Годишник на ШУ „Епископ К. Преславски“
Факултет по математика и информатика, том XVIII C, 2017, стр. 119-135

ВЪРХУ „ПРОБЛЕМНИТЕ“ ЗАДАЧИ В ОБУЧЕНИЕТО ПО МАТЕМАТИКА*

Мирослав К. Христов, Йордан И. Николов

ON “PROBLEM” TASKS IN MATHEMATIC TRAINING

Miroslav K. Hristov, Yordan I. Nikolov

ABSTRACT: *Mathematics training involves tasks with non-specific formulations of the condition - predetermined or undefined, as well as non-precision solutions for non-existent figures or the so- formal roots of equations. Such problematic problems should be discussed in the preparation of the students of the specialty "Mathematics and Informatics" on the subject "Special and Private Methodology of Mathematics Education".*

KEYWORDS: *problems, mathematics, problems, private methodology.*

Да разгледаме няколко конкурси задачи и да обсъдим проблемите свързани с тях.
Първата задача е зад. 24 от НВО за седми клас по математика през 2017г. [1]:
Указание: Запишете пълното решение на задача 24, придружено с чертеж, който да отговоря на условието и необходимите обосновки.

24. Даден е остроъгълен $\triangle ABC$ с височина CH $\left(H \in AB\right)$. Върху страната BC е взета точка P такава, че разстоянията от нея до връх C и до страната AB са равни на 4cm. През точка P е

* Настоящата статия е финансирана от Фонд „Научни изследвания“ към Шуменския университет „Епископ Константин Преславски“ по проект № РД-08-120/06.02.2017

построена права, перпендикулярна на *BC*, която пресича правата *CH* в точка *M* и $CM = 8$ cm.

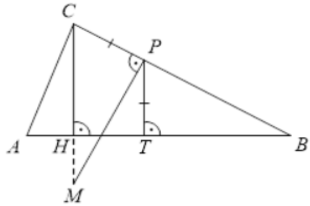
А) Намерете дължината на страната *BC*.

Б) Намерете лицето на $\triangle ABC$, ако *AB* = 14 cm.

В) Определете отношението *CM* : *CH*.

Ще приложим и критериите за оценяване, от които се вижда и решението на авторите.

24. Критерии за оценяване и брой точки по всеки критерий:

1. За чертеж 	**2 точки**
2. Намиране на $\sphericalangle CMP = 30^\circ$	**2 точки**
3. Намиране на $\sphericalangle CBH = 30^\circ$	**2 точки**
4. Намиране на дължината на $BC = 12$ cm	**1 точка**
5. Намиране дължината на $CH = 6$ cm	**1 точка**
6. Намиране $S_{\triangle ABC} = 42$ cm^2	**1 точка**
7. Намиране на отношението $CM : CH = 8 : 6 = 4 : 3$	**1 точка**

По решението трябва да се каже, че чертежът е необоснован, защото не е посочено защо т. М не може да е вътрешна за $\triangle ABC$.

В случая Б) решението е формално (има някакви верни сметки), но триъгълникът не съществува!

За условието трябва да се каже, че в случая Б) задачата е противоречиво преопределена и наистина от т. 2, 3, 4 от критериите и AB = 14 cm и косинусовата теорема следва:

$$AC^2 = 12^2 + 14^2 - 2.12.14.\cos 30^0 = 340 - 168\sqrt{3},$$

$$\cos\sphericalangle ACB = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2.AC.BC} = \frac{288 - 168\sqrt{3}}{2.AC.BC} \ .$$

От $228 - 168\sqrt{3} < 0 \Leftrightarrow 12 < 7\sqrt{3} \Leftrightarrow 144 < 147$ - вярно, следва че $\sphericalangle ACB$ е тъп, т.е. $\triangle ABC$ е тъпоъгълен.

Някой чиновник може да каже, че косинусовата теорема не се учи в седми клас и че целта е била да се провери знанието за формулата $S_\triangle = \frac{1}{2}.c.h_c$.

Проблемът се състои в това, че учениците в седми клас могат да работят с линийка и транспортир и да построят $\triangle ABC$ в случая Б) по $AB = 14\,\text{cm}$, $BC = 12\,\text{cm}$ и $\sphericalangle ABC = 30^0$. Как трябва да се оцени работата на ученик, който загуби голяма част от времето си за да проверява дали $\triangle ABC$ е остроъгълен в случая Б)? Още повече, че в този случай $\sphericalangle ACB$ е близък до 90^0?

При разглеждането на тази задача учим студентите да не дават такива задачи, а ако дадат преопределена или неопределена до еднаквост фигура, то след това задължително да обсъдят с учениците нуждата от знание за съществуването на фигури.

Учениците от седми клас при изучаването на уравнението $ax + b = 0$ знаят че да се реши едно параметрично уравнение означава: За всички допустими стойности на параметрите да се намери (докаже) има или няма решение, колко са на брой тези решения и кои са (от какъв вид).

Трябва по аналогия в случая на решаване на геометрични задачи са се каже: От всички възможни фигури трябва да се определи (докаже) има ли или няма такава (такива), които изпълняват дадените условия. В случая на параметрично решение да се изследва за кои фигури е валидно то, има ли изобщо такава фигури.

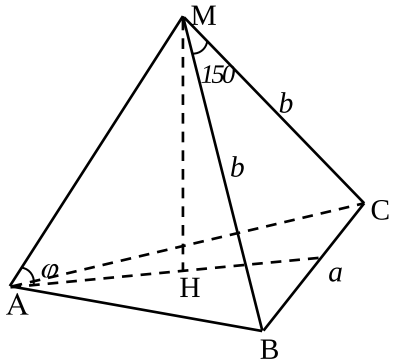
Задача втора. Дадена е правилна триъгълна пирамида $MABCD$ за която $\sphericalangle BMC = 150^0$. Да се намери косинусът на ъгъла, който околният ръб AM сключва с основата (ABC).

Решение:От $\triangle BMC \Rightarrow a^2 = 2b^2 + 2b^2\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = b\sqrt{2+\sqrt{3}}.$;

$AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} = \dfrac{b\sqrt{2+\sqrt{3}}}{3}.\sqrt{3}$ (черт. 1) и $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}\sqrt{3}}{3}$.

Формално $\cos\varphi$ беше получен. Проблемът е, че пирамидата $MABCD$ не съществува. Трябва да се докаже твърдението, че за всяка пирамида сумата от равнините ъгли при върха е по-малка от 360 градуса.

В случая може да се установи, че $\cos\varphi > 1$.



Черт. 1

Задача трета: В правилна четириъгълна пирамида α е двустенен ъгъл при основата, а β - двустенен ъгъл между две околни стени. При какви съотношения на между основния ръб a и околния ръб b е в сила равенството $\cos\alpha = \sqrt{-\cos\beta}$? [4].

Отг. а) не съществуват такива съотношения;

б) за всяко $a > 0$ и $b > 0$;

в)ако $0 < a < 2b$;

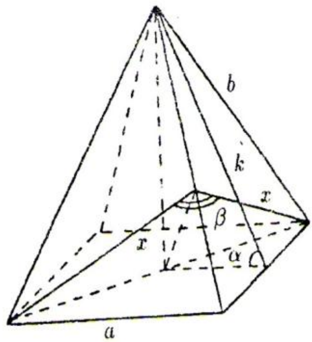
г)?.

Обсъждаме по-подробно условието, провеждаме дискусия със студенти и стигаме до следното решение:

Посочилите а) съвършено повърхностно смятат, че $-\cos\beta < 0$ т.е. че даденото решение е невъзможно. Те получават

0 точки. Не е трудно да се установи (например чрез косинусовата теорема), че β е тъп ъгъл. Нека k е апотемата, x - другата височина в околната стена (черт. 2). Тогава $\cos\alpha=\frac{a}{2k},\sin\frac{\beta}{2}=\frac{a\sqrt{2}}{2x}$, откъдето $\cos\beta=1-2\sin^2\frac{\beta}{2}=1-\frac{a^2}{x^2}$.

Обаче $ak=bx$ т.е. $\frac{a}{x}=\frac{b}{k}$, и $-\cos\beta=\frac{a^2}{x^2}-1=\frac{b^2}{k^2}-1=\frac{b^2-k^2}{k^2}=\cos^2\alpha$. Следователно $\cos\alpha=\sqrt{-\cos\beta}$. Посочилите б) получават 6 точки. Те не посочват при какви съотношения между a и b пирамидата съществува, т.е. не правят изследване. Посочилите в) отчитат неравенството на триъгълника за околната стена $(a<b+b)$ и получават 8 точки. (Предполага се че те са установили верността на равенството между $\cos\alpha$ и $\cos\beta$.) Неравенството $0<a<2b$ е само необходимо, но не и достатъчно условие за съществуването на пирамидата.



Черт. 2

Неравенството на триъгълника, приложено обаче за диагонално сечение на пирамидата: $a\sqrt{2}<2b$, води до $a<b\sqrt{2}$. (Можем да се убедим, например, че не съществува правилна четириъгълна пирамида с основен ръб 8 и околен ръб 5).

Посочилите г) с отговор $0 < a < b.\sqrt{2}$ (или само $a < b.\sqrt{2}$) получават 10 точки, а с друг отговор 0 точки.

Студентите сами откриват проблема: нуждата от изследване и установяване на $0 < a < 2b$ в г).

Четвъртата задача е от Математическия турнир „Академик Кирил Попов“ в гр.Шумен и е за ученици от 7 клас.

В остроъгълния триъгълник ABC с ъглополовяща CL (L$\in$AB), симетралата на страната AB пресича правата CL в точка O. Да се докаже, че:

а) точката O е външна за $\triangle$ABC;

б) $\measuredangle$ABO = $\measuredangle$BCO.

Дискутираме решението, дадено като най-очаквано от известна българска учителка по математика, работила дълги години в НПМГ

Използваме стандартни означения за ъглите в $\triangle$ABC - α, β и γ. Щом симетралата на отсечката AB и ъглополовящата на $\measuredangle$ACB се пресичат,то CA$\neq$CB (2 т.). Нека б.о.о. считаме, че CA>CB. Тогава $\beta > \alpha$. Освен това OA=OB (O$\in$SAB) и OM=ON, където OM и ON са разстоянията от точката O до раменете на $\measuredangle$ACB(M$\in$AC, N$\in$BC). От $\triangle$OCM$\cong$$\triangle$OCN (втори признак) следва, че CM=CN. Ако допуснем, че A$\equiv$M, то OA=OM=ON=OB, т.е. B$\equiv$N и CA=CB, което е невъзможно. Следователно A$\neq$M (1т.) Аналогично B$\neq$N. Тогава $\triangle$AOM$\cong$$\triangle$BON (признак за правоъгълни триъгълници), откъдето AM=BN (2т).

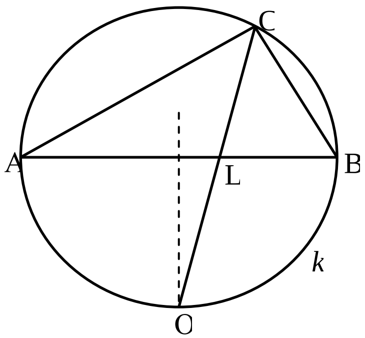
а) Да допуснем, че точката O не е външна за триъгълник ABC. От доказаното по-горе следва, че CA=CM+MA=CN+NB=CB, което е невъзможно. Следователно O е външна за триъгълник ABC(2т.).

б) от а) следва, че точките M и N не са едновременно вътрешни съответно за страните AC и BC. С аналогични разсъждения доказваме, че ако M и N са едновременно външни съответно за страните AC и BC, ще се окаже, че CA=CM-MA=CN-NB=CB, което е невъзможно (2т.). Тогава едната от двете точки M и N е вътрешна, а другата е външна. Тъй като

OA=OB, то $\measuredangle$ABO=$\measuredangle$BAO(=x) (1т.). От $\beta > \alpha$ следва β +x> α +x, а от еднаквите правоъгълни триъгълници AMO и BNO – че α +x= $\measuredangle$MAO= $\measuredangle$NBO (1т.) Окончателно, $\measuredangle$NBC= α +x+ β +x $\Leftrightarrow$ 2x=180° -($\alpha + \beta$)= γ $\Leftrightarrow$ $x = \frac{\gamma}{2}$ $\Leftrightarrow$ $\measuredangle$ABO= $\measuredangle$BCO (4т.).

Обсъждаме и решението на представилия се най-добре ученик от 7 клас.

От условието следва, че симетралите и ъглополовящите не съвпадат, т.е. AC $\neq$ BC. Нека k е описаната окръжност около $\triangle$ABC и $CL \cap k = \{C, O\}$, (черт.3) $\measuredangle$ACO= $\measuredangle$BCO, $\measuredangle$ACO = $\frac{AC}{2}$; $\measuredangle$BCO= $\frac{BO}{2}$ $\Rightarrow$ т. O е среда на дъгата AB.



Черт.3

Симетралата на отсечката AB разполовява и дъгата AB. Следователно т.O е външна за $\triangle$ABC. (Дъгата AB не съдържа т.C). Установяваме, че второто решение е формално по-лесно, то не съдържа логически прагове.

Проблемът се състои в това, че се е предвиждало задачата да се реши със знанията за седми клас, но това не е казано в условието! В седми клас например учениците още не знаят как се измерват вписаните ъгли в окръжност.

Този проблем в много по-общ, защото все още не е ясно с какви знания учениците от четвърти, седми и дванадесети клас могат да участват в национали или международни състезания. Всъщност въпросът опира до това: можеш ли (правилно ли е) на състезания да използваш вярно твърдение, верността на която не можеш сам да установиш! Авторите на статията се убедиха след арбитриране в много състезания, колко масово се прилага тази практика!

Задача пета. Дадени са функциите $f,g:X\to\mathbb{R}$ и $f(x)>0$ за $x\in X\subseteq\mathbb{R}$. Под степенно показателна функция с основа $f(x)$ и степенен показател $g(x)$ се разбира функцията, породена от израза $\left[f(x)\right]^{g(x)}$, който се дефинира с равенството

$\left[f(x)\right]^{g(x)}=a^{g(x)\log_a f(x)}$, където $a>0$ и $a\neq 1$.

Дадено е уравнението $x^{x+1}=x^2$ и числата 1, 0 и -1. Кои от тези числа са корени на даденото уравнение?

а) 1 е корен; б)-1 и 0 са корени; в)1,0 и -1 са корени. [5]

Решение: *Верен отговор* а).

Съгласно дефиницията на степенно показателната функция лявата страна на уравнението има вида: $a^{(x+1)\log_a x}(a>0,a\neq 1)$. Ето защо дефиниционното множество (множеството от допустимите стойности на неизвестното *x*) за даденото уравнение е $D_x=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x>0\right\}$. От посочените числа -1, 0 и 1 само $1\in D_x$ и само то може да бъде корен на уравнението. Проверката показва, че x=1 е корен на уравнението.

Числата -1 и 0 превръщат уравнението във вярно числово равенство, но това не е достатъчно, за да ги признаем за корени на уравнението в множеството на реалните числа, защото не принадлежат на D_x.

При решаване на геометрични задачи често се допускат логически грешки – изпускане на случаи, разсъждение върху подвеждащ чертеж или разсъждения, дължащи се на невярна представа за някаква геометрична фигура – например че ортоцентърът на триъгълник е пресечната точка на височините му!

Задача шеста. Ако H е ортоцентърът на триъгълника ABC и $AB = CH$ да се намери $\measuredangle ACB$. [8]

„Решение“ : Спускаме височината AA_1 (черт. 4). Правоъгълните триъгълници ABA_1 и CHA_1 са еднакви (имат съответно равни хипотенузи и по един остър ъгъл. Тогава $AA_1 = CA_1, \triangle AA_1C$ е равнобедрен и правоъгълен. Следователно за търсения ъгъл имаме $\measuredangle ACB = 45^0$.

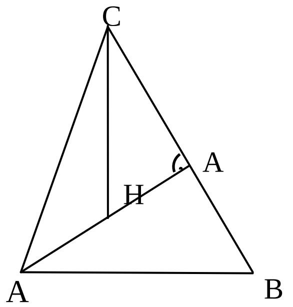
Решение: В изложеното „решение“ тихомълком се предполага, че ортоцентърът H е вътрешна точка за триъгълника ABC, т.е. разгледан е само един от възможните три случаи – остроъгълен триъгълник.

Ако даденият триъгълник е правоъгълен (и $AB = CH$), то: или $\measuredangle BAC = 90^0$ и
$A \equiv H$ или $\measuredangle ABC = 90^0$ и $B \equiv H$, като и в двата случая $\measuredangle ACB = 45^0$. Тук не е възможно $\measuredangle ACB = 90^0$ и $C \equiv H$ поради $AB \neq 0$.

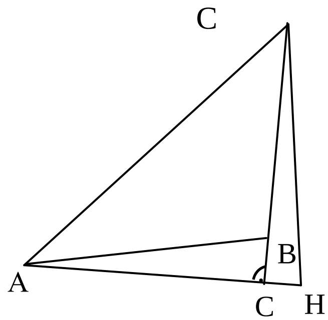
Ако $\triangle ABC$ е тъпоъгълен и $\measuredangle ABC > 90^0$ (черт. 5), то B е ортоцентърът на остроъгълния $\triangle ACH$, за който $AB = CH$. Според доказаното твърдение за остроъгълен триъгълник получаваме $\measuredangle HAC = 45^0$. От правоъгълния $\triangle ACC_1$ $\left(CC_1 \perp AH, C_1 \in AH\right)$ намираме $\measuredangle ACB = 45^0$. Случаят когато $\measuredangle BAC > 90^0$ е напълно аналогичен.

Накрая ако $\triangle ABC$ е тъпоъгълен и $\measuredangle ACB > 90^0$ (черт. 6) то C е ортоцентърът на остроъгълният $\triangle ABH$. Тогава $\measuredangle AHB = 45^0$ и търсеният ъгъл лесно се пресмята
$\measuredangle ACB = 360^0 - 2.90^0 - 45^0 = 135^0$.

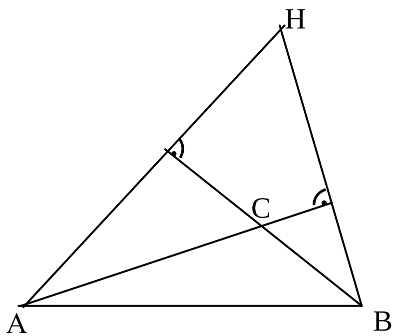
Окончателно получаваме, че ако $\measuredangle ACB$ е остър ,той е равен на 45^0, а ако е тъп той е равен на 135^0.



Черт.4



Черт.5



Черт.6

Друг важен въпрос например е преценката дали различни по форма получени отговори на дадена задача са еквивалентни помежду си. Например учителят по математика дал за домашна работа: Да се реши уравнението $\sin x(1+105^2 x+1052x)=\sin^3 x$. Учениците получили три „различни“ отговора:

А) $\left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right.$; Б) $\left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x = \pm 2\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \end{array}\right.$; В) $x = k.\dfrac{\pi}{3}$.

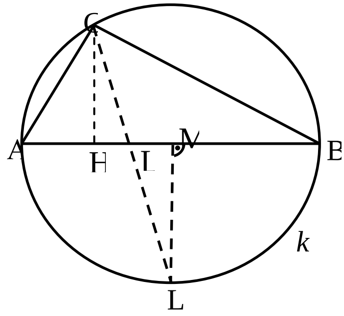
Студентите стигат до извода, че в тоя случай е нужно само на един общ чертеж да се изобразят (по възможност с различни цветове) вторите рамена на обобщените ъгли от решенията А), Б) и В).
Установяваме, че отговорите А), Б) и В) са еквивалентни помежду си.

Накрая ще формулираме две методически задачи за самостоятелна работа на студентите

Методическа задача 1. Височината, ъглополовящата и медианата, построени от върха С на $\triangle ABC$, са съответно равни на $6, 3\sqrt{5}$ и $2\sqrt{13}$. Намерете лицето на триъгълника [3].
Учителят дал следното решение и пояснения към него:

Като се приложи Питагорова теорема за $\triangle HLC$ и за $\triangle HMC$ се получава, че $HL = 3, HM = 4$ и тогава $LM = 1$, черт. 7. Да построим втората пресечна точка L' на ъглополовящата с описаната около триъгълника окръжност. Тогава $\triangle CHL \sim \triangle L'ML$ (имат по два съответно равни ъгъла), а от подобието на триъгълниците следва пропорционалност на страните им, т.е. $\dfrac{HL}{ML} = \dfrac{CH}{ML'} = \dfrac{CL}{LL'}$ или $\dfrac{3}{1} = \dfrac{6}{ML'} = \dfrac{3\sqrt{5}}{LL'}$. Получава се, че $LL' = \sqrt{5}$.
Освен това $\triangle ALC \sim \triangle BLL'$ и от тук следва, че $\dfrac{AL}{LL'} = \dfrac{CL}{BL}$. Но тъй като $AL = AM - 1$, а $BL = BM + 1 = AM + 1$, получаваме, че

$\frac{AM-1}{\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{AM+1}$. От уравнението $AM^2-1=3\left(\sqrt{5}\right)^2$ се получава, че $AM=4$. Тогава $AB=8$ и $S_{\triangle ABC}=\frac{8.6}{2}=24$.



Черт. 7

В задачата се използва едно *типично допълнително построение* - построяването на втората пресечна точка L' на ъглополовящата на триъгълник с описаната около триъгълника окръжност. От $AL'=BL'$ следва, че точката L' лежи на симетралата ML' на AB. Това построение води до получаване на няколко двойки подобни триъгълници. В дадената задача дължините на височината, ъглополовящата и медианата определят наредбата на точките H, L и M върху страната AB. Вярно е обаче, че за всеки триъгълник точката L винаги е между точките H и M.

Обоснован ли е чертежът и има ли проблеми свързани с решението?

За зад. 2. На учениците от една МГ дали следната задача на конкурс за стипендия по астрономия:

Всички знаем, че Земята е кръгла, макар че не е. (само за информация: Земята представлява ротационен елипсоид – „геоид“, като радиуса на Земята – малката полуос на елипсоида е 6356863 метра – на полюсите и радиуса на екватора – голяма полуос на елипсоид 6378245 метра. Средния радиус на Земята е 6371302 метра.)

В нашата задача обаче, ще приемем, че повърхността на Земята представлява сфера (Z) с радиус R.

Съществува една мислена окръжност, разположена на височина 35 786 км над повърхността на земята, над екватора(така наречената „геостационарна орбита“). Спътник, който е изведен на тази орбита и се движи с ъгловата скорост на земята, е с изравнена центробежна и гравитационна сила. Практически, той „виси“ над една точка над екватора, като нито пада, нито се отдалечава в открития космос. Това е орбитата, на която са разположени всички спътници, предназначени за разпръскване на телевизионен сигнал. В тази задача, ще обозначим това разстояние с G.

Целта на нашата задача е, намирайки се в Шумен, да изчислим „къде“ по небето трябва да търсим спътник, качен на геостационарна орбита, който „виси“ над Гринуичкия меридиан.

Нека наблюдателя, се намира на точка N на сферата Z.

Нека, през тази точка N прекараме равнина (мю), която е допирателна спрямо сферата Z.

На геостационарна орбита се намира точка S и правата, свързваща центъра на сферата Z със S, пресича мю в точка S_1.

Нека равнината (кси) пресича сферата Z през центъра и точките S_1 и S лежат в равнината (кси).

Нека равнината (пи) е определена от права, перпендикулярна на (кси) в центъра на Z и точка N, която пресича мю в права NP_1' като P_1 принадлежи едновременно на равнините (мю), (пи) и (кси), то:

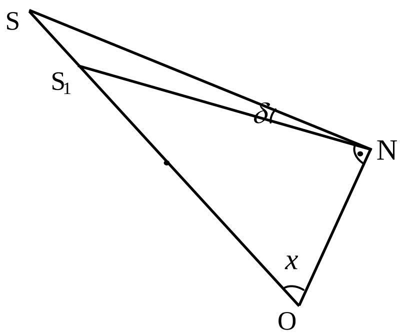
Ъгълът, SNS_1, се нарича „ъгъл на място“, а ъгълът S_1NP_1 - „ъгъл по азимут“ и точка N се намира на географските координати на гр. Шумен – приблизително 43 градуса северна ширина (правата, свързваща т.N с центъра на Z пресича равнината (кси) под ъгъл от 43 градуса – в задачата – ъгъл (алфа)) и 27 градуса източна дължина (Равнините, които са перпендикулярни на (кси), пресичат се в центъра на Z и минават през точките съответно S и N, се пресичат взаимно под ъгъл от 27 градуса – в задачата ъгъл (бета)), то да се изчисли:

Ъгъла на място и ъгъла по азимут при зададените параметри. Да се представят ъглите SNS_1 и S_1NP_1 като функции на R,G, (алфа) и (бета). При изчисленията може да се използват обозначенията на съответните букви от гръцката азбука.

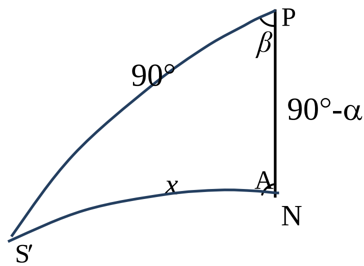
Двама участника дали две различни решения:

Решение 1: Нека O е център на сферата, черт. 8; $\measuredangle SNS_1 = \delta$, $\measuredangle NOS = x$; S' лежи на екватора, $ON = OS' = R$, $S'S = G, OS = OS' + S'S = R + G$. Прилагаме косинусовата теорема за $\triangle ONS$: $OS^2 = ON^2 + NS^2 - 2.ON.NS.\cos\left(90^0 + \delta\right) \Rightarrow$

(1) $$\left(R+G\right)^2 = R^2 + NS^2 + 2.R.NS.\sin\delta .$$



Черт. 8



Черт. 9

Отново прилагаме косинусовата теорема, за $\triangle NOS$: $NS^2 = ON^2 + OS^2 - 2.ON.OS.\cos x$,

(2) $$NS^2 = R^2 + \left(R+G\right)^2 - 2.R.\left(R+G\right).\cos x ,$$

заместваме в (1) и получаваме следното:

$$\left(R+G\right)^2 = R^2 + R^2 + \left(R+G\right)^2 - 2.R.\left(R+G\right).\cos x + 2.R.NS.\sin\delta ,$$

следователно

(3) $$\sin\delta=\frac{(R+G)\cos x-R}{NS}=\frac{\frac{(R+G)}{R}\cos x-1}{\frac{NS}{R}}=\frac{k.cosx-1}{\frac{NS}{R}},$$

където $k=\frac{R+G}{R}$.

От (2) следва, че $\frac{NS}{R}=\sqrt{1+k^2-2.k.\cos x}$, заместваме в (3) $\Rightarrow \sin\delta=\frac{k.\cos x-1}{\sqrt{1+k^2-2.k.\cos x}}$, но $\cos\delta=\sqrt{1-\sin^2\delta}$ и $\cos\delta=\frac{k.\sin x}{\sqrt{1+k^2-2.k.\cos x}}$, тогава $tg\delta=\frac{k.\cos x-1}{k.\sin x}=\frac{\cos x-k^{-1}}{\sin x}$.

Нека P е северен полюс, черт. 9, $\measuredangle S'NP=A$, $S'N=x$, прилагаме косинусовото правило за сферичния триъгълник NPS':

$$\cos x=\cos 90^0.\cos\left(90^0-\alpha\right)+\sin 90^0.\sin\left(90^0-\alpha\right).\cos\beta \;\Rightarrow$$

(4) $$\cos x=\cos\alpha.\cos\beta .$$

Заместваме в израза за $tg\delta$: $tg\delta=\frac{\cos\alpha.\cos\delta-k^{-1}}{\sqrt{1-\cos^2\alpha.\cos^2\beta}}$. Синусовото правило за $\triangle NS'P$: $\frac{\sin A}{\sin 90^0}=\frac{\sin\beta}{\sin x}\;\Rightarrow$

(5) $$\sin A=\frac{\sin\beta}{\sin x}$$

и от тук получаваме

$$\cos A=\sqrt{1-\frac{\sin^2\beta}{\sin^2 x}}=\frac{\sqrt{\sin^2 x-\sin^2\beta}}{\sin x}=\frac{\sqrt{1-\cos^2 x-\sin^2\beta}}{\sin x}=\frac{\sqrt{\cos^2\beta-\cos^2 x}}{\sin x}$$

Заместваме $\cos x$ от (4):

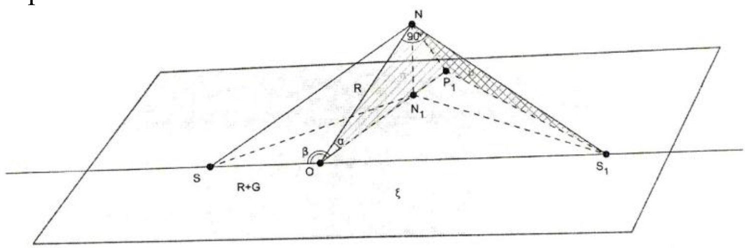
(6) $$\cos A = \frac{\sqrt{\cos^2\beta - \cos^2\alpha.\cos^2\beta}}{\sin x} = \frac{\cos\beta.\sin\alpha}{\sin x}.$$

От (5) и (6) получаваме, че $tgA = \dfrac{tg\beta}{\sin\alpha}$.

Остава да се определи дали да се прибавя или изважда 180^0, тъй като tg е периодична функция с период 180^0.

Решение 2 (черт.10):

Черт.10



$$\sin\measuredangle(SNS_1) = \frac{R-(R+G)\cos\alpha\cos\beta}{\sqrt{G^2+2R(G+R)(1-\cos\alpha\cos\beta)}}$$

Отговорете на следните въпроси:
1. Прецизна ли е формулировката на условието?
2. За кой клас е подходяща задачата?
3. Вярно (пълно) ли е решението?
4. Направете стереометричен чертеж като модел на условието.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Национално външно оценяване по математика за 7 клас, 22 май 2017г.
2. Национален математически турнир „Академик Кирил Попов“, Шумен, 29 април 2017г.

3. Нинова, Ю., С. Матакиева. Успех на матурата по математика, PONS, София , 2013г.
4. Трендафилов, И., А. Кючуков. Тестове по математика за кандидат-студенти и ученици. Университетско издателство „Св. Климент Охридски“ ,София, 1992г.
5. Иванов, И.С., И.Г. Иванов. Тестове и теми със задачи от училищния курс по математика , Шумен, 2001г.
6. Николов, Й., А. Павлов. Преопределени задачи на конкурсни изпити. Сп.Математика и информатика, бр.2,2010 г.
7. Николов, Й., М. Христов. Обучение върху геометрично мислене в горния курс на средното училище, Международна конференция МАТТЕХ 2016г, стр 251-261
8. Кючуков, А., И. Трендафилов. Някой некоректно решени задачи по планиметрия, сп. „Математика“ ,бр.5, стр 21-24 и бр.8 стр. 11-17, 1992г.

Мирослав К. Христов
Шуменски университет „Еп. Константин Преславски“, ФМИ
E-mail: miroslav.hristov@shu.bg

Йордан И. Николов
Шуменски университет „Еп. Константин Преславски“, ФМИ
E-mail: yordan_5@abv.bg