ЕДИН ИТЕРАЦИОНЕН МЕТОД ЗА МАТРИЧНОТО УРАВНЕНИЕ $X + A^*X^{-1}A - B^*X^{-1}B = I$

Айнур А. Али

ONE ITERATIVE METHOD FOR MATRIX EQUATION $X + A^*X^{-1}A - B^*X^{-1}B = I$

Aynur A. Ali

ABSTRACT: *In this work we suggest a modification of iterative methods discussed in [10, 12] of matrix equation $X + A^*X^{-1}A - B^*X^{-1}B = I$. The proposed method saves a inverse of a matrix. It is proved a convergence of the considered method. The theoretical results are illustrated by numerical examples.*

KEYWORDS: *nonlinear matrix equation, fixed point iteration, inversion free iteration, convergence rate.*

1 Въведение

В тази статия разглеждам матричното уравнение

$$X + A^*X^{-1}A - B^*X^{-1}B = I, \tag{1}$$

където A и B са квадратни матрици, и I е единичната матрица. Уравнението (1) е изучено от Дуан и др. [10] и А.Али и В. Хасанов [12].

Берзиг и др. [11] разглеждат уравнението

$$X + A^*X^{-1}A - B^*X^{-1}B = Q, \tag{2}$$

където Q е положително определена матрица. Лесно се показва, че уравнение (2) може да се сведе до уравнение от вида (1). Следователно разглеждането на (1) или (2) с дясна част $Q = I$ не ограничава общността.

Уравнението (1) в случаите на $B = 0$ или $A = 0$ са изследвани интензивно и добре изучени през последните години [1, 2, 3, 4, 5, 6].

Дуан и др. [10] и Берзиг и др. [11] по едно и също време предлагат съответно итерационни методи за решаване на уравненията (1) и (2). Дадени са достатъчни условия за сходимост на разгледаните методи, като е използвана теоремата за неподвижна точка на Башкар-Лакшмикантам. По-късно в работата на А.Али и В. Хасанов [12] са предложени по-слаби ограничения на матричните коефициенти A и B, при които е доказана сходимост на метода от [10].

В тази работа модифицирам метода от [10, 12], като по този начин се спестява едно обръщане на матрица. Доказана е сходимост на предложения метод при същите достатъчни условия на оригиналния метод.

Статията е организана, както следва: във втора точка са представени някои известни резултати за уравнение (1); в трета точка са изложени основните резултати, а в последната точка са представени резултатите от проведените числени експерименти.

Ще използвам следните означения $A > 0$ $(A \geq 0)$, ако A е ермитова положително определена (полуопределена) матрица. За ермитовите матрици A и B, записвам $A > B$ $(A \geq B)$, ако $A - B > 0$ $(A - B \geq 0)$. С $\|\cdot\|$ ще означавам спектралната норма.
За $N \geq M > 0$, означавам с $[M, \infty)$, (M, ∞) и $[M, N]$ множествата от матрици $\{X : X \geq M\}$, $\{X : X > M\}$ и $\{X : M \leq X \leq N\}$, съответно.

2 Предварителни резултати

В тази точка представям някои резултати, които са получени в [10, 11, 12].

Берзиг и др. [11] предлагат итерационен метод и дават условия, зависещи от два параметъра, при които разгледаният метод е сходящ към положително определо решение на уравнение (2). Те предполагат, че за матриците A и B съществуват числа $\beta > \alpha > 0$, които удовлетворяват следните условия:

$$\begin{array}{ll} & 1.\ \ \frac{1}{\alpha}A^*A + \alpha I \leq Q \leq \beta I, \\ & 2.\ \ \beta A^*A - \alpha B^*B \leq \alpha\beta(Q - \alpha I), \\ (3) & 3.\ \ \beta B^*B - \alpha A^*A \leq \alpha\beta(\beta I - Q), \\ & 4.\ \ A^*A < \frac{\alpha^2}{2}I, \quad B^*B < \frac{\alpha^2}{2}I. \end{array}$$

Теорема 2.1 ***[11, Theorem 3.1.]*** *Ако числата $\beta > \alpha > 0$ удовлетворяват условията (3) то:*

(I) уравнението (2) има единствено положително определено решение $X_u \in [\alpha I, \infty)$;

(II) $X_u \in [Q + \frac{1}{\beta}B^*B - \frac{1}{\alpha}A^*A,\ Q + \frac{1}{\alpha}B^*B - \frac{1}{\beta}A^*A]$;

(III) редиците $\{X_k\}$ и $\{Y_k\}$, генерирани от итерационния процес

$$(4) \qquad \begin{cases} X_0 = \alpha I, \quad Y_0 = \beta I, \\ X_{k+1} = Q - A^*X_k^{-1}A + B^*Y_k^{-1}B, \quad k = 0, 1, \dots \\ Y_{k+1} = Q - A^*Y_k^{-1}A + B^*X_k^{-1}B, \end{cases}$$

са сходящи към X_u и грешката е

$$\max\{\|X_n - X_u\|_{tr}, \|Y_n - X_u\|_{tr}\} \leq \frac{\delta^n}{1-\delta}\max\{\|X_1 - X_0\|_{tr}, \|Y_1 - Y_0\|_{tr}\},$$

където $0 < \delta < 1$.

В теоремата означението $\|\cdot\|_{tr}$, се разбира $\|A\|_{tr} = \sum_{j=1}^{n}\sigma_j(A)$, където $\sigma_j(A)$ са сингулярните стойностти на матрицата A.

Теорема 2.2 ***[11, Theorem 3.2.]*** *Разглеждаме уравнение (2) при $Q = I$. Нека*

1. $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$

2. $\beta \geq 1 + \frac{\alpha}{2}$

3. $A^*A < \frac{\alpha^2}{2}I$, $B^*B < \frac{\alpha^2}{2}I$.

Тогава са изпълнени условията от (I) до (III) на Теорема 2.1.

Дуан и др. [10] доказват същата теорема с начални приближения $\alpha = \frac{1}{2}$ и $\beta = \frac{5}{4}$.

В [12] А. Али и В. Хасанов подобряват условията за съществуване на положително определено решение на уравнение (1) в Теорема 2.2.

Теорема 2.3 ***[12, Theorem 3.1.]*** *Нека*

$$\xi = \sqrt{2}\max\{\|A\|,\, \|B\|\}, \quad \eta = \frac{1+\sqrt{1-4\|A\|^2}}{2}, \quad \theta = 1 + \frac{\xi}{2}.$$

Ако $\xi < \frac{2}{3}$, тогава:

(I) *уравнение (1) в $(\xi I, \infty)$ има единствено положително определено решение $\widehat{X}$;*

(II) $\widehat{X} \in [I + \frac{1}{\theta}B^*B - \frac{1}{\eta}A^*A, I + \frac{1}{\eta}B^*B - \frac{1}{\theta}A^*A] \subset [\eta I, \theta I]$;

(III) *матричните редици $\{X_k\}$ и $\{Y_k\}$, дефинирани от (4) при $Q = I$ и начални приближения $X_0 = \mu I$ и $Y_0 = \upsilon I$, където $\mu \in (\xi, \eta]$ и $\upsilon \geq \theta$, са сходящи към $\widehat{X}$. Освен това*

$$\max\{\|X_k - \widehat{X}\|,\, \|Y_k - \widehat{X}\|\} \leq q^k\|Y_0 - X_0\|,$$

където $q = (\frac{\xi}{\mu})^2 < 1$.

Теорема 2.4 ***[12, Theorem 3.2.]*** *Ако съществуват числа $\beta > \alpha > 0$, удовлетворяващи условията*

1. $\beta A^*A - \alpha B^*B \leq \alpha\beta(1-\alpha)I$,
2. $\beta B^*B - \alpha A^*A \leq \alpha\beta(\beta-1)I$,
3. $\|A\|^2 + \|B\|^2 < \alpha^2$,

тогава уравнението (1) в $[\alpha I, \beta I]$ има единствено положително определено решение $\widehat{X}$. Матричните редици $\{X_k\}$ и $\{Y_k\}$ дефинирани от (4) при $Q = I$ и начални приближения $X_0 = \alpha I$, $Y_0 = \beta I$ са сходящи към $\widehat{X}$ и грешката се дава от

$$\max\{\|X_k - \widehat{X}\|, \|Y_k - \widehat{X}\|\} \leq \delta^k\|Y_0 - X_0\|,$$

където

$$\delta = \frac{\|A\|^2 + \|B\|^2}{a^2}.$$

3 Основни резултати

Жан (Zhan) в [5] предлага итерационен метод за намиране на положително определено решение на уравнението $X + A^*X^{-1}A = I$ (т.е. уравнение (1) при $B = 0$), при който се избягва обръщане на матрица. По-късно Гуо и Ланкастер [6] подобряват метода на Жан.

Следвайки идеята на Жан [5] и новото предложение на Гуо и Ланкастер [6] модифицирам итерационния метод (4), при който се пести едно обръщане на матрица.

Лема 3.1 ***[5, Lemma 3.2.]*** *Ако C и P са Ермитови матрици и $P > 0$, то $CPC + P^{-1} \geq 2C$.*

Теорема 3.1 *Нека числата $\beta > \alpha > 0$, удовлетворяват условията 1., 2. и 3. на Теорема 2.4. Матричните редици $\{X_k\}$, $\{Y_k\}$ и $\{Z_k\}$ дефинирани от итерационния процес*

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_{k+1} = Z_k(2I - Y_k Z_k) \\ X_{k+1} = I - A^* X_k^{-1} A + B^* Z_{k+1} B, \quad k = 0, 1, \ldots \\ Y_{k+1} = I - A^* Z_{k+1} A + B^* X_k^{-1} B, \end{array} \right. \tag{5}$$

с начални приближения $X_0 = \alpha I$, $Y_0 = \beta I$ и $Z_0 = \frac{1}{\beta} I$, са сходящи към решението $\widehat{X} \in [\alpha I, \beta I]$.

Доказателство:

Съгласно Теорема 2.4, решението $\widehat{X}$ съществува. Първо ще докажем монотонност на редиците. Лесно се проверява, че

$$Z_1 = Z_0(2I - Y_0 Z_0) = \frac{1}{\beta}(2I - \beta \frac{1}{\beta} I) = \frac{1}{\beta} I = Z_0$$

Използвайки условията 1. и 2. за числата $\beta > \alpha > 0$ имаме

$$X_1 = I - A^* X_0^{-1} A + B^* Z_1 B = I - \frac{A^* A}{\alpha} + \frac{B^* B}{\beta} \geq \alpha I = X_0$$

и

$$Y_1 = I - A^* Z_1 A + B^* X_0^{-1} B = I - \frac{A^* A}{\beta} + \frac{B^* B}{\alpha} \leq \beta I = Y_0.$$

Допускаме, че

$$\alpha I = X_0 \leq X_1 \leq \cdots \leq X_k, \quad \beta I = Y_0 \geq Y_1 \geq \cdots \geq Y_k \quad \text{и} \quad \frac{1}{\beta} I = Z_0 \leq Z_1 \leq \cdots \leq Z_k$$

Съгласно (5) и Лема 3.1 имаме

$$Z_{k+1} = 2Z_k - Z_k Y_k Z_k \leq Y_k^{-1}, \quad k = 0, 1, \ldots. \tag{6}$$

Оттук и индукционното предположение получаваме:

$$\begin{array}{rcl} Z_{k+1} - Z_k & = & Z_k - Z_k Y_k Z_k = Z_k(Z_k^{-1} - Y_k) Z_k \\ & \geq & Z_k(Y_{k-1} - Y_k) Z_k \geq 0; \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} X_{k+1} - X_k & = & -A^* X_k^{-1} A + B^* Z_{k+1} B + A^* X_{k-1}^{-1} A - B^* Z_k B \\ & = & A^*(X_{k-1}^{-1} - X_k^{-1}) A + B^*(Z_{k+1} - Z_k) B \geq 0 \end{array}$$

и

$$\begin{array}{rcl} Y_{k+1} - Y_k & = & -A^* Z_{k+1} A + B^* X_k^{-1} B + A^* Z_k A - B^* X_{k-1}^{-1} B \\ & = & A^*(Z_k - Z_{k+1}) A + B^*(X_k^{-1} - X_{k-1}^{-1}) B \leq 0. \end{array}$$

Следователно

$$\alpha I \leq X_k \leq X_{k+1}, \quad \beta I \geq Y_k \geq Y_{k+1}, \quad \frac{1}{\beta} I \leq Z_k \leq Z_{k+1}, \qquad k = 0, 1, \ldots.$$

Следва да докажем ограниченост на редиците $\{X_k\}$, $\{Y_k\}$ и $\{Z_k\}$. За $\{X_k\}$ и $\{Y_k\}$ имаме $0 < \alpha I = X_0 < Y_0 = \beta I$. Допускаме, че

$$0 < \alpha I = X_0 \leq \ldots \leq X_k \leq Y_k \leq Y_{k-1} \leq \ldots \leq Y_0 = \beta I.$$

Оттук, (5) и (6) следва

$$\begin{aligned} X_{k+1} - Y_{k+1} &= -A^* X_k^{-1} A + B^* Z_{k+1} B + A^* Z_{k+1} A - B^* X_k^{-1} B \\ &= A^*(Z_{k+1} - X_k^{-1})A + B^*(Z_{k+1} - X_k^{-1})B \\ &\leq A^*(Y_k^{-1} - X_k^{-1})A + B^*(Y_k^{-1} - X_k^{-1})B \leq 0. \end{aligned}$$

Следователно редиците $\{X_k\}$ и $\{Y_k\}$ са ограничени и сходящи. От ограничеността на $\{Y_k\}$ и (6) следва и ограничеността и сходимостта на $\{Z_k\}$.

Нека $\lim_{k\to\infty} X_k = X$, $\lim_{k\to\infty} Y_k = Y$ и $\lim_{k\to\infty} Z_k = Z$. От (5) получаваме последователно $Z = Y^{-1}$ и

$$\left| \begin{array}{ll} X = & I - A^* X^{-1} A + B^* Y^{-1} B \\ Y = & I - A^* Y^{-1} A + B^* X^{-1} B. \end{array} \right.$$

Пресмятаме

$$\begin{aligned} \|X - Y\| &= \|A^*(Y^{-1} - X^{-1})A + B^*(Y^{-1} - X^{-1})B\| \\ &\leq (\|A\|^2 + \|B\|^2)\|Y^{-1}\|\|X^{-1}\|\|X - Y\| \\ &\leq \frac{\|A\|^2 + \|B\|^2}{\alpha^2}\|X - Y\|. \end{aligned}$$

По условие 3. на Теорема 2.4 имаме $\frac{\|A\|^2+\|B\|^2}{\alpha^2} < 1$. Следователно $\|X - Y\| = 0$, т.е. $X \equiv Y \equiv \widehat{X}$.

4 Числени експерименти

Ще тествам новия метод (5) със същите примери от [12] и ще сравня резултатите с тези за метод (4) при $Q = I$. За стоп критерий използваме $\|Y_k - X_k\| \leq 10^{-10}$. Освен това въвеждам следните означения:

- k е най-малкия брой итерации, за който стоп кретирият е удовлетворен;
- $res1 = R(X_k) = \|X_k + A^* X_k^{-1} A - B^* X_k^{-1} B - I\|$;
- $res2 = R(Y_k) = \|Y_k + A^* Y_k^{-1} A - B^* Y_k^{-1} B - I\|$;
- $res = R(\widetilde{X}_k) = \|\widetilde{X}_k + A^* \widetilde{X}_k^{-1} A - B^* \widetilde{X}_k^{-1} B - I\|$, където $\widetilde{X}_k = (X_k + Y_k)/2$.

Пример 4.1 *Разглеждам уравнение (1) с*

$$A = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

За този пример са изпълнени условията на Теорема 2.3 и

$$\xi = \sqrt{2}\|A\| = 0.6255 < \frac{2}{3}, \quad \eta = \frac{1+\sqrt{1-4\|A\|^2}}{2} = 0.7332, \quad \theta = 1 + \frac{\xi}{2}.$$

Параметрите α и β в началните приближения и на двата метода (4) и (5) са съответно $\alpha = \eta$, $\beta = \theta$. С новия метод (5) стоп критерия се удовлетворява на деветнадесетата итерация и получаваме

$$X_{19} \approx Y_{19} \approx \begin{pmatrix} 0.9927 & -0.0150 & -0.0050 \\ -0.0150 & 0.9772 & -0.0098 \\ -0.0050 & -0.0098 & 0.9474 \end{pmatrix}.$$

В Таблица 1 са дадени резултатите от експеримента за Пример 4.1.

Таблица 1: Числени резултати за Пример 4.1

Метод	k	$\|Y_k - X_k\|$	$res1$	$res2$	res
(4)	19	$3.0965e-11$	$1.5380e-11$	$1.5380e-11$	$1.1173e-16$
(5)	19	$4.7753e-11$	$2.3719e-11$	$2.3719e-11$	$1.1173e-17$

Пример 4.2 *Разглеждам уравнение (1) с*

$$A = \frac{1}{50}\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 2 \\ -1 & -6 & 3 & 4 \\ -4 & 3 & 7 & 5 \\ 1 & 8 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{50}\begin{pmatrix} 7 & 9 & 6 & 8 \\ 7 & 5 & 8 & 3 \\ 9 & 8 & 6 & 7 \\ 11 & 5 & 9 & 3 \end{pmatrix}.$$

За този пример условията на Теорема 2.4 се удовлетворяват при $\alpha = \frac{2}{3}$ и $\beta = \frac{5}{3}$. Същите стойности на параметрите α и β в началните приближения са използвани и при експеримента с двата метода. С метод (5) стоп критерия се удовлетворява на шестнадесетата итерация и получаваме

$$X_{16} \approx Y_{16} \approx \widehat{X} \approx \begin{pmatrix} 1.0932 & 0.0697 & 0.0937 & 0.0635 \\ 0.0697 & 1.0103 & 0.0499 & 0.0503 \\ 0.0937 & 0.0499 & 1.0486 & 0.0261 \\ 0.0635 & 0.0503 & 0.0261 & 1.0269 \end{pmatrix}.$$

Резултатите са посочени в Таблица 2

Таблица 2: Числени резултати за Пример 4.2

Метод	k	$\|Y_k - X_k\|$	$res1$	$res2$	res
(4)	16	$5.6222e-11$	$3.4109e-11$	$3.2877e-11$	$6.2372e-13$
(5)	16	$9.4687e-11$	$5.6399e-11$	$5.6417e-11$	$9.0436e-15$

Литература

1. W.N. Anderson, T.D. Morley, G.E. Trapp, Positive Solutions to $X = A - BX^{-1}B^*$, *Linear Algebra Appl.*, 134:53–62, 1990.
2. J.C. Engwerda, On the existence of a positive definite solution of the matrix equation $X + A^TX^{-1}A = I$, *Linear Algebra Appl.*, 194:91–108, 1993.
3. X. Zhan, J. Xie, On the Matrix Equation $X + A^TX^{-1}A = I$, *Linear Algebra Appl.*, 147:337–342, 1996.
4. A. Ferrante, B. Levy, Hermitian solution of the equation $X = Q + NX^{-1}N^*$, *Linear Algebra Appl.*, 247:359–373, 1996.
5. X. Zhan, Computing the extremal positive definite solution of a matrix equation, *SIAM J. Sci. Comput*, 17:1167-1174, 1996
6. CH Guo, P. Lancaster, Iterative solution of two matrix equations, *Math Comput*, 68:1589–1603, 1999.
7. A.C.M. Ran and M.C.B. Reurings, On the nonlinear matrix equation $X + A^*\mathcal{F}(X)A = Q$: solution and perturbation theory, *Linear Algebra Appl.*, 346:15–26, 2002.
8. M. Konstantinov, P. Petkov, I. Popchev, V. Angelova, Sensitivity of the matrix equation $A_0 + \sum_{i=1}^{k} \sigma_i A_i^* X^{p_i} A_i = 0$, $\sigma_i = \pm 1$. *Appl. Comput. Math.*, 10:409-427, 2011.
9. I. Popchev, M. Konstantinov, P. Petkov, V. Angelova, Norm-wise, mixed and component-wise condition numbers of matrix equation $A_0 + \sum_{i=1}^{k} \sigma_i A_i^* X^{p_i} A_i = 0$, $\sigma_i = \pm 1$. *Appl. Comput. Math.*, 14:18-30, 2014.
10. X.F. Duan, Q.W. Wang, Ch.M. Li, Positive definite solution of a class of nonlinear matrix equation, *Linear and Multilinear Algebra*, 62(6):839-852, 2014.
11. M. Berzig, X. Duan and B. Samet, Positive definite solution of the matrix equation $X = Q - A^*X^{-1}A + B^*X^{-1}B$ via Bhaskar-Lakshmikantham fixed point theorem, *Mathematical Sciences*, 2012, 6:27, 2012.
12. A. Ali, V. Hasanov, On some sufficient conditions for the existence of a positive definite solution of the matrix equation $X + A^*X^{-1}A - B^*X^{-1}B = I$, *American Institute of Physics*