КЛАСИФИКАЦИЯ НА ЕПИПОЛАРНИТЕ ГЕОМЕТРИИ *

Венцислав Д. Радулов

CLASSIFICATION OF THE EPIPOLAR GEOMETRIES

Vencislav D. Radulov

ABSTRACT: *Epipolar geometry has been a fundamental tool for the reconstruction of a 3D object from two or more images. It describes the geometrical relationship between two perspective views of one and the same 3D scene. There are two approaches for determining the epipolar geometry. The first approach is by two given central projections. The second one is by the fundamental matrix with respect to given coordinate systems in the projection planes. In this paper a classification of the epipolar geometries with a given fundamental matrix has been made. The results allow to be determined the mutual position between the baseline and the projection planes.*

KEYWORDS: *epipolar geometry, fundamental matrix*

1 Увод в епиполарната геометрия

1.1 Основни понятия

Нека $C^1 \in \mathbb{E}^3$ и $C^2 \in \mathbb{E}^3$ са две различни точки. Разглеждаме две централни проекции $\Pi_1 = (C^1, \pi_1)$ и $\Pi_2 = (C^2, \pi_2)$, където C^1 и C^2 са двата проекционни центъра, а π_1 и π_2 са съответните им проекционни равнини. Ако $M \in \mathbb{E}^3$ е произволна точка, различна от C^1 и C^2, а $M_1 = (C^1 \vee M) \bigcap \pi_1$ и $M_2 = (C^2 \vee M) \bigcap \pi_2$ са централните ѝ проекции съответно в π_1 и π_2, то наредената двойка точки (M_1, M_2) се нарича двойка съответни точки. Правата $(C^1 \vee C^2)$ се нарича базова права, а прободите ѝ с проекционните равнини се наричат епиполарни точки – $E_1 = (C^1 \vee C^2) \bigcap \pi_1$ и $E_2 = (C^1 \vee C^2) \bigcap \pi_2$, които може да са крайни или безкрайни точки. Всяка равнина, съдържаща базовата права, се нарича епиполарна равнина, а епиполарни прави са пресечниците на епиполарна равнина с проекционните равнини. Очевидно всички епиполарни прави в проекционна равнина минават през епиполарната точка в нея.

Ако $M_1 \in \pi_1$ е произволна точка, различна от E_1, то епиполарната равнина γ, съдържаща базовата права $(C^1 \vee C^2)$ и точка M_1, пресича проекционната равнина π_2 в епиполарна права $m_2 = \gamma \bigcap \pi_2$. Така се определя корелация $\mathbb{F}$, която на произволна точка $M_1 \in \pi_1$ съпоставя епиполарна права $m_2 \in \pi_2$. Алгебрично тази корелация се изразява чрез фундаменталната матрица $\mathbf{F}$ (подробно описание на свойствата ѝ има в [1], [3], [4]), която преобразува вектор-стълба $\mathbf{M_1}$ от хомогенни координати на точка M_1 в транспонирания вектор-стълб $\mathbf{m_2}^T$, съпоставен на епиполарната права m_2. Така, ако координатният вектор-стълб на точка M_1, в хомогенни координати, спрямо произволна координатна система в π_1 е $\mathbf{M_1} = (m_1^1, m_1^2, m_1^3,)^T$, а уравнението на

*Статията е частично финансирана от фонд "Научни изследвания" на ШУ по проект № РД-08-102/05.02.2016

правата m_2, в хомогенни координати, спрямо произволна координатна система в π_2 е $m_2 \equiv Ax_2 + By_2 + Cw_2 = 0$ и на нея съпоставим вектор-ред $\mathbf{m_2} = (A, B, C)$, то

$$\mathbf{FM_1} = \mathbf{m_2}^T. \tag{1}$$

1.2 Свойства на фундаменталната матрица F

1. $\mathbf{M_2}^T\mathbf{FM_1} = 0$, където $\mathbf{M_1}$ и $\mathbf{M_2}$ са координатните вектори на двойката съответни точки (M_1, M_2).
2. Фундаменталната матрица може да бъде определена с точност до множител.
3. $\mathbf{F}' = \mathbf{F}^T$, където $\mathbb{F}' : \pi_2 \to \pi_1$ е корелация, аналогична на описаната $\mathbb{F} : \pi_1 \to \pi_2$ и съответните им фундаментални матрици са $\mathbf{F}'$ и $\mathbf{F}$.
4. $\mathbf{FE_1} = \mathbf{0}$, $\mathbf{F'E_2} = \mathbf{0}$, където E_1 и E_2 са епиполарните точки в двете проекционни равнини, а $\mathbf{0}$ е 3×1 нулев вектор.
5. Фундаменталната матрица $\mathbf{F}$ има ранг 2, или детерминантата ѝ е 0.

2 Класификация на епиполарните геометрии

Разглеждаме епиполарна геометрия при дадена фундаментална матрица $\mathbf{F} = [f_{ij}]_{i,j=1,2,3}$ спрямо дадени координатни системи $\tau_1 = O_1x_1y_1$ в π_1 и $\tau_2 = O_2x_2y_2$ в π_2. Да означим с f^{ij}_{mn} минора ѝ от втори ред, като $f^{ij}_{mn} = \begin{vmatrix} f_{im} & f_{in} \\ f_{jm} & f_{jn} \end{vmatrix}$, с $\mathbf{f^i}$ да означим вектор, чиито координати са елементите на ред i, или $\mathbf{f^i} = (f_{i1}, f_{i2}, f_{i3})$ и с $\mathbf{f_i}$ да означим вектор, чиито координати са елементите на стълб i, или $\mathbf{f_i} = (f_{1i}, f_{2i}, f_{3i})$, като $i = 1, 2, 3$.
Ранг 2 на фундаменталната матрица може да се получи, ако тя има:
• нулев ред (стълб), а другите 2 реда (стълба) не са пропорционални;
• два пропорционални реда (стълба), а третият ред (стълб) не е пропорционален на тях;
• един от редовете (стълбовете) е линейна комбинация на другите два.

Лема 1. *Нека* $\mathbf{F}$ *е дадена фундаментална матрица спрямо някакви координатни системи в проекционните равнини. Тогава:*
а) $f_{11} = f_{12} = f_{13} = 0$, *или* $\mathbf{f^1} = \mathbf{0}$, *тогава и само тогава, когато* E_2 *е безкрайната точка на* x_2*;*
б) $f_{21} = f_{22} = f_{23} = 0$, *или* $\mathbf{f^2} = \mathbf{0}$, *тогава и само тогава, когато* E_2 *е безкрайната точка на* y_2*;*
в) $f_{31} = f_{32} = f_{33} = 0$, *или* $\mathbf{f^3} = \mathbf{0}$, *тогава и само тогава, когато* E_2 *е крайна точка, съвпадаща с* O_2, *където* $\mathbf{0}$ *е нулев вектор.*

Доказателство: Нека $M_1 \in \pi_1$ е произволна точка, $M_1 \neq E_1$ и $M_2 \in \pi_2$ е нейна съответна точка, като координатните им вектори спрямо τ_1 и τ_2 са съответно
$\mathbf{M_1} = (m_1^1, m_1^2, m_1^3)^T$ и $\mathbf{M_2} = (m_2^1, m_2^2, m_2^3)^T$ при хомогенни координати. От равенството (1) имаме, че на съответната на M_1 епиполарната права $m_2 \in \pi_2$ се съпоставя вектор

$$\mathbf{m_2} = (f_{11}m_1^1 + f_{12}m_1^2 + f_{13}m_1^3, f_{21}m_1^1 + f_{22}m_1^2 + f_{23}m_1^3, f_{31}m_1^1 + f_{32}m_1^2 + f_{33}m_1^3). \tag{2}$$

Тогава при а) на всяка епиполарна права в π_2 се съпоставя вектор от вида
$\mathbf{m_2} = (0, B, C)$, или всички епиполарни прави са успоредни на x_2. Така E_2 е безкрайната точка на x_2.
Аналогично, при б) на всяка епиполарна права в π_2 се съпоставя вектор от вида
$\mathbf{m_2} = (A, 0, C)$, или всички епиполарни прави са успоредни на y_2. Така E_2 е безкрайната

точка на y_2.
При в) на всяка епиполарна права в π_2 се съпоставя вектор от вида $\mathbf{m_2} = (A, B, 0)$, или всички епиполарни прави минават през координатното начало O_2 на τ_2. Така E_2 е крайна точка, съвпадаща с O_2.

Обратно. За да установим наличието на нулев ред във фундаменталната матрица използваме равенството $\mathbf{F}^T\mathbf{E_2} = \mathbf{0}$ (където $\mathbf{0}$ е нулев вектор) и съответния координатен вектор на E_2:
- при а) координатният вектор на E_2 е $\mathbf{E_2} = (1, 0, 0)^T$;
- при б) координатният вектор на E_2 е $\mathbf{E_2} = (0, 1, 0)^T$;
- при в) координатният вектор на E_2 е $\mathbf{E_2} = (0, 0, 1)^T$.

Лема 2. *Нека* $\mathbf{F}$ *е дадена фундаментална матрица спрямо някакви координатни системи в проекционните равнини. Тогава:*
а) $f_{11} = f_{21} = f_{31} = 0$, *или* $\mathbf{f_1} = \mathbf{0}$, *тогава и само тогава, когато* E_1 *е безкрайната точка на* y_1*;*
б) $f_{12} = f_{22} = f_{32} = 0$, *или* $\mathbf{f_2} = \mathbf{0}$, *тогава и само тогава, когато* E_1 *е безкрайната точка на* x_1*;*
в) $f_{13} = f_{23} = f_{33} = 0$, *или* $\mathbf{f_3} = \mathbf{0}$, *тогава и само тогава, когато* E_1 *е крайна точка, съвпадаща с* O_1, *където* $\mathbf{0}$ *е нулев вектор.*

Доказателство: Използваме, че $\mathbf{F^T} = \mathbf{F'}$ и Лема 1.

Лема 3. *Нека* $\mathbf{F}$ *е дадена фундаментална матрица спрямо някакви координатни системи в проекционните равнини. Тогава:*
а) $\mathbf{f^2} = k\mathbf{f^1}$ *тогава и само тогава, когато* E_2 *е безкрайна точка и* $\mathbf{E_2} = (k, -1, 0)^T$;
б) $\mathbf{f^3} = k\mathbf{f^1}$ *тогава и само тогава, когато* E_2 *е крайна точка от* x_2 *и* $\mathbf{E_2} = (-k, 0, 1)^T$;
в) $\mathbf{f^3} = k\mathbf{f^2}$ *тогава и само тогава, когато* E_2 *е крайна точка от* y_2 *и* $\mathbf{E_2} = (0, -k, 1)^T$.

Доказателство: От равенство (2) имаме, че:
при а) на всяка епиполарна права в π_2 се съпоставя вектор от вида $\mathbf{m_2} = (A, kA, C)$, или всички епиполарни прави са успоредни и съдържат безкрайната точка с координатен вектор $(k, -1, 0)^T$. Така E_2 е безкрайна точка, като $\mathbf{E_2} = (k, -1, 0)^T$.
при б) на всяка епиполарна права в π_2 се съпоставя вектор от вида $\mathbf{m_2} = (A, B, kA)$, или всички епиполарни прави минават през точката с координатен вектор $(-k, 0, 1)^T$ от оста x_2. Така E_2 е крайна точка като $\mathbf{E_2} = (-k, 0, 1)^T$.
При в) на всяка епиполарна права в π_2 се съпоставя вектор от вида $\mathbf{m_2} = (A, B, kB)$, или всички епиполарни прави минават през точката с координатен вектор $(0, -k, 1)^T$ от оста y_2. Така E_2 е крайна точка като $\mathbf{E_2} = (0, -k, 1)^T$.

Обратно. За да установим наличието на два пропорционални реда във фундаменталната матрица използваме равенството $\mathbf{F}^T\mathbf{E_2} = \mathbf{0}$ и съответния координатен вектор на E_2.
- при а) координатният вектор на E_2 е $\mathbf{E_2} = (k, -1, 0)^T$ и $\mathbf{f^1} \neq \mathbf{0}$;
- при б) координатният вектор на E_2 е $\mathbf{E_2} = (-k, 0, 1)^T$ и $\mathbf{f^1} \neq \mathbf{0}$;
- при в) координатният вектор на E_2 е $\mathbf{E_2} = (0, -k, 1)^T$ и $\mathbf{f^2} \neq \mathbf{0}$.

Лема 4. *Нека* $\mathbf{F}$ *е дадена фундаментална матрица спрямо някакви координатни системи в проекционните равнини. Тогава:*
а) $\mathbf{f_2} = k\mathbf{f_1}$ *тогава и само тогава, когато* E_1 *е безкрайна точка и* $\mathbf{E_1} = (k, -1, 0)^T$;
б) $\mathbf{f_3} = k\mathbf{f_1}$ *тогава и само тогава, когато* E_1 *е крайна точка от* x_1 *и* $\mathbf{E_1} = (-k, 0, 1)^T$;
в) $\mathbf{f_3} = k\mathbf{f_2}$ *тогава и само тогава, когато* E_1 *е крайна точка от* y_1 *и* $\mathbf{E_1} = (0, -k, 1)^T$.

Доказателство: Използваме, че $\mathbf{F}^T = \mathbf{F}'$ и Лема 3.

Следствие 1. *Епиполарната точка E_2 в π_2 е безкрайна точка тогава и само тогава, когато за фундаменталната матрица $\mathbf{F}$ е изпълнено някое от условията:*
а) съдържа нулев първи или втори ред;
б) съдържа пропорционални първи и втори редове;
в) минорите $f_{12}^{12} = f_{13}^{12} = f_{23}^{12} = 0$.

Следствие 2. *Епиполарната точка E_1 в π_1 е безкрайна точка тогава и само тогава, когато за фундаменталната матрица $\mathbf{F}$ е изпълнено някое от условията:*
а) съдържа нулев първи или втори стълб;
б) съдържа пропорционални първи и втори стълбове;
в) минорите $f_{12}^{12} = f_{12}^{13} = f_{12}^{23} = 0$.

Следствие 3. *Епиполарната точка E_2 в π_2 е крайна точка тогава и само тогава, когато за фундаменталната матрица $\mathbf{F}$ е изпълнено някое от условията:*
а) съдържа нулев трети ред;
б) съдържа пропорционални първи и трети, или втори и трети редове;
в) поне един от минорите f_{12}^{12}, f_{13}^{12}, f_{23}^{12} е различен от 0.

Доказателство: в) От (2) имаме, че на точките от π_1 с координатни вектори $(1,0,0)^T$, $(0,1,0)^T$, $(0,0,1)^T$ съответстват епиполарните прави от π_2 с уравнения $f_{11}x_2 + f_{21}y_2 + f_{31} = 0$, $f_{12}x_2 + f_{22}y_2 + f_{32} = 0$, $f_{13}x_2 + f_{23}y_2 + f_{33} = 0$. Някой от изброените минори е ненулев тогава и само тогава, когато системата от трите уравнения има единствено решение, което означава, че правите се пресичат в една точка, или епиполарната точка E_2 на π_2 е крайна точка.

Следствие 4. *Епиполарната точка E_1 в π_1 е крайна точка тогава и само тогава, когато за фундаменталната матрица $\mathbf{F}$ е изпълнено някое от условията:*
а) съдържа нулев трети стълб;
б) съдържа пропорционални първи и трети, или втори и трети стълбове;
в) поне един от минорите f_{12}^{12}, f_{12}^{13}, f_{12}^{23} е различен от 0.

Доказателство: в) Аналогично на **Следствие 3**.

Теорема 1. *Следните твърдения са еквивалентни:*
а) двете епиполарни точки E_1 в π_1 и E_2 в π_2 са крайни точки;
б) съществуват равнинни координатни системи $\tau_1^C = O_1x_1y_1$ в π_1 и $\tau_2^C = O_2x_2y_2$ в π_2, такива че фундаменталната матрица $\mathbf{F}$ спрямо тях (с точност до множител) е в някоя от следните форми:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \textit{ или } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \tag{3}$$

в) спрямо произволни равнинни координатни системи τ_1 в π_1 и τ_2 в π_2 минорът $f_{12}^{12} \neq 0$.

Доказателство:
а) $\Longleftrightarrow$ б) е доказано в [2] и [5].
б) $\Longrightarrow$ в) Нека представим двете форма на фундаменталната матрица от (3) във вида

$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{F_0} & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix}$, където $\mathbf{F_0}$ е 2×2 неизродена матрица, а $\mathbf{0}$ е 1×2 нулев вектор. Нека $\mathbf{T_1}$ (съответно $\mathbf{T_2}$) е матрицата на смяна на базиса $T_1 : \tau_1 \longrightarrow \tau_1^C$ в π_1 (съответно $T_2 : \tau_2 \longrightarrow \tau_2^C$ в π_2). Матрицата на смяна при произволни афинни координатни системи може да се представи във вида $\mathbf{T_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{C} & D \end{bmatrix}$, където $\mathbf{A}$ е 2×2 неизрореда матрица, а $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ са 1×2 матрици. Чрез непосредствена проверка в равенството $\mathbf{F_{new}} = \mathbf{T_2}^T\mathbf{F}\mathbf{T_1}$ може да се установи, че в новата матрица горния ляв минор е ненулев.
в) $\Longrightarrow$ а) Нека спрямо произволни равнинни координатни системи τ_1 в π_1 и τ_2 в π_2 фундаменталната матрица е $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix}$, като $\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} \neq 0$. Да допуснем, че E_1 е безкрайна точка, или координатният ѝ вектор е $\mathbf{E_1} = (x_{E_1}, y_{E_1}, 0)^T$. Разглеждаме линейната хомогенна система $\mathbf{FE_1} = \mathbf{0}$ относно хомогенните координати на епиполарната точка E_1. Но тогава нейните първи две уравнения са също хомогеннна система с неизродена матрица от коефициенти, която има само нулевото решение. Полученото противоречие показва, че E_1 е крайна точка. Аналогично може да се установи, че E_2 също е крайна точка.

Теорема 2. *Следните твърдения са еквивалентни:*
а) двете епиполарни точки E_1 в π_1 и E_2 в π_2 са безкрайни точки;
б) съществуват равнинни координатни системи $\tau_1^C = O_1x_1y_1$ в π_1 и $\tau_2^C = O_2x_2y_2$ в π_2, такива че фундаменталната матрица $\mathbf{F}$ *спрямо тях (с точност до множител) е в някоя от следните форми:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \textit{ или } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \textit{ или } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \textit{ или } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \textit{ или }$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \textit{ или } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \textit{ или } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \textit{ или } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix};$$

в) спрямо произволни равнинни координатни системи τ_1 в π_1 и τ_2 в π_2 минорите $f_{12}^{12} = f_{12}^{13} = f_{12}^{23} = f_{13}^{12} = f_{23}^{12} = 0$.

Доказателство:
а) $\Longleftrightarrow$ б) е доказано в [5].
а) $\Longleftrightarrow$ в) Нека двете епиполарни точки са безкрайни, или техните координатни вектори са $\mathbf{E_1} = (x_{E_1}, y_{E_1}, 0)^T$, $\mathbf{E_2} = (x_{E_2}, y_{E_2}, 0)^T$. Тогава хомогенната линейна система $\mathbf{FE_1} = 0$, както и $\mathbf{F}^T\mathbf{E_2} = \mathbf{0}$, трябва да имат ненулеви решения, което се получава при $f_{12}^{12} = f_{12}^{13} = f_{12}^{23} = f_{13}^{12} = f_{23}^{12} = 0$.

Обратно. Ако изброените минори са нулеви, то във фундаменталната матрица първи и втори ред са пропорционални, а също и първи и втори стълб, или фундаменталната матрица има вида: $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} f_{11} & nf_{11} & f_{13} \\ kf_{11} & nkf_{11} & kf_{13} \\ f_{31} & nf_{31} & f_{33} \end{bmatrix}$. Но тогава епиполарните прави от π_2, съответстващи на различни точки от π_1 ще са успоредни, или епиполарната точка E_2 е безкрайна точка. Аналогично и за E_1.

Теорема 3. *Следните твърдения са еквивалентни:*
а) епиполарна точка E_1 в π_1 е крайна, а епиполарна точка E_2 в π_2 е безкрайна точка;
б) съществуват равнинни координатни системи $\tau_1^C = O_1x_1y_1$ в π_1 и $\tau_2^C = O_2x_2y_2$ в π_2, такива че фундаменталната матрица $\mathbf{F}$ спрямо тях (с точност до множител) е в някоя от следните форми:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \textit{или} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \textit{или} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \textit{или} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

в) спрямо произволни равнинни координатни системи τ_1 в π_1 и τ_2 в π_2 минорите $f_{12}^{12} = f_{13}^{12} = f_{23}^{12} = 0$, а поне един от минорите f_{12}^{13}, f_{12}^{23} е различен от 0.

Доказателство:
а) $\iff$ б) е доказано в [5].
а) $\iff$ в) От (2) имаме, че на точките от π_1 с координатни вектори $(1,0,0)^T$, $(0,1,0)^T$, $(0,0,1)^T$ съответстват епиполарните прави от π_2 с уравнения
$f_{11}x_2 + f_{12}y_2 + f_{13} = 0$, $f_{21}x_2 + f_{22}y_2 + f_{23} = 0$, $f_{31}x_2 + f_{32}y_2 + f_{33} = 0$. Епиполарната точка E_2 на π_2 е безкрайна точка, тогава и само тогава, когато епиполарните прави в π_2 са успоредни, или $f_{12}^{12} = f_{13}^{12} = f_{23}^{12} = 0$.

От $\mathbf{F}^T\mathbf{M_2} = \mathbf{0}$ имаме, че на точките от π_2 с координатни вектори $(1,0,0)^T$, $(0,1,0)^T$, $(0,0,1)^T$ съответстват епиполарните прави от π_1 с уравнения
$f_{11}x_1 + f_{21}y_2 + f_{31} = 0$, $f_{12}x_2 + f_{22}y_2 + f_{32} = 0$, $f_{13}x_2 + f_{23}y_2 + f_{33} = 0$. Епиполарната точка E_1 на π_1 е крайна точка, тогава и само тогава, когато епиполарните прави в π_1 се пресичат в една точка, или поне един от минорите f_{12}^{13}, f_{12}^{23} е различен от 0.

Теорема 4. *Следните твърдения са еквивалентни:*
а) епиполарна точка E_1 в π_1 е безкрайна, а епиполарна точка E_2 в π_2 е крайна точка;
б) съществуват равнинни координатни системи $\tau_1^C = O_1x_1y_1$ в π_1 и $\tau_2^C = O_2x_2y_2$ в π_2, такива че фундаменталната матрица $\mathbf{F}$ спрямо тях (с точност до множител) е в някоя от следните форми:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \textit{или} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \textit{или} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \textit{или} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

в) спрямо произволни равнинни координатни системи τ_1 в π_1 и τ_2 в π_2 минорите $f_{12}^{12} = f_{12}^{13} = f_{12}^{23} = 0$, а поне един от минорите f_{13}^{12}, f_{23}^{12} е различен от 0.

Доказателство:
а) $\iff$ б) е доказано в [5].
а) $\iff$ в) Аналогично на доказателството на а) $\iff$ в) при Теорема 3.

Литература

1. **Faugeras** O., Q. Luong, ed. T. Papadopoulo, *The Geometry of Multiple Images*, MIT Press, Cambridge, London, 2001.
2. **Georgiev** G., V. Radulov, *Epipolar geometry with a fundamental matrix in canonical form*, International Journal of Pure and Applied Mathematics, vol 105 No. 4, 2015, pp 669–683
3. **Hartley** R., A. Zisserman, *Multiple View geometry in Computer Vision (Second edition)*, Cambridge University Press, 2003.
4. **Stachel** H., *Descriptive geometry meets computer vision - the geometry of multiple images*, Journal for Geometry and Graphics, Volume 10 (2006) No. 2, pp 137 - 153.
5. **Георгиев** Г., В. Радулов, *Изследване на каноничната форма на фундаменталната матрица*, приета за печат.