ИЗСЛЕДВАНЕ НА КАНОНИЧНАТА ФОРМА НА ФУНДАМЕНТАЛНАТА МАТРИЦА*

Георги Хр. Георгиев

Венцислав Д. Радулов

INVESTIGATION OF A CANONICAL FORM OF A FUNDAMENTAL MATRIX

Georgi H. Georgiev

Vencislav D. Radulov

ABSTRACT: *In this paper a complete analysis to the presentations of the fundamental matrix in all of the possible mutual position of the baseline and the two projection planes has been made. As a result, the canonical form of the fundamental matrix is obtained. This is a presentation, in which the fundamental matrix, up to scale, has elements of integers and minimal Frobenius' norm. The canonical coordinate systems, in which this form is obtained, are also constructed. The additional properties of the plane affine coordinate systems are determined.*

KEYWORDS: *canonical form of a fundamental matrix and coordinate systems*

1 Увод в епиполарната геометрия

1.1 Основни понятия

Нека имаме две централни проекции $\Pi_1 = (C^1, \pi_1)$ и $\Pi_2 = (C^2, \pi_2)$, където C^1, C^2 са двата различни проекционни центъра, а π_1 и π_2 са проекционните равнини (Фигура 1). Ако $M \in \mathbb{E}^3$ е произволна точка, различна от C^1 и C^2, а $M_1 = (C^1 \vee M)\bigcap \pi_1$, и $M_2 = (C^2 \vee M)\bigcap \pi_2$ са централните ѝ проекции в π_1 и π_2, то (M_1, M_2) е двойка съответни точки.

• правата $(C^1 \vee C^2)$ се нарича базова права;

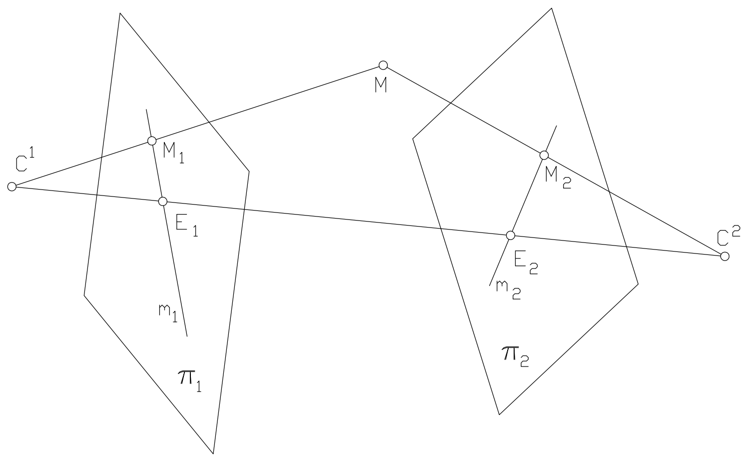
• прободите на базовата права с проекционните равнини се наричат епиполарни точки – $E_1 = (C^1 \vee C^2)\bigcap \pi_1$ и $E_2 = (C^1 \vee C^2)\bigcap \pi_2$, които може да са крайни или безкрайни точки.

• епиполарна равнина е всяка равнина, съдържаща базовата права;

• епиполарни прави са пресечниците на епиполарна равнина с проекционните равнини.

Ако $M_1 \in \pi_1$ е произволна точка ($M_1 \neq E_1$), то епиполарната равнина γ, съдържаща точки C^1, C^2 и M_1, пресича проекционната равнина π_2 в епиполарна права

*Статията е частично финансирана от фонд "Научни изследвания" на ШУ по проект № РД-08-102/05.02.2016



Фигура 1: Централно проектиране от два центъра.

$m_2 = \gamma \bigcap \pi_2$. Така се определя корелация $\mathbb{F}$, която на произволна точка $M_1 \in \pi_1$ съпоставя епиполарна права $m_2 \in \pi_2$. Алгебрично тази корелация се изразява чрез фундаменталната матрица $\mathbf{F}$ ([1], [3], [4]), която преобразува вектор-стълба $\mathbf{M_1}$ от хомогенни координати на точка M_1 в транспонирания вектор-стълб $\mathbf{m_2}^T$, съпоставен на епиполарната права m_2, или $\mathbf{FM_1} = \mathbf{m_2}^T$, като координатите са спрямо произволни координатни системи в двете равнини.

1.2 Свойства на фундаменталната матрица F

1. $\mathbf{M_2}^T\mathbf{FM_1} = 0$, където $\mathbf{M_1}$ и $\mathbf{M_2}$ са координатните вектори на двойката съответни точки (M_1, M_2).
2. Фундаменталната матрица може да бъде определена с точност до множител.
3. $\mathbf{F'} = \mathbf{F}^T$, където $\mathbb{F}' : \pi_2 \to \pi_1$ е корелация, аналогична на описаната $\mathbb{F} : \pi_1 \to \pi_2$ и съответните им фундаментални матрици са $\mathbf{F'}$ и $\mathbf{F}$.
4. Ядрото на $\mathbf{F}$ е епиполарната точка. ($\mathbf{FE_1} = \mathbf{0}, \mathbf{F'E_2} = \mathbf{0}$), където $\mathbf{0}$ е 3×1 нулев вектор.

2 Канонична форма на фундаменталната матрица

Разглежданията в настоящата статия водят до намиране на такива афинни координатни системи в двете проекционни равнини, спрямо които фундаменталната матрица, определена с точност до множител и с елементи цели числа, има минимална норма на Фробениус.

Нека γ и γ' са две различни епиполарни равнини, като $a_1 = \gamma \bigcap \pi_1$, $b_1 = \gamma' \bigcap \pi_1$, $a_2 = \gamma \bigcap \pi_2$, $b_2 = \gamma' \bigcap \pi_2$. Някои от тези прави могат да бъдат безкрайни прави.

2.1 Две крайни епиполарни точки

Теорема 1. *Двете епиполарни точки са крайни (Евклидови) тогава и само тогава, когато съществуват равнинни координатни системи $\tau_1^C = O_1x_1y_1$ в π_1 и $\tau_2^C = O_2x_2y_2$ в π_2, такива че фундаменталната матрица $\mathbf{F}$ спрямо тях (с точност до множител) е*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ или } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Доказателство: В [2] е доказано, че първата форма на (1) се получава при равнинни координатни системи $\tau_1^C = O_1x_1y_1$ в π_1 и $\tau_2^C = O_2x_2y_2$ в π_2, като:
- $O_1 \equiv E_1, O_2 \equiv E_2$;
- осите x_1 и x_2 лежат съответно върху правите a_1 и a_2;
- осите y_1 и y_2 лежат съответно върху правите b_1 и b_2.

Нека единична точка за афинната координатна система $O_1x_1y_1$ е произволна точка $U_1 \in \pi_1$, не лежаща върху x_1 и y_1. Епиполарната равнина (C^1, C^2, U_1) пресича проекционната равнина π_2 в епиполарна права u_2. Нека единична точка за афинната координатна система $O_2x_2y_2$ е произволна точка $U_2 \in u_2$, не лежаща върху x_2 и y_2. При такъв избор на единичните точки за двете координатни системи те са двойка съответни точки.

Аналогично при координатни системи $\tau_1^C = O_1x_1y_1$ в π_1 и $\tau_2^C = O_2x_2y_2$ в π_2, за които:
- $O_1 \equiv E_1, O_2 \equiv E_2$;
- осите x_1 и y_2 лежат съответно върху правите a_1 и a_2;
- осите y_1 и x_2 лежат съответно върху правите b_1 и b_2

и същия избор на единични точки, се получава втората форма на фундаменталната матрица от (1).

Обратно. Нека фундаменталната матрица е в някоя от формите на (1). Чрез проверка в $\mathbf{FE_1} = \mathbf{0}$ и $\mathbf{F}^T\mathbf{E_2} = \mathbf{0}$ получаваме, че епиполарните точки E_1 и E_2 са крайни точки.

Следствие 1. *Координатните системи $\tau_1^C = O_1x_1y_1$ в π_1 и $\tau_2^C = O_2x_2y_2$ в π_2 могат да бъдат избрани да са ортогонални.*

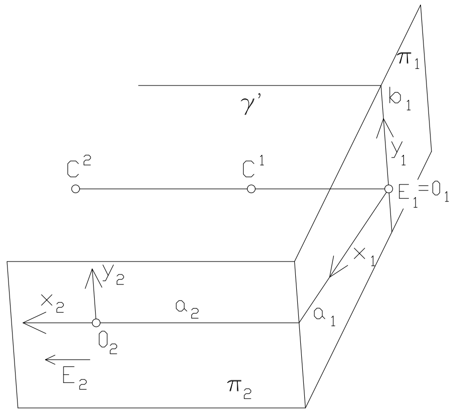
Доказателство:
I случай. Нека $\pi_1 \equiv \pi_2$ или $\pi_1 || \pi_2$. Избираме две ортогонални прави $a_1, b_1 \in \pi_1$, минаващи през E_1. Разглеждаме $\gamma = (a_1, C^1, C^2)$ и $\gamma' = (b_1, C^1, C^2)$. Тогава $a_2 \equiv a_1$, или $a_2 || a_1$. Аналогично и за правите b_1 и b_2.
II случай. Нека $\pi_1 \bigcap \pi_2 = g$ и σ е симетралната равнина на отсечката C^1C^2.
- Ако $\sigma \bigcap g = T$, то $|C^1T| = |C^2T|$. Намираме точки $A^\star$ и $B^\star$ от правата g, такива че $|TA^\star| = |TB^\star| = |C^1T|$ и разглеждаме правите $a_1 = (E_1 \vee A^\star)$, $b_1 = (E_1 \vee B^\star)$, $a_2 = (E_2 \vee A^\star)$, $b_2 = (E_2 \vee B^\star)$.
- Ако $g \in \sigma$, то точка T от горните разсъждения е произволна точка от g.
- Ако $g || \sigma$, то $g \perp (C^1 \vee C^2)$. Разглеждаме епиполарните равнини $\gamma || g$ и $\gamma' \perp g$.

Следствие 2. *При $\pi_1 \equiv \pi_2$ или $\pi_1 || \pi_2$ двете координатни системи могат да бъдат избрани ортонормирани.*
При $\pi_1 \bigcap \pi_2$ едната координатна система може да бъде избрана ортонормирана, а другата да е ортогонална и нормирана поне по едната ос.

Доказателство: Следва от избора на единичните точки за координатните системи.

2.2 Крайна и безкрайна епиполарни точки

Нека разгледаме случая от Фигура 2, когато базовата права $(C^1 \vee C^2)$ пресича π_1 и е успоредна на π_2. Тогава E_1 е крайна точка, а E_2 е безкрайна точка.



Фигура 2: Крайна и безкрайна епиполарни точки - първа форма на (2).

Теорема 2. *Епиполарната точка E_1 в π_1 е крайна, а епиполарната точка E_2 в π_2 е безкрайна тогава и само тогава, когато съществуват равнинни координатни системи $\tau_1^C = O_1x_1y_1$ в π_1 и $\tau_2^C = O_2x_2y_2$ в π_2, такива че фундаменталната матрица* **F** *спрямо тях (с точност до множител) е в някоя от следните форми:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \textit{ или } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \textit{ или } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \textit{ или } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Доказателство: Разглеждаме описаните в началото различни епиполарни равнини γ и γ' като γ е произволна, пресичаща и двете проекционни равнини, а $\gamma' || \pi_2$. Тогава правите $a_1 = \gamma \bigcap \pi_1$, $a_2 = \gamma \bigcap \pi_2$ и $b_1 = \gamma' \bigcap \pi_1$ са крайни прави, а $b_2 = \gamma' \bigcap \pi_2$ е безкрайна права. Формираме координатните системи $\tau_1^C = O_1x_1y_1$ в π_1 и $\tau_2^C = O_2x_2y_2$ в π_2:

• $O_1 \equiv E_1$, $O_2 \in a_2$ е произволна точка;
• осите x_1 и x_2 лежат съответно върху правите a_1 и a_2;
• оста y_1 лежи върху правата b_1, а y_2 е произволна през O_2.

Изборът на единичните точки е както в доказателството на Теорема 1.

При горните означения ще намерим фундаменталната матрица $\mathbf{F} = [f_{ij}]_{i,j=1,2,3}$.

От $\mathbf{E_1} = (0,0,1)^T$ и $\mathbf{FE_1} = \mathbf{0}$ получаваме $f_{13} = f_{23} = f_{33} = 0$. Аналогично от $\mathbf{E_2} = (1,0,0)^T$ и $\mathbf{F}^T\mathbf{E_2} = \mathbf{0}$ намираме $f_{11} = f_{12} = f_{13} = 0$. На произволна точка $A_1 \in x_1$ с вектор-стълб от хомогенни координати $\mathbf{A_1} = (x_{A_1}, 0, 1)^T$ съответстващата епиполарна права е x_2 с уравнение $y_2 = 0$. Тогава имаме $\mathbf{FA_1} = t_{A_1}(0,1,0)$ $(t_{A_1} \neq 0)$, или еквивалентно $(0, f_{21}x_{A_1}, f_{31}x_{A_1}) = t_{A_1}(0,1,0)$ за всяко x_{A_1}, което ни дава $f_{31} = 0$.

Аналогично на произволна точка $B_1 \in y_1$ с вектор-стълб от хомогенни координати $\mathbf{B_1} = (0, y_{B_1}, 1)^T$ съответстващата епиполарна права е безкрайната права на π_2 с уравнение $w_2 = 0$, или $f_{22} = 0$.

Тъй като единичните точки U_1 и U_2 са двойка съответни точки, то от $\mathbf{U_2}^T\mathbf{FU_1} = 0$ при $\mathbf{U_1} = (1,1,1)^T$ и $\mathbf{U_2} = (1,1,1)^T$ намираме, че $f_{21} = -f_{32}$.

Така получихме първата форма на (2) за фундаменталната матрица.

Ако формираме координатните системи $\tau_1^C = O_1x_1y_1$ в π_1 и $\tau_2^C = O_2x_2y_2$ в π_2 като:
• $O_1 \equiv E_1$, $O_2 \in a_2$ е произволна точка;
• оста x_1 лежи върху правата a_1, а y_2 е върху a_2;
• оста y_1 лежи върху правата b_1, а x_2 е произволна през O_2
и същия избор на единични точки, то аналогично се получава втората форма на (2).

При координатни системи $\tau_1^C = O_1x_1y_1$ в π_1 и $\tau_2^C = O_2x_2y_2$ в π_2, за които:
• $O_1 \equiv E_1$, $O_2 \in a_2$ е произволна точка;
• осите y_1 и y_2 лежат съответно върху правите a_1 и a_2;
• оста x_1 лежи върху правата b_1, а x_2 е произволна през O_2
и същия избор на единични точки, то ще получим третата форма на (2).

Последната форма на (2) се получава спрямо координатните системи:
• $O_1 \equiv E_1$, $O_2 \in a_2$ е произволна точка;
• оста y_1 лежи върху правата a_1, а x_2 е върху a_2;
• оста x_1 лежи върху правата b_1, а y_2 е произволна през O_2
и същия избор на единични точки.

Обратно. Нека фундаменталната матрица е в коя да е форма на (2). Чрез проверка в $\mathbf{FE_1} = \mathbf{0}$ и $\mathbf{F}^T\mathbf{E_2} = \mathbf{0}$ получаваме, че епиполярната точка E_1 е крайна, а E_2 е безкрайна.

Следствие 3. *Координатните системи $\tau_1^C = O_1x_1y_1$ в π_1 и $\tau_2^C = O_2x_2y_2$ в π_2 могат да бъдат избрани да са ортогонални.*

Доказателство: Използваната в доказателството на теоремата епиполярна равнина $\gamma' || \pi_2$ е еднозначно определена, а също и правата $b_1 = \gamma' \bigcap \pi_1$. Избираме права $a_1 \in \pi_1$, минаваща през E_1 и перпендикулярна на b_1. Разглеждаме $\gamma = (a_1, C^1, C^2)$. Върху правата $a_2 = \gamma \bigcap \pi_2$ лежи едната ос на координатната система в π_2, а другата ос е произволна.

Следствие 4. *Едната координатна система може да бъде избрана ортонормирана, а другата да е ортогонална и нормирана поне по едната ос.*

Доказателство: Следва от избора на единичните точки за координатните системи.

На корелацията $\mathbb{F}'$, която на произволна точка $M_2 \in \pi_2$ съпоставя епиполярна права $m_1 \in \pi_1$ съответства фундаментална матрица $\mathbf{F}' = \mathbf{F}^T$. Тя има някоя от следните форми:

$$(3) \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ или } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ или } \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ или } \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

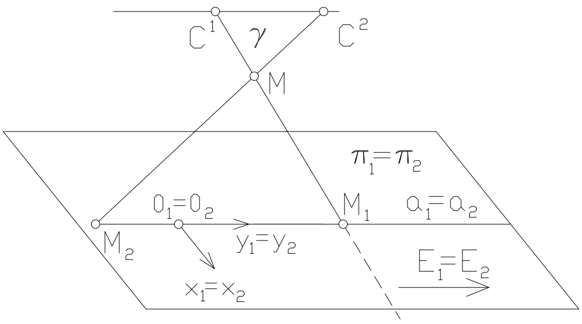
2.3 Две безкрайни епиполарни точки

2.3.1 Съвпадащи или успоредни проекционни равнини

Теорема 3. *Ако проекционните равнини съвпадат или са успоредни, то двете епиполарни точки са безкрайни тогава и само тогава, когато съществуват равнинни координатни системи $\tau_1^C = O_1x_1y_1$ в π_1 и $\tau_2^C = O_2x_2y_2$ в π_2, такива че фундаменталната матрица $\mathbf{F}$ спрямо тях (с точност до множител) е в някоя от следните форми:*

$$(4) \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ или } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ или } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ или } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Доказателство: Разглеждаме описаните в началото различни епиполарни равнини γ и γ' като γ е произволна, пресичаща и двете проекционни равнини, а γ' е успоредна на π_1 и π_2. Тогава правите $a_1 = \gamma \bigcap \pi_1$ и $a_2 = \gamma \bigcap \pi_2$ са крайни, а $b_1 = \gamma' \bigcap \pi_1$ и $b_2 = \gamma' \bigcap \pi_2$ са безкрайни прави. Формираме τ_1^C в π_1 и τ_2^C в π_2 като:



Фигура 3: Канонични координатни системи при $\pi_1 \equiv \pi_2$ и две безкрайни епиполарни точки - четвърта форма на (4)

• $O_1 \in a_1, O_2 \in a_2$ са произволни точки;
• осите x_1 и x_2 лежат съответно върху правите a_1 и a_2;
• осите y_1 и y_2 са произволни съответно през O_1 и O_2.
Изборът на единичните точки е както в доказателството на Теорема 1.

При горните означения ще намерим фундаменталната матрица $\mathbf{F} = [f_{ij}]_{i,j=1,2,3}$.

От $\mathbf{E_1} = (1,0,0)^T$ и $\mathbf{FE_1} = \mathbf{0}$ получаваме $f_{11} = f_{21} = f_{31} = 0$. На координатното начало O_1 с вектор-стълб от хомогенни координати $\mathbf{O_1} = (0,0,1)^T$ съответства епиполарна права a_2, която съдържа x_2, или $\mathbf{a_2} = (0,1,0)$. Тогава чрез $\mathbf{FO_1} = (0,1,0)$ намираме $f_{13} = f_{33} = 0, f_{23} \neq 0$. Корелацията $\mathbb{F}$ на безкрайната точка Y_∞ на оста y_1 с $\mathbf{Y}_\infty = (0,1,0)^T$ съпоставя безкрайна права, на която съответства вектора $(0,0,1)$, което ни дава $f_{12} = f_{22} = 0, f_{32} \neq 0$. Тъй като единичните точки U_1 и U_2 са двойка съответни точки, то от $\mathbf{U_2}^T\mathbf{FU_1} = 0$ при $\mathbf{U_1} = (1,1,1)^T$ и $\mathbf{U_2} = (1,1,1)^T$ намираме, че $f_{23} = -f_{32}$.

Така получихме първата форма на (4) за фундаменталната матрица.

Ако координатните системи $\tau_1^C = O_1x_1y_1$ в π_1 и $\tau_2^C = O_2x_2y_2$ в π_2 са формирани като:
• $O_1 \in a_1, O_2 \in a_2$ са произволни точки;
• осите x_1 и y_2 лежат съответно върху правите a_1 и a_2;
• осите y_1 и x_2 са произволни съответно през O_1 и O_2
и същия избор на единични точки, то аналогично се получава втората форма на (4)

При координатни системи $\tau_1^C = O_1x_1y_1$ в π_1 и $\tau_2^C = O_2x_2y_2$ в π_2, за които:
• $O_1 \in a_1, O_2 \in a_2$ са произволни точки;
• осите y_1 и x_2 лежат съответно върху правите a_1 и a_2;

• осите x_1 и y_2 са произволни съответно през O_1 и O_2
и същия избор на единични точки, то ще получим третата форма на (4)

Последната форма на (4) се получава спрямо координатните системи:
• $O_1 \in a_1, O_2 \in a_2$ са произволни точки;
• осите y_1 и y_2 лежат съответно върху правите a_1 и a_2;
• осите x_1 и x_2 са произволни съответно през O_1 и O_2
и същия избор на единични точки.

Обратно. Нека фундаменталната матрица е в коя да е форма на (4). Чрез проверка в $\mathbf{FE_1} = \mathbf{0}$ и $\mathbf{F}^T\mathbf{E_2} = \mathbf{0}$ получаваме, че епиполарните точки E_1 и E_2 са безкрайни точки.

Следствие 5. *Координатните системи $\tau_1^C = O_1x_1y_1$ в π_1 и $\tau_2^C = O_2x_2y_2$ в π_2 могат да бъдат избрани да са ортогонални.*

Доказателство: Следва от избора на координатните оси в проекционните равнини.

Следствие 6. *Едната координатна система може да бъде избрана ортонормирана, а другата да е ортогонална и нормирана поне по едната ос.*

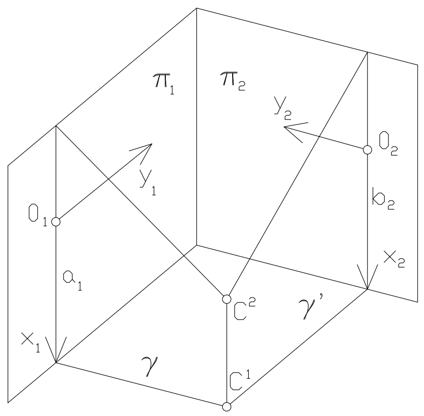
Доказателство: Следва от избора на единичните точки за координатните системи.

2.3.2 Пресичащи се проекционни равнини

Теорема 4. *Ако двете проекционни равнини се пресичат, то двете епиполарни точки са безкрайни тогава и само тогава, когато съществуват равнинни координатни системи $\tau_1^C = O_1x_1y_1$ в π_1 и $\tau_2^C = O_2x_2y_2$ в π_2, такива че фундаменталната матрица* $\mathbf{F}$ *спрямо тях (с точност до множител) е в някоя от следните форми:*

$$(5) \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \textit{или} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \textit{или} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \textit{или} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Доказателство: - Фигура 4. Разглеждаме описаните в началото различни епиполарни



Фигура 4: Канонични координатни системи при $\pi_1 \bigcap \pi_2$ и две безкрайни епиполарни точки - първа форма на (5)

равнини γ и γ' като γ е успоредна на π_2, а γ' е успоредна на π_1. Тогава правите

$a_1 = \gamma \bigcap \pi_1$ и $b_2 = \gamma' \bigcap \pi_2$ са крайни прави, а $b_1 = \gamma' \bigcap \pi_1$ и $a_2 = \gamma \bigcap \pi_2$ са безкрайни прави.

Формираме координатните системи $\tau_1^C = O_1x_1y_1$ в π_1 и $\tau_2^C = O_2x_2y_2$ в π_2 като:
- $O_1 \in a_1, O_2 \in b_2$ са произволни точки;
- осите x_1 и x_2 лежат съответно върху правите a_1 и b_2;
- осите y_1 и y_2 са произволни съответно през O_1 и O_2.

Изборът на единичните точки е както в доказателството на Теорема 1.

При горните означения ще намерим фундаменталната матрица $\mathbf{F} = [f_{ij}]_{i,j=1,2,3}$.

От $\mathbf{E_1} = (1,0,0)^T$ и $\mathbf{FE_1} = \mathbf{0}$ получаваме $f_{11} = f_{21} = f_{31} = 0$. На координатното начало O_1 с вектор-стълб от хомогенни координати $\mathbf{O_1} = (0,0,1)^T$ съответства безкрайна права, на която се съпоставя вектора $(0,0,1)$. Тогава чрез $\mathbf{FO_1} = (0,0,1)$ намираме $f_{13} = f_{23} = 0, f_{33} \neq 0$. Корелацията $\mathbb{F}$ на безкрайната точка Y_∞ на оста y_1 с $\mathbf{Y}_\infty = (0,1,0)^T$ съпоставя епиполарна права b_2, която съдържа x_2, или $\mathbf{b_2} = (0,1,0)$, което ни дава $f_{12} = f_{32} = 0, f_{22} \neq 0$. Тъй като единичните точки U_1 и U_2 са двойка съответни точки, то от $\mathbf{U_2}^T\mathbf{FU_1} = 0$ при $\mathbf{U_1} = (1,1,1)^T$ и $\mathbf{U_2} = (1,1,1)^T$ намираме, че $f_{22} = -f_{33}$.

Така получихме първата форма на (5) за фундаменталната матрица.

Ако координатните системи τ_1^C в π_1 и τ_2^C в π_2 са формирани както следва:
- $O_1 \in a_1, O_2 \in b_2$ са произволни точки;
- осите x_1 и y_2 лежат съответно върху правите a_1 и b_2;
- осите y_1 и x_2 са произволни съответно през O_1 и O_2

и същия избор на единични точки, то аналогично се получава втората форма на (5)

При координатни системи $\tau_1^C = O_1x_1y_1$ в π_1 и $\tau_2^C = O_2x_2y_2$ в π_2, за които:
- $O_1 \in a_1, O_2 \in b_2$ са произволни точки;
- осите y_1 и x_2 лежат съответно върху правите a_1 и b_2;
- осите x_1 и y_2 са произволни съответно през O_1 и O_2

и същия избор на единични точки, то ще получим третата форма на (5)

Последната форма на (5) се получава спрямо координатните системи:
- $O_1 \in a_1, O_2 \in b_2$ са произволни точки;
- осите y_1 и y_2 лежат съответно върху правите a_1 и b_2;
- осите x_1 и x_2 са произволни съответно през O_1 и O_2

и същия избор на единични точки.

Обратно. Нека фундаменталната матрица е в коя да е форма на (5). Чрез проверка в $\mathbf{FE_1} = \mathbf{0}$ и $\mathbf{F}^T\mathbf{E_2} = \mathbf{0}$ получаваме, че епиполарните точки E_1 и E_2 са безкрайни точки.

Следствие 7. *Координатните системи $\tau_1^C = O_1x_1y_1$ в π_1 и $\tau_2^C = O_2x_2y_2$ в π_2 могат да бъдат избрани да са ортогонални.*

Доказателство: Следва от избора на координатните оси в проекционните равнини.

Следствие 8. *Едната координатна система може да бъде избрана ортонормирана, а другата да е ортогонална и нормирана поне по едната ос.*

Доказателство: Следва от избора на единичните точки за координатните системи.

Дефиниция 1. *Равнинните координатни системи $\tau_1^C = O_1x_1y_1$ в π_1 и $\tau_2^C = O_2x_2y_2$ в π_2 от Теорема 1, Теорема 2, Теорема 3 и Теорема 4, при които фундаменталната матрица, определена с точност до множител и с елементи цели числа, има минимална норма на Фробениус, се наричат канонични координатни системи (канонични базиси).*

Дефиниция 2. *Матрицата (1) или (2) или (3) или (4) или (5) се нарича канонична форма на фундаменталната матрица.*

Литература

1. **Faugeras** O., Q. Luong, ed. T. Papadopoulo, *The Geometry of Multiple Images* MIT Press, Cambridge, London, 2001 p180, p258.
2. **Georgiev** G., V. Radulov, *Epipolar geometry with a fundamental matrix in canonical form*, International Journal of Pure and Applied Mathematics, vo. 105 No. 4 (2015), 669 – 683.
3. **Hartley** R., A. Zisserman, *Multiple View geometry in Computer Vision (Second edition)*, Cambridge University Press , 2003 p 154, p241.
4. **Stachel** H., *Descriptive geometry meets computer vision - the geometry of multiple images*, Journal for Geometry and Graphics Volume 10 (2006), No. 2, pp 137 - 153.