots,1))}{\partial z_j^{x_j}}\right|_{z_j=0}}.$$

- Смесен момент

(15) $$EX_{iN}X_{jN} = \left.\frac{\partial^2 G_N(G_{Y_{11},Y_{21},\dots,Y_{k1}}(\vec{z}_{ij\bar{i}\bar{j}}))}{\partial z_i \partial z_j}\right|_{(z_i,z_j)=(1,1)},$$

(16) $$\mathrm{cov}(X_{iN}, X_{jN}) = \left.\frac{\partial^2 G_N(G_{Y_{11},Y_{21},\dots,Y_{k1}}(\vec{z}_{ij\bar{i}\bar{j}}))}{\partial z_i \partial z_j}\right|_{(z_i,z_j)=(1,1)} - (EN)^2\, EY_{i1}\, EY_{j1},$$

(17) $$\mathrm{cor}(X_{iN}, X_{jN}) = \frac{\left.\dfrac{\partial^2 G_N(G_{Y_{11},Y_{21},\dots,Y_{k1}}(\vec{z}_{ij\bar{i}\bar{j}}))}{\partial z_i \partial z_j}\right|_{(z_i,z_j)=(1,1)} - (EN)^2 EY_{i1}EY_{j1}}{\sqrt{[Var\ N\ (EY_{i1})^2 + EN\ Var\ Y_{i1}][Var\ N\ (EY_{j1})^2 + EN\ Var\ Y_{j1}]}}.$$

➢ От дефиницията за п.в.ф.

(18) $$G_{X_{1N}+X_{2N}+\ldots+X_{kN}}(z) = \mathrm{G_N}(G_{Y_{11},Y_{21},\ldots,Y_{k1}}(z,z,\ldots,z)).$$

$$\mathrm{P}(X_{1N}+X_{2N}+\ldots+X_{kN}=s) = \left.\frac{\partial^s \mathrm{G_N}(\mathrm{G}_{Y_{11},Y_{21},\ldots,Y_{k1}}(z,z,\ldots,z))}{s!\partial z^s}\right|_{z=0}$$

➢ От дефиницията за п.в.ф.

(19) $$G_{X_{iN},X_{1N}+\ldots+X_{i-1N}+X_{i+1N}+\ldots+X_{kN}}(z_i,z) = \mathrm{G_N}(G_{Y_{11},\ldots,Y_{i-11},Y_{i1},Y_{i+11},\ldots,Y_{k1}}(z,\ldots,z,z_i,z\ldots,z)).$$

$\mathrm{P}(X_{iN}=m,\ X_{1N}+\ldots+X_{i-1N}+X_{i+1N}+\ldots+X_{kN}=s)$ =

$$= \left.\frac{\partial^{s+m}\mathrm{G_N}(\mathrm{G}_{Y_{11},\ldots,Y_{i-11},Y_{i1},Y_{i+11},\ldots,Y_{k1}}(z,\ldots,z,z_i,z,\ldots,z))}{s!m!\partial z^s\partial z_i^m}\right|_{(z,z_i)=(0,0)}$$

➢ От дефиницията за условна вероятност, за m = 0, 1, …, s,

$$\mathrm{P}(X_{iN}=m \mid X_{1N}+\ldots+X_{kN}=s) = \frac{\left.\dfrac{\partial^{s}\mathrm{G_N}(\mathrm{G}_{Y_{11},\ldots,Y_{i-11},Y_{i1},Y_{i+11},\ldots,Y_{k1}}(z,\ldots,z,z_i,z,\ldots,z))}{(s-m)!m!\partial z^{s-m}\partial z_i^m}\right|_{(z,z_i)=(0,0)}}{\left.\dfrac{\partial^s \mathrm{G_N}(\mathrm{G}_{Y_{11},Y_{21},\ldots,Y_{k1}}(z,z,\ldots,z))}{s!\partial z^s}\right|_{z=0}}$$

$$G_{X_{iN}}(z_i \mid X_{1N}+X_{2N}+\ldots+X_{kN}=s) = \frac{\displaystyle\sum_{m=0}^{s} z_i^m \left.\frac{\partial^{s}\mathrm{G_N}(\mathrm{G}_{Y_{11},\ldots,Y_{i-11},Y_{i1},Y_{i+11},\ldots,Y_{k1}}(z,\ldots,z,z_i,z,\ldots,z))}{(s-m)!m!\partial z^{s-m}\partial z_i^m}\right|_{(z,z_i)=(0,0)}}{\left.\dfrac{\partial^s \mathrm{G_N}(\mathrm{G}_{Y_{11},Y_{21},\ldots,Y_{k1}}(z,z,\ldots,z))}{s!\partial z^s}\right|_{z=0}}$$

3. Частни случаи

3.1. Съвместно Полиномно разпределение на събираемите с еднакви индекси.

Тук ще предполагаме, че $(Y_{1i}, Y_{2i}, \ldots Y_{ki})$, $i = 1, 2, \ldots$ са независими еднакво Полиномно разпределени случайни вектори, с параметри $(s, p_1, p_2, \ldots, p_k)$, където $s \in \mathbb{N}$, $p_1 > 0$, $p_2 > 0$, …, $p_k > 0$ и $p_1 + p_2 + \ldots + p_k = 1$. Ще означаваме полученото разпределение с

$$(X_{1N}, X_{2N}, \ldots, X_{kN}) \sim CNMn(s; p_1, p_2, \ldots, p_k).$$

Дефиницията и свойствата на Полиномното разпределение могат да бъдат намерени в много учебници за дискретни многомерни разпределения, например в [7].

➢ Характеризация.

От (7) и свойствата на Полиномното разпределение

$$G_{X_{1N},X_{2N},\ldots,X_{kN}}(z_1,z_2,\ldots,z_k) = G_N((p_1z_1+p_2z_2+\ldots+p_kz_k)^s) = G_{sN}(p_1z_1+p_2z_2+\ldots+p_kz_k).$$

Т.к. $G_{Y_{11},Y_{21},\ldots,Y_{k1}}(0,0,\ldots,0) = \mathrm{P}(Y_{11}=0,\ Y_{21}=0,\ \ldots,\ Y_{k1}=0) = 0$, разпределението на вектора се определя със следващите две равенства:

$$\mathrm{P}(X_{1N}=0,\ X_{2N}=0,\ \ldots,\ X_{kN}=0) = \mathrm{G_N}(0) = \mathrm{P}(N=0)$$

и по-общо, за $x_s \in \{0, 1, \dots\}$, s = 1, 2, …, k, и $x_1 + x_2 + \dots + x_k$ кратно на s

$$P(X_{1N} = x_1,\ X_{2N} = x_2,\ \dots,\ X_{kN} = x_k) = \binom{x_1 + x_2 + \dots + x_k}{x_1, x_2, \dots, x_k} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \dots p_k^{x_k} P(Ns = x_1 + x_2 + \dots + x_k)$$

➢ Крайномерни разпределения: От (7) и от основните свойства на п.в.ф., за всяко r = 1, 2, …, k и за всяко подмножество от координати $X_{i_1 N}, X_{i_2 N}, \dots, X_{i_r N}$

$$G_{X_{i_1 N}, X_{i_2 N}, \dots, X_{i_r N}}(z_{i_1}, z_{i2}, \dots, z_{i_r}) = G_{sN}(p_{i_1} z_{i_1} + p_{i_2} z_{i_2} + \dots + p_{i_r} z_{i_r} + 1 - (p_{i_1} + \dots + p_{i_r})).$$

$P(X_{i_1 N} = x_{i_1}, X_{i_2 N} = x_{i_2}, \dots, X_{i_r N} = x_{i_r}) =$

$$\frac{p_{i_1}^{x_{i_1}} \dots p_{i_r}^{x_{i_r}}}{x_{i_1}! x_{i_2}! \dots x_{i_r}!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m + (x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_r}))!}{m!} (1 - (p_{i_1} + p_{i_2} + \dots + p_{i_r}))^m P(sN = m + (x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_r})).$$

Нещо повече:

$$(X_{i_1 N}, X_{i_2 N}, \dots, X_{i_r N}, Ns - (X_{i_1 N} + X_{i_2 N} + \dots + X_{i_r N})) \sim \text{CNMn}(s;$$
$$p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_r}, 1 - (p_{i_1} + p_{i_2} + \dots + p_{i_r}))$$

➢ Разпределения и числови характеристики на координатите: за всяко i = 1, 2, …, k,

$$P(X_{iN} = m) = \frac{p_i^m}{m!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+m)!}{j!} (1 - p_i)^j P(sN = j + m),\ m = 0, 1, \dots$$

Забележка: От тук и от формула (11) можем да докажем, че

$$\sum_{j_1 + \dots + j_n = m} \binom{s}{j_1} \dots \binom{s}{j_n} = \binom{ns}{m}.$$

От (2), ако $EN < \infty$, то $EX_{iN} = s\, p_i\, EN$, а от (3), ако $EN^2 < \infty$, то

$$Var\, X_{iN} = s\, p_i\, [s\, p_i\, Var\, N + EN\, (1 - p_i)].$$

$$FI\, X_N = s\, p_i\, FI\, N + 1 - p_i = p_i\, (s\, FI\, N - 1) + 1$$

➢ Условни разпределения и регресии:

$$P(X_{iN} = x_i \mid X_{jN} = x_j) = \frac{p_i^{x_i}}{x_i!} \frac{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m + (x_i + x_j))!}{m!} (1 - (p_i + p_j))^m P(sN = m + (x_i + x_j))}{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m + x_j)!}{m!} (1 - p_j)^m P(sN = m + x_j)}$$

$$G_{X_{iN}}(z_i \mid X_{jN} = x_j) = \frac{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m + x_j)!}{m!} (p_i z_i + 1 - p_i - p_j)^m P(sN = m + x_j)}{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m + x_j)!}{m!} (1 - p_j)^m P(sN = m + x_j)}$$

$$E(X_{iN} \mid X_{jN} = x_j) = p_i \frac{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m + 1 + x_j)!}{m!} (1 - p_j)^m P(sN = m + 1 + x_j)}{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m + x_j)!}{m!} (1 - p_j)^m P(sN = m + x_j)}.$$

➢ Числови характеристики на двумерните разпределения.

$$EX_{iN}X_{jN} = s\,p_i\,p_j\,[sEN^2 - EN],$$
$$\operatorname{cov}(X_{iN}, X_{jN}) = s\,p_i\,p_j\,[s\,Var\,N - EN],$$

$$\operatorname{cor}(X_{iN}, X_{jN}) = \frac{\sqrt{p_i p_j}\,(sVar\ N - EN)}{\sqrt{[sp_i Var\ N + EN\ (1-p_i)][sp_j Var\ N + EN\ (1-p_j)]}} =$$

$$= \frac{\sqrt{p_i p_j}\,(sFI\ N - 1)}{\sqrt{[sp_i FI\ N + 1 - p_i][sp_j FI\ N + 1 - p_j]}} = \sqrt{\frac{(FI\ X_{iN} - 1)(FI\ X_{jN} - 1)}{FI\ X_{iN} FI\ X_{jN}}}.$$

- Разпределение на сумата от координатите.

$$X_{1N} + X_{2N} + \ldots + X_{kN} \overset{d}{=} sN,$$

където с $\overset{d}{=}$ е означено равенство по разпределение,

$$G_{X_{1N}+X_{2N}+\ldots+X_{kN}}(z) = G_{sN}(z),$$

$$P(X_{1N} + X_{2N} + \ldots + X_{kN} = m) = P(sN = m)$$

- От дефиницията за п.в.ф.

$$G_{X_{iN}, X_{1N}+\ldots+X_{i-1N}+X_{i+1N}+\ldots+X_{kN}}(z_i, z) = G_{sN}(z(1-p_i)+p_i z_i).$$

$$P(X_{iN} = m, X_{1N} + \ldots + X_{i-1N} + X_{i+1N} + \ldots + X_{kN} = j) = \binom{j+m}{j} (1-p_i)^j p_i^m P(sN=j+m)$$

- От дефиницията за условна вероятност

$$P(X_{iN} = m \mid X_{1N} + \ldots + X_{kN} = j) = \binom{j}{m}(1-p_i)^{j-m} p_i^m,$$

т.е. $(X_{iN} \mid X_{1N} + \ldots + X_{kN} = j) \sim Bi(j;p_i)$.

3.2. Съвместно многомерно отрицателно биномно разпределение на събираемите с еднакви индекси.

Тук ще предполагаме, че $(Y_{1i}, Y_{2i}, \ldots Y_{ki})$, $i = 1, 2, \ldots$ са независими еднакво многомерно Отрицателно Биномно (МОБ) разпределени случайни вектори, с параметри $(s, p_1, p_2, \ldots, p_k)$, където $s \in \mathbb{N}$, $p_1 > 0$, $p_2 > 0$, …, $p_k > 0$ и $p_1 + p_2 + \ldots + p_k < 1$. Ще означаваме полученото разпределение с

$$(X_{1N}, X_{2N}, \ldots, X_{kN}) \sim CNNMn(s; p_1, p_2, \ldots, p_k).$$

Дефиницията и свойствата на това разпределение могат да бъдат намерени в [7].

- Характеризация.

Нека $p_0 = 1 - p_1 - p_2 - \ldots - p_k$. От (7) и свойствата на МОБ разпределение

$$G_{X_{1N}, X_{2N}, \ldots, X_{kN}}(z_1, z_2, \ldots, z_k) = G_{sN}\left(\frac{p_0}{1 - p_1 z_1 - p_2 z_2 - \ldots - p_k z_k}\right).$$

Разпределението на вектора се определя със следващите две равенства:

$$P(X_{1N} = 0,\ X_{2N} = 0,\ \ldots, X_{kN} = 0) = G_{sN}(p_0)$$

и за $x_s \in \{0, 1, \ldots\}$, $s = 1, 2, \ldots, k$, такива, че $(x_1, \ldots, x_k) \neq (0, \ldots, 0)$

$$P(X_{1N} = x_1,\ X_{2N} = x_2,\ \dots,\ X_{kN} = x_k) = p_1^{x_1}\dots p_k^{x_k}\sum_{j=1}^{\infty}\binom{sj + x_1 + \dots + x_k - 1}{x_1,\dots,x_k, sj-1} p_0^{js} P(N=j).$$

- За всяко r = 1, 2, …, k и за всяко подмножество от координати $X_{i_1N}, X_{i_2N}, \dots, X_{i_rN}$

$$G_{X_{i_1N},X_{i_2N},\dots,X_{i_rN}}(z_{i_1}, z_{i2},\dots, z_{i_r}) = G_{sN}\left(\frac{\rho_{0r}}{1-\rho_{i_1}z_{i_1}-\rho_{i_2}z_{i_2}-\dots-\rho_{i_r}z_{i_r}}\right),$$

където $\rho_{i_j} = \dfrac{p_{i_j}}{p_0 + \sum_{j=1}^{r} p_{i_j}}$, $\rho_{0r} = 1-\rho_{i_1}-\dots-\rho_{i_r}$. т.е. $(X_{i_1N}, X_{i_2N},\dots, X_{i_rN})$ ~ CNNMn(s; $\rho_{i_1},\dots,\rho_{i_r}$).

$$P(X_{i_1N} = 0, X_{i_2N} = 0,\dots, X_{i_rN} = 0) = G_{sN}(\rho_{0r})$$

и за $x_{i_s} \in \{0, 1, \dots\}$, s = 1, 2, …, r, такива, че $(x_{i_1},\dots, x_{i_r}) \neq (0,\dots,0)$

$$P(X_{i_1N} = x_{i_1}, X_{i_2N} = x_{i_2},\dots, X_{i_rN} = x_{i_r}) = \rho_{i_1}^{x_{i_1}}\dots\rho_{i_r}^{x_{i_r}}\sum_{j=1}^{\infty}\binom{sj + x_{i_1} + \dots + x_{i_r} - 1}{x_{i_1},\dots,x_{i_r}, sj-1}\rho_{0r}^{js}P(N=j).$$

- От (2), ако $EN < \infty$, то $EX_{iN} = s\dfrac{p_i}{p_0}EN$, а от (3), ако $EN^2 < \infty$, то

$$Var\ X_{iN} = s\frac{p_i^2}{p_0^2}\left(sVar\ N + EN\left(\frac{p_0}{p_i}+1\right)\right), \qquad FI\ X_N = \frac{p_i}{p_0}(s\ FI\ N + 1) + 1.$$

- При $x_j \neq 0$, $x_i = 0, 1, \dots$, $P(X_{iN} = x_i \mid X_{jN} = x_j) =$

$$= \frac{1}{x_i!}\left(\frac{p_0+p_j}{p_0+p_i+p_j}\right)^{x_i}\left(\frac{p_i}{p_0+p_i+p_j}\right)^{x_j} \cdot \frac{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(sn+x_i+x_j-1)!}{(sn-1)!}\left(\frac{p_0}{p_0+p_i+p_j}\right)^{ns}P(N=n)}{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(sn+x_j-1)!}{(sn-1)!}\left(\frac{p_0}{p_0+p_j}\right)^{ns}P(N=n)},$$

При $x_i = 1, 2, \dots$

$$P(X_{iN} = x_i \mid X_{jN} = 0) = \left[G_{sN}\left(\frac{p_0}{p_0+p_j}\right)\right]^{-1}\left(\frac{p_0+p_j}{p_0+p_i+p_j}\right)^{x_i}\sum_{n=1}^{\infty}\binom{sn+x_i-1}{x_i}\left(\frac{p_0}{p_0+p_i+p_j}\right)^{ns}P(N=n)$$

$$P(X_{iN} = 0 \mid X_{jN} = 0) = G_{sN}\left(\frac{p_0}{p_0+p_i+p_j}\right)\left[G_{sN}\left(\frac{p_0}{p_0+p_j}\right)\right]^{-1}$$

$$E(X_{iN} \mid X_{jN} = x_j) = \frac{p_i}{p_i+p_0}(x_j + o(x_j)).$$

- $X_{1N} + X_{2N} + \dots + X_{kN}$ ~ CNNMn(s; $1-p_0$).
- $(X_{iN} \mid X_{1N} + X_{2N} + \dots + X_{kN} = m)$ ~ Bi(m; $\dfrac{p_i}{1-p_0}$).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Феллер**, В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, том II, „Мир“, Москва, 1967 г.
2. **Anscombe,** F. J. Sampling theory of the negative binomial and logarithmic series distributions. Biometrika, 37(3/4), 358-382, 1950.
3. **Athreya**, K. B., & Karlin, S. (1971). On branching processes with random environments: I: Extinction probabilities. The Annals of Mathematical Statistics, 42(5), 1499-1520.
4. **Feller,** W. (1943). On a general class of" contagious" distributions. The Annals of mathematical statistics, 14(4), 389-400.
5. **Gnedenko**, B. V., V. Y. Korolev, Random summation: limit theorems and applications. CRC Press, 1996.
6. **Gurland**, J. Some interrelations among compound and generalized distributions. Biometrika, 44(1/2), 265-268, 1957.
7. **Johnson**, N.L., Kotz, S., Balakrishnan, N.: Discrete multivariate distributions, vol. 165, Wiley, New York, 1997.
8. **Lundberg**, O. On random processes and their application to sickness and accident statistics, Doctoral thesis, monograph, 1940.
9. **Maceda**, E. C. On the compound and generalized Poisson distributions. The Annals of mathematical statistics, 414-416, 1948.
10. **Wald**, A. On cumulative sums of random variables. The Annals of Mathematical Statistics, 15(3), 283-296, 1944.