

## ВЪРХУ ЕФЕКТИВНИЯ ОБЕМЕН МОДУЛ НА МНОГОФАЗНИ ДИСПЕРСИИ\*

КРАСИМИР Д. ЦВЯТКОВ

### ON THE EFFECTIVE BULK MODULUS OF MULTI-PHASE DISPERSIONS

KRASIMIR D. TSVYATKOV

**ABSTRACT:** *Variational bounds for the effective bulk modulus of random dispersions of homogeneous spheres of different elastic moduli are considered. It is shown that explicit results can be derived for such class of multi-phase dispersions under some natural assumptions. Thus, well-known results incorporating two- and three-point correlation functions for two-phase dispersions are generalized.*

**KEYWORDS:** *effective elastic moduli, random dispersions, variational bounds*

#### 1. Увод

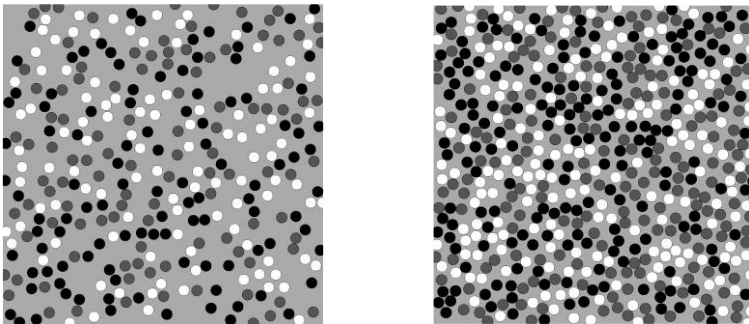
Разглеждаме хетерогенна еластична среда, представляваща дисперсия от хомогенни непресичащи се сфери със случайни обемен модул  $\kappa_p$  и модул на срязване  $\mu_p$ , разпределени случайно в неограничена матрица с обемен модул  $\kappa_m$  и модул на срязване  $\mu_m$ , вж. фиг. 1. Връзката между тензорите на деформацията  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$  и на напрежението  $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})$  в средата се дава от конститутивния закон

$$(1) \quad \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{x}) \text{Tr} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) \mathbf{I} + 2\mu(\mathbf{x}) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}),$$

---

\* Настоящата статия е финансирана от Фонд „Научни изследвания“ към Шуменския университет „Епископ Константин Преславски“ по проект № РД-08-120/06.02.2017 г.

където  $\mathbf{I}$  е единичният двувалентен тензор,  $\text{Tr}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \varepsilon_{ii}(\mathbf{x})$  е следата на  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$ , а  $\lambda(\mathbf{x}) = \kappa(\mathbf{x}) - \frac{2}{3}\mu(\mathbf{x})$  и  $\mu(\mathbf{x})$  са полетата на параметрите на Ламе,  $\kappa(\mathbf{x})$  и  $\mu(\mathbf{x})$  приемат съответно случайните стойности  $\kappa_p$  и  $\mu_p$ , ако  $\mathbf{x}$  лежи в сфера, и  $\kappa_m$  и  $\mu_m$ , ако  $\mathbf{x}$  лежи в матрицата на дисперсията.



**Фиг. 1.** Два примера за дисперсии от дискове с три различни равновероятни еластични модули. Лявата снимка е на дисперсия, намираща се в равновесие с обща обемна концентрация на дисковете  $\phi_p = 0.3$ . Получена е чрез компютърна симулация, основана на Монте Карло метода на Метрополис от молекулярната динамика. Дясната снимка е на неравновесна дисперсия, получена чрез случайно последователно добавяне на дискове до достигане на обемна концентрация  $\phi_p$ , много близка до тази на насищане  $\phi_p \approx 0.55$ .

Тензорът на деформацията  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$  е симетризираният градиент на полето на преместването  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  в средата, изразяващ се в декартови координати с равенството  $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ , а при отсъствие на масови сили тензорът на напрежението  $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})$  се подчинява на уравнението за равновесие  $\tau_{ij,j}(\mathbf{x}) = 0$ . (Тук и по-

долу използваме правилото на Айнщайн за сумиране по двойка повтарящи се индекси.)

Предполагаме, че средата е статистически хомогенна и изотропна. Тогава ефективното поведение на средата се определя обикновено чрез равенството

$$(2) \quad \langle \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) \rangle = \lambda_e \langle \text{Tr} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) \rangle \mathbf{I} + 2\mu_e \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) \rangle,$$

където скобите означават усреднение по ансамбъла от реализации на средата,  $\lambda_e = \kappa_e - \frac{2}{3}\mu_e$ , а  $\kappa_e$  и  $\mu_e$  са съответно нейният *ефективен обмен модул* и нейният *модул на срязване*.

В литературата са предложени много физични и макромеханични модели за предсказване на ефективните свойства на случайни дисперсии. Още преди близо 150 години в знаменития си трактат по електричество и магнетизъм [1] Джеймс Кларк Максвел извежда приближена формула за ефективната проводимост на дисперсия от сфери, имащи една и съща неслучайна проводимост  $\sigma_p$ . Подходът на Максвел се пренася лесно в еластичния случай даже за дисперсии от  $N$  вида сфери, имащи различни обемни модули  $\kappa_1^{(p)}, \dots, \kappa_N^{(p)}$ , модули на срязване  $\mu_1^{(p)}, \dots, \mu_N^{(p)}$  и обемни концентрации съответно  $\phi_1^{(p)}, \dots, \phi_N^{(p)}$ , вж., например, [2, Гл. 18] и [3]. Приближените формули за ефективните еластични модули  $\kappa_e$  и  $\mu_e$  тогава може да се запишат във вида

$$(3) \quad \frac{\kappa_e}{\kappa_m} = 1 + \frac{1}{\alpha_m^{(\kappa)}} \frac{\mathcal{E}(\beta_m^{(\kappa)})\phi_p}{1 - \mathcal{E}(\beta_m^{(\kappa)})\phi_p}, \quad \frac{\mu_e}{\mu_m} = 1 + \frac{1}{\alpha_m^{(\mu)}} \frac{\mathcal{E}(\beta_m^{(\mu)})\phi_p}{1 - \mathcal{E}(\beta_m^{(\mu)})\phi_p},$$

където

$$\mathcal{E}(\beta_m^{(\kappa)}) = \sum_{i=1}^N \frac{\phi_i^{(p)}}{\phi_p} \beta_m^{(\kappa)}(\kappa_i^{(p)}) \quad \text{и} \quad \mathcal{E}(\beta_m^{(\mu)}) = \sum_{i=1}^N \frac{\phi_i^{(p)}}{\phi_p} \beta_m^{(\mu)}(\mu_i^{(p)})$$

са средните стойности на коефициентите на поляризуемост

$$(4) \quad \beta_m^{(\kappa)}(\kappa) = \frac{\alpha_m^{(\kappa)}(\kappa - \kappa_m)}{\kappa_m + \alpha_m^{(\kappa)}(\kappa - \kappa_m)} \quad \text{и} \quad \beta_m^{(\mu)}(\mu) = \frac{\alpha_m^{(\mu)}(\mu - \mu_m)}{\mu_m + \alpha_m^{(\mu)}(\mu - \mu_m)}$$

на сфера с еластични модули  $\kappa$  и  $\mu$  относно матрицата, които наричаме така по аналогия с теорията на диелектриците, следвайки [2, Гл. 20],

$$(5) \quad \alpha_m^{(\kappa)} = \frac{3\kappa_m}{3\kappa_m + 4\mu_m}, \quad \alpha_m^{(\mu)} = \frac{6\kappa_m + 2\mu_m}{5\kappa_m + 4\mu_m},$$

а  $\phi_p = \phi_1^{(p)} + \dots + \phi_N^{(p)}$  е общата обемна концентрация на сферите от дисперсията. Ще отбележим, че до формулите (3) може да се достигне и чрез други подходи. В аналогична форма те са получени от Уенг [4] чрез използване на метода на Мори и Танака [5]. Бенвенисте [6] получава в еквивалента форма същата формула за  $\kappa_e$  чрез използване на обобщената самоспрегната схема, но поради възникнали усложнения не дава явен израз за  $\mu_e$ .

В основата на тези подходи стоят разумни физични предположения. Не е ясно, обаче, каква статистика на разпределение на множеството от центровете  $\mathbf{x}_j$  на сферите и съответните им еластични модули  $\kappa_j$  и  $\mu_j$  стои зад получените приближени формули. В общия случай ефективните модули  $\kappa_e$  и  $\mu_e$  зависят от пълното статистическо описание на средата. На практика, обаче, разполагаме само с информацията, давана от първите няколко корелационни функции за средата. Ето защо единственото, което може да се направи строго и последователно, е получаването на граници за  $\kappa_e$  и  $\mu_e$  с помощта на вариационни принципи. Нетривиални граници за ефективните еластични модули, използващи само обемните концентрации на компонентите на средата, се получават от вариационния принцип на Хашин и Щрикман [7]. В случая, когато средата за сравнение в този принцип е избрана да е матрицата, съответните граници на Хашин и Щрикман [7] се дават със същите формули (3).

Тук ще разгледаме приложение на класическите вариационни принципи. Съгласно класическия принцип за минимум на потенциалната енергия функционалът

$$(6) \quad U[\hat{\boldsymbol{\epsilon}}(\cdot)] = \langle \kappa(\mathbf{x}) [\text{Tr} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{x})]^2 \rangle + 2 \langle \mu(\mathbf{x}) \hat{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{x}) : \hat{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{x}) \rangle,$$

разглеждан върху класа от пробни потенциални полета  $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{x})$ , за които  $\langle \hat{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{x}) \rangle = \langle \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}) \rangle$ , се минимизира за истинското поле  $\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x})$  в средата; при това

$$(7) \quad \min U = \kappa_e [\text{Tr} \langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle]^2 + 2 \mu_e \langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle : \langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle,$$

което позволява намирането на горни граници за  $\kappa_e$  и  $\mu_e$ , ако функционалът се разглежда върху такъв клас от допустими пробни полета. В (6)  $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{x}) = \hat{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{x}) - \frac{1}{3} \text{Tr} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{x}) \mathbf{I}$  е девиаторната съставяща на тензора  $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{x})$ , а двоеточието означава контракция по двете двойки от индекси на участващите тензори.

Според принципа за минимум на допълнителната енергия функционалът

$$(8) \quad W[\hat{\boldsymbol{\tau}}(\cdot)] = \frac{1}{9} \left\langle \frac{1}{\kappa(\mathbf{x})} [\text{Tr} \hat{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{x})]^2 \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle \frac{1}{\mu(\mathbf{x})} \hat{\boldsymbol{s}}(\mathbf{x}) : \hat{\boldsymbol{s}}(\mathbf{x}) \right\rangle,$$

разглеждан върху класа от симетрични и равновесни пробни полета  $\hat{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{x})$ , за които  $\langle \hat{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{x}) \rangle = \langle \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) \rangle$ , се минимизира за истинското поле  $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})$  в средата; при това

$$(9) \quad \min W = \frac{1}{9\kappa_e} [\text{Tr} \langle \boldsymbol{\tau} \rangle]^2 + \frac{1}{2\mu_e} \langle \boldsymbol{s} \rangle : \langle \boldsymbol{s} \rangle,$$

където сега  $\hat{\boldsymbol{s}}(\mathbf{x}) = \hat{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{x}) - \frac{1}{3} \text{Tr} \hat{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{x}) \mathbf{I}$  е девиаторната съставяща на тензора  $\hat{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{x})$ . Разглеждането на функционала върху такъв клас от допустими пробни полета позволява намирането на долни граници за  $\kappa_e$  и  $\mu_e$ .

Граници за  $\kappa_e$  и  $\mu_e$ , използващи статистическата информация, съдържаща се в първите три корелационни функции на полетата  $\kappa(\mathbf{x})$  и  $\mu(\mathbf{x})$ , са получени и изследвани за дисперсия от сфери с едни и същи еластични свойства  $\kappa_p$  и  $\mu_p$ , вж. например [2, Гл. 21 и 22]. Разглеждат се основно два типа вариационни граници. Едният се основава на използването на пертурбационното разлагане на истинското поле  $\epsilon(\mathbf{x})$  за слабо нехомогенна среда, а другият – на кластерното разлагане на  $\epsilon(\mathbf{x})$  за малки концентрации  $\phi_p$  на сферите. Оказва се, че тогава тези граници съвпадат за ефективния обемен модул  $\kappa_e$ , вж. [8, 9, 10]. Това са границите, извеждащи се от по-общия тип граници на Беран и Молиньо [11] за произволни случайни полета  $\kappa(\mathbf{x})$  и  $\mu(\mathbf{x})$ , и границите, получени от Кинтания и Торкуато [10]. Тук ще обобщим тези граници за дисперсии от сфери с различни случайни еластични свойства  $\kappa_p$  и  $\mu_p$ , разглеждайки ги под общ чадър. Ще покажем, че те са различни за такива дисперсии и ще получим аналитични изрази за тях. Съответните граници за модула на срязване ще бъдат разгледани другаде [12]. Ще отбележим само, че те са различни даже за дисперсии от сфери с едни и същи еластични свойства [8, 9, 10].

От (7) и (9) веднага се вижда, че при намирането на граници на ефективния обемен модул  $\kappa_e$  е достатъчно да се предположи, че тензорите  $\langle \epsilon \rangle$  и  $\langle \tau \rangle$  са сферични, т.е. девиаторите им  $\langle \mathbf{e} \rangle$  и  $\langle \mathbf{s} \rangle$  са равни на нула.

## 2. Пробните полета на Беран-Молиньо и Кинтания-Торкуато

За дисперсия от сфери с една и съща изотропна проводимост  $\sigma_p$  Торкуато [13] въвежда пробни полета, основани на кластерното разлагане на електрическото поле за малки концентрации  $\phi_p$  на сферите. По аналогия на тях за дисперсии от

сфери с една и същи еластични модули  $\kappa_p$  и  $\mu_p$  Кинтания и Торкуато [10] използват пробни полета от вида

$$(10) \quad \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}) = \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle + \alpha \boldsymbol{\varepsilon}_1(\mathbf{x}),$$

където  $\alpha$  е реален параметър, относно който се минимизира рестрикцията на функционала  $U$  върху тези пробни полета, а полето  $\boldsymbol{\varepsilon}_1(\mathbf{x})$  произлиза от първия нетривиален член в кластерното разлагане на истинското поле  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$  при условието  $\langle \boldsymbol{\varepsilon}_1(\mathbf{x}) \rangle = \mathbf{0}$ . Аналогични пробни полета се въвеждат и за функционала  $W$ . Следвайки Торкуато [13], получените по този начин вариационни граници те наричат *кластерни граници от първи ред*. Изразът за полето  $\boldsymbol{\varepsilon}_1(\mathbf{x})$  се обобщава по естествен начин и за дисперсия от сфери с различни еластични модули. Тогава

$$(11) \quad \boldsymbol{\varepsilon}_1(\mathbf{x}) = \sum_j \mathbf{T}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j; \kappa_j^{(p)}, \mu_j^{(p)}) - \iiint \mathbf{T}(\mathbf{x} - \mathbf{y}; \kappa, \mu) F(\mathbf{y}; \kappa, \mu) d\mathbf{y} d\kappa d\mu,$$

където  $\mathbf{T}(\mathbf{x}; \kappa, \mu)$  е смущението на полето на хомогенната деформация с тензор  $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle$  в неограничена матрица с еластични модули  $\kappa_m$  и  $\mu_m$ , породено от внасянето на изолирана сфера с еластични модули  $\kappa$  и  $\mu$  в тази матрица, а  $F(\mathbf{y}; \kappa, \mu)$  е съвместната едноточкова вероятностна плътност на разпределение на центровете  $\mathbf{x}_j$  на сферите и техните еластични модули (маркери)  $\kappa_j^{(p)}$  и  $\mu_j^{(p)}$  в дисперсията, вж. т. 3 по-долу. В (11) се сумират смущенията на всички сфери от дисперсията, а интегралният член се въвежда само за да се удовлетвори условието  $\langle \boldsymbol{\varepsilon}_1(\mathbf{x}) \rangle = \mathbf{0}$ . В случая, когато  $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle$  е сферичен тензор,

т. е.  $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \frac{1}{3} \text{Tr} \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle \mathbf{I}$ , тензорното поле  $\mathbf{T}(\mathbf{x}; \kappa, m)$  може да се запише

във вида

$$(12) \quad \mathbf{T}(\mathbf{x}; \kappa, \mu) = \beta_m^{(k)}(\kappa) \nabla \nabla \varphi(\mathbf{x}) \text{Tr} \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle,$$

където

$\varphi(\mathbf{x}) = \int h(\mathbf{y})G(\mathbf{x}-\mathbf{y})d\mathbf{y}$  е нютоновият потенциал на сфера с радиус  $a$  и център в координатното начало,  $h(\mathbf{x})$  е нейната характеристична функция, коефициентът  $\beta_m^{(k)}(\kappa)$  е даден в (4), а  $G(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}$  е функцията на Грийн за уравнението на Лаплас в цялото пространство  $\mathbb{R}^3$ . Тук и по-долу интегрирането относно пространствената променлива  $\mathbf{y}$  е върху цялото  $\mathbb{R}^3$ , а относно променливите  $\kappa$  и  $\mu$  – в интервала  $\Upsilon = [0, +\infty)$ , освен ако областта на интегриране не е зададена явно.

Полетата (11) могат да се запишат в по-проста форма, ако използваме случайното поле на плътността

$$(13) \quad \psi(\mathbf{x}; \kappa, \mu) = \sum_j \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \delta(\kappa - \kappa_j^{(p)}) \delta(\mu - \mu_j^{(p)}),$$

породено от системата  $\{\mathbf{x}_j, \kappa_j^{(p)}, \mu_j^{(p)}\}$  от *маркирани* случайни точки  $\mathbf{x}_j$  с маркер еластичните им модули  $(\kappa_j^{(p)}, \mu_j^{(p)})$ , която може да се разглежда като множество от точки, случайно разпределени в областта  $\mathbb{R}^d \times \Upsilon \times \Upsilon$ . Функцията  $\psi(\mathbf{x}; \kappa, \mu)$  се дефинира чрез  $\delta$ -функцията на Дирак и е въведена от Стратонович [14] за немаркирана система от точки  $\{\mathbf{x}_j\}$ , случайно разпределени върху права. Нейното обобщение за маркирани случайни точки  $\mathbf{x}_j$  с маркер радиуса  $a_j$  на сферата с център  $\mathbf{x}_j$  се въвежда от Христов [15]. С помощта на функцията  $\psi(\mathbf{x}; \kappa, \mu)$  случайните полета на обемния модул  $\kappa(\mathbf{x})$  и модула на срязване  $\mu(\mathbf{x})$  може да се представят във вида

$$(14) \quad \begin{aligned} \kappa(\mathbf{x}) &= \kappa_m + \iint (\kappa - \kappa_m) h(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \psi(\mathbf{x}; \kappa, \mu) d\mathbf{y} d\kappa d\mu, \\ \mu(\mathbf{x}) &= \mu_m + \iint (\mu - \mu_m) h(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \psi(\mathbf{x}; \kappa, \mu) d\mathbf{y} d\kappa d\mu, \end{aligned}$$

а пробните полета на Кинтания и Торкуато да се запишат във вида



$$(15) \quad \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}) = \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle + \alpha \iint \gamma(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\mu}) \nabla \nabla \varphi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \psi'(\mathbf{x}; \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\mu}) d\mathbf{y} d\boldsymbol{\kappa} d\boldsymbol{\mu} \operatorname{Tr} \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle$$

при  $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \frac{1}{3} \operatorname{Tr} \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle \mathbf{I}$ , където  $\gamma(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\mu}) = \gamma_{QT}(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\mu}) = \beta_m^{(k)}(\boldsymbol{\kappa})$ , вж. (10) – (13). Тук и по-долу  $\xi' = \xi - \langle \xi \rangle$  е флуктуацията на случайната функция  $\xi$ .

За произволна статистически хомогенна и изотропна среда Беран и Молиньо [11] използват пробни полета от същия вид (10), за които обаче полето  $\boldsymbol{\varepsilon}_1(\mathbf{x})$  е пропорционално на първия интегрален член от пертурбационното разлагане на  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$  за слабо хетерогенна среда при сферичен тензор  $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle$ , т. е. полетата

$$(16) \quad \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}) = \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle + \lambda \int \nabla \nabla G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \boldsymbol{\kappa}'(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \operatorname{Tr} \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle.$$

Ако в тази формула извършим преход от случайното поле  $\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x})$  към случайното поле на плътността  $\psi(\mathbf{x}; \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\mu})$  по първата от формулите (14), ще достигнем до пробни полета  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x})$  от същия вид (15) при  $\gamma(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\mu}) = \gamma_{BM}(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\mu}) = \boldsymbol{\kappa} - \boldsymbol{\kappa}_m$ . Лесно се вижда, че за дисперсии от сфери с един и същи обмен модул функциите  $\gamma_{QT}(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\mu})$  и  $\gamma_{BM}(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\mu})$  са пропорциони и затова двата класа от пробни полета съвпадат – факт, който беше установен в [8,9]. За дисперсии от сфери с различни обменни модули, обаче, това не е така. Тук ще изведем и изследваме границите за ефективната проводимост, които произтичат от използването на пробните полета (12) при произволна фиксирана функция  $\gamma(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\mu})$ . Може да се постави по-общата задача за екстремизиране на функционала  $U[\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\cdot)]$  при вариране на функцията  $\gamma(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\mu})$ . Тази задача е сложна и ще бъде разгледана другаде [12].

За намиране на съответните граници е необходимо да се позволим на статистическото описание на дисперсията, дадено по-обстойно в [16], което тук накратко ще изложим.

### 3. Статистическо описание на дисперсията

Случайната функция на плътността  $\psi(\mathbf{x}; \kappa, \mu)$  напълно определя дисперсията. Нейните моменти могат да се изразят чрез съвместните многоточкови вероятностни плътности  $F_n(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n; \kappa_1, \mu_1, \dots, \kappa_n, \mu_n)$  на разпределение на центровете  $\mathbf{x}_j$  на сферите и техните еластични модули  $\kappa_j, \mu_j$ . По-долу ще ни бъдат необходими изразите за първите три момента, които се дават от формулите

$$\begin{aligned}
 \langle \psi(\mathbf{y}; \omega) \rangle &= F_1(\mathbf{y}; \omega), \\
 (17) \quad \langle \psi(\mathbf{y}_1; \omega_1) \psi(\mathbf{y}_2; \omega_2) \rangle &= F_1(\mathbf{y}_1; \omega_1) \delta(\mathbf{y}_{1,2}) \delta(\omega_{1,2}) + F_2(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2; \omega_1, \omega_2), \\
 \langle \psi(\mathbf{y}_1; \omega_1) \psi(\mathbf{y}_2; \omega_2) \psi(\mathbf{y}_3; \omega_3) \rangle &= F_1(\mathbf{y}_1; \omega_1) \delta(\mathbf{y}_{1,2}) \delta(\omega_{1,2}) \delta(\mathbf{y}_{1,3}) \delta(\omega_{1,3}) \\
 &\quad + 3\{\delta(\mathbf{y}_{1,2}) \delta(\omega_{1,2}) F_2(\mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3; \omega_2, \omega_3)\}_s + F_3(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3; \omega_1, \omega_2, \omega_3),
 \end{aligned}$$

където  $m\{\}_s$  означава симетризация относно всичките  $m$  различни комбинации от индекси в скобите,  $\mathbf{y}_{i,j} = \mathbf{y}_j - \mathbf{y}_i$ ,  $\omega = (\kappa, \mu)$  и  $\omega_{i,j} = \omega_j - \omega_i$ , вж. [14, 15, 16].

Приемаме, че в дисперсията няма пространствени участъци, които да имат избирателност към сфери с различни еластични свойства. Това означава, че статистиката на разпределението на еластичните модули  $\omega_j = (\kappa_j, \mu_j)$  на сферите е независима от тази на положенията  $\mathbf{x}_j$  на сферите, т. е.

$$F_n(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n; \omega_1, \dots, \omega_n) = f_n(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n) P_n(\omega_1, \dots, \omega_n),$$

където  $f_n(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n)$  са съвместните многоточкови вероятностни плътности на разпределение на центровете  $\mathbf{x}_j$  на сферите, а  $P_n(\omega_1, \dots, \omega_n)$  са съвместните вероятностни плътности на разпределение на техните еластични модули  $\omega_j = (\kappa_j, \mu_j)$ ,  $j = 1, 2, \dots$ . Ще приемем също, че тези еластични модули са статистически независими, т. е.

$$P_n(\omega_1, \dots, \omega_n) = P(\omega_1) \dots P(\omega_n),$$

където  $P(\omega)$  е вероятностната плътност на еластичните модули  $\omega = (\kappa, \mu)$  на сфера от дисперсията. Ще отбележим още, че от предположената статистическа хомогенност и изотропност на дисперсията следва, че  $f_1(\mathbf{y}) = n$ ,  $f_2(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) = n^2 g_2(r)$  и  $f_3(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3) = n^3 g_3(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_3, \mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_3)$ , където  $n$  е средният брой центрове на сфери в единица обем,  $g_2(r)$  и  $g_3(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = g_3(|\mathbf{u}|, |\mathbf{v}|, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$  са съответно двуточковата (радиалната) и триточковата функции на разпределение,  $r = |\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1|$ .

#### 4. Вариационните граници за ефективната проводимост

##### 4.1. Получаване на горната граница

Рестрикцията на функционала  $U[\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\cdot)]$  върху пробните полета (15) е вече обикновена, квадратна функция на  $\alpha$ , чието екстремизиране води до получаване на горна граница  $\kappa_U$  на ефективната проводимост  $\kappa_e$ :

$$(18) \quad \kappa_U = \langle \kappa \rangle - \frac{R^2}{Q},$$

където

$$Q = (\kappa_m - \frac{2}{3} \mu_m) A^{(h)} + 2 \mu_m A + B^{(h)} + 2B,$$

$$R = \iiint (\kappa_1 - \kappa_m) \gamma(\omega_2) h(\mathbf{x} - \mathbf{y}_1) h(\mathbf{x} - \mathbf{y}_2) \times \langle \psi(\mathbf{y}_1, \omega_1) \psi'(\mathbf{y}_2, \omega_2) \rangle d\mathbf{y}_1 d\omega_1 d\mathbf{y}_2 d\omega_2,$$

$$A^{(h)} = \iiint \gamma(\omega_1) \gamma(\omega_2) h(\mathbf{x} - \mathbf{y}_1) h(\mathbf{x} - \mathbf{y}_2) \times \langle \psi(\mathbf{y}_1, \omega_1) \psi'(\mathbf{y}_2, \omega_2) \rangle d\mathbf{y}_1 d\omega_1 d\mathbf{y}_2 d\omega_2,$$

$$\begin{aligned}
 A &= \iiint \gamma(\omega_1)\gamma(\omega_2)\nabla\nabla\varphi(\mathbf{x}-\mathbf{y}_1):\nabla\nabla\varphi(\mathbf{x}-\mathbf{y}_2) \\
 &\quad \times\langle\psi(\mathbf{y}_1,\omega_1)\psi'(\mathbf{y}_2,\omega_2)\rangle d\mathbf{y}_1d\omega_1d\mathbf{y}_2d\omega_2, \\
 B^{(h)} &= \iiint \iiint \left[\kappa_3-\kappa_m-\frac{2}{3}(\mu_3-\mu_m)\right]\gamma(\omega_1)\gamma(\omega_2)h(\mathbf{x}-\mathbf{y}_3)h(\mathbf{x}-\mathbf{y}_1)h(\mathbf{x}-\mathbf{y}_2) \\
 &\quad \times\langle\psi'(\mathbf{y}_1,\omega_1)\psi'(\mathbf{y}_2,\omega_2)\psi(\mathbf{y}_3,\omega_3)\rangle d\mathbf{y}_1d\omega_1d\mathbf{y}_2d\omega_2d\mathbf{y}_3d\omega_3, \\
 (19) \quad B &= \iiint \iiint (\mu_3-\mu_m)\gamma(\omega_1)\gamma(\omega_2)h(\mathbf{x}-\mathbf{y}_3)\nabla\nabla\varphi(\mathbf{x}-\mathbf{y}_1):\nabla\nabla\varphi(\mathbf{x}-\mathbf{y}_2) \\
 &\quad \times\langle\psi'(\mathbf{y}_1,\omega_1)\psi'(\mathbf{y}_2,\omega_2)\psi(\mathbf{y}_3,\omega_3)\rangle d\mathbf{y}_1d\omega_1d\mathbf{y}_2d\omega_2d\mathbf{y}_3d\omega_3.
 \end{aligned}$$

Използвайки изразите (17) за първите три момента на  $\psi(\mathbf{x};\omega)$ , за  $R$ ,  $A^{(h)}$ ,  $A$ ,  $B^{(h)}$  и  $B$  получаваме

$$\begin{aligned}
 R &= \mathcal{E}\left[\left(\kappa_p-\kappa_m\right)\gamma\right]\phi_p+\left[\mathcal{E}\left(\kappa_p\right)-\kappa_m\right]\mathcal{E}(\gamma)r_2n^2, \\
 A^{(h)} &= \mathcal{E}(\gamma^2)\phi_p+\mathcal{E}^2(\gamma)\tilde{a}_2n^2, \quad A=\mathcal{E}(\gamma^2)a_1n+\mathcal{E}^2(\gamma)a_2n^2, \\
 B^{(h)} &= \mathcal{E}\left[\left(\kappa_p-\kappa_m-\frac{2}{3}\left(\mu_p-\mu_m\right)\right)\gamma^2\right]\phi_p \\
 &\quad +\left\{\begin{aligned} &2\mathcal{E}\left[\left(\kappa_p-\kappa_m-\frac{2}{3}\left(\mu_p-\mu_m\right)\right)\gamma\right]\mathcal{E}(\gamma)\tilde{b}_2 \\ &+\left[\mathcal{E}\left(\kappa_p-\frac{2}{3}\mu_p\right)-\left(\kappa_m-\frac{2}{3}\mu_m\right)\right]\mathcal{E}(\gamma^2)\tilde{b}_2^\dagger \end{aligned}\right\}n^2 \\
 &\quad +\left[\mathcal{E}\left(\kappa_p-\frac{2}{3}\mu_p\right)-\left(\kappa_m-\frac{2}{3}\mu_m\right)\right]\mathcal{E}^2(\gamma)\tilde{b}_3n^3,
 \end{aligned}$$

$$(20) \quad B = \mathcal{E}[(\mu_p - \mu_m)\gamma^2]b_1 n + \left\{ 2\mathcal{E}[(\mu_p - \mu_m)\gamma] \mathcal{E}(\gamma)b_2 + [\mathcal{E}(\mu_p) - \mu_m] \mathcal{E}(\gamma^2)b_2^\dagger \right\} n^2 + [\mathcal{E}(\mu_p) - \mu_m] \mathcal{E}^2(\gamma)b_3 n^3,$$

където коефициентите

$$r_2 = \tilde{a}_2 = \tilde{b}_2 = \iint h(\mathbf{z}_1)h(\mathbf{z}_2)\theta(\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_1)d\mathbf{z}_1d\mathbf{z}_2 = -V_a^2,$$

$$a_1 = \int \nabla\nabla\varphi(\mathbf{z}) : \nabla\nabla\varphi(\mathbf{z})d\mathbf{z} = V_a,$$

$$a_2 = \iint \nabla\nabla\varphi(\mathbf{z}_1) : \nabla\nabla\varphi(\mathbf{z}_2)\theta(\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_1)d\mathbf{z}_1d\mathbf{z}_2 = -V_a^2,$$

$$b_1 = \int h(\mathbf{z})\nabla\nabla\varphi(\mathbf{z}) : \nabla\nabla\varphi(\mathbf{z})d\mathbf{z} = \frac{1}{3}V_a,$$

$$b_2 = \iint h(\mathbf{z}_1)\nabla\nabla\varphi(\mathbf{z}_1) : \nabla\nabla\varphi(\mathbf{z}_2)\theta(\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_1)d\mathbf{z}_1d\mathbf{z}_2 = -\frac{1}{3}V_a^2,$$

$$\tilde{b}_2^\dagger = \iint h(\mathbf{z}_1)h(\mathbf{z}_2)g_2(\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_1)d\mathbf{z}_1d\mathbf{z}_2b_2 = 0,$$

се пресмятат лесно чрез използване на условието за непресичане на сферите и свойствата  $\Delta\varphi(\mathbf{x}) = -h(\mathbf{x})$  и  $h(\mathbf{x})\nabla\nabla\varphi(\mathbf{x}) = -\frac{1}{3}h(\mathbf{x})\mathbf{I}$  на нютонския потенциал и чрез интегриране по части при  $a_1$  и  $a_2$ , а коефициентите

$$(21) \quad b_2^\dagger = \iint h(\mathbf{z}_2)\nabla\nabla\varphi(\mathbf{z}_1) : \nabla\nabla\varphi(\mathbf{z}_1)g_2(\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_1)d\mathbf{z}_1d\mathbf{z}_2,$$

$$b_3 = \iiint h(\mathbf{z}_3)\nabla\nabla\varphi(\mathbf{z}_1) : \nabla\nabla\varphi(\mathbf{z}_2)g_3(\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_3)d\mathbf{z}_1d\mathbf{z}_2d\mathbf{z}_3$$

и зависят от дву- и три-точковите функции на разпределение; в дадените по-горе формули  $\theta(r) = g_2(r) - 1$  е тоталната

корелационна функция,  $g_3(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = g_3(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - g_2(\mathbf{u}) - g_2(\mathbf{v}) + 1$ ,  $V_a$  е обемът на сфера от дисперсията,  $\mathcal{E}(\xi)$  е математическото очакване на случайната величина  $\xi$ . Същите коефициенти  $b_2^\dagger$  и  $b_3$  се появяват и при аналогичното разглеждане за ефективната проводимост  $\sigma_e$  на дисперсията [17]. Оказа се, че те се изразяват чрез статистически параметри за двуфазна дисперсия, т.е. за дисперсия от сфери с една и съща проводимост  $\sigma_p$ .

#### 4.2. Статистически параметри за дисперсията

Позовавайки се на факта, че за двуфазна дисперсия границите на Беран [18] и кластерните граници на Торкуато [13] за  $\sigma_e$  съвпадат, в [17] установихме равенството

$$(22) \quad B = \frac{\phi_p \phi_m}{d} [\phi_m + (d-1)\zeta_p],$$

където

$$(23) \quad B = nb_1 + n^2(2b_2 + b_2^\dagger) + n^3b_3,$$

а  $\zeta_p$  е статистически параметър за средата, въведен независимо един от друг от Торкуато [19] и Милтон [20], който за дисперсия от сфери се изразява в интегрална форма чрез дву- и три-точковите функции на разпределение  $g_2(r)$  и  $g_3(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ , вж., например, [2, Гл. 20]. (В литературата за  $\zeta_p$  се използва обикновено означението  $\zeta_2$ , свързвайки по този начин параметъра с фазата с проводимост  $\sigma_2$ , за която тук използваме означението  $\sigma_p$ .) Аналогично сравнение може да се направи за границите на Беран-Молиньо [11] и Кинтания-Торкуато [10] за ефективния обем на модул  $\kappa_e$  на дисперсия от сфери с едни и същи еластични модули  $\kappa_p$  и  $\mu_p$ , което води до равенство, еквивалентно на (22). Ще отбележим само, че тогава от (20) следва, че  $B = (\mu_p - \mu_m)B\gamma^2$ , Ето защо, позовавайки се пък на интегралната форма (19) за  $B$ , ще получим представянето

$$(24) \quad B = \langle \mathcal{I}^{(p)}(\mathbf{x})\mathbf{F}(\mathbf{x}) : \mathbf{F}(\mathbf{x}) \rangle,$$

където

$$\mathcal{I}^{(p)}(\mathbf{x}) = \int h(\mathbf{x} - \mathbf{y})\psi(\mathbf{y})d\mathbf{y} = \sum_j h(\mathbf{x} - \mathbf{y}_j)$$

е индикаторната функция на фазата от сферите, а

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \int \nabla \nabla \varphi(\mathbf{x} - \mathbf{y})\psi'(\mathbf{y})d\mathbf{y} = \sum_j \nabla \nabla \varphi(\mathbf{x} - \mathbf{y}_j) + \frac{\phi_p}{d} \mathbf{I}.$$

В тази си форма параметърът  $B$  може лесно да се пресметне чрез компютърна симулация на дисперсията, а оттук чрез равенството (22) да се пресметне и параметъра  $\zeta_p$ , както е направено от Милер и Торкуато [21], които установяват в еквивалентна форма това равенство.

С помощта на равенствата (22) и (23) можем да изразим коефициента  $b_3$  чрез параметъра  $\zeta_p$  и коефициента  $b_2^\dagger$ , който пък може лесно да се преобразува до следния вид

$$(25) \quad b_2^\dagger = 2\Omega V_a^2,$$

където

$$(26) \quad \Omega = \int_a^{+\infty} g_2(as) \frac{s^{d-1}}{(s^2-1)^d} ds$$

е статистически параметър, който се появява при опростяване на параметъра  $\zeta_p$  за дисперсия от непресичащи се сфери, вж., например, [22]. За дисперсия, намираща се в термодинамично равновесие, параметърът  $\Omega$  е пресметнат в последната работа до ред  $\phi_p^2$ :

$$(27) \quad \Omega = \Omega_0 + \Omega_1 \phi_p + \Omega_2 \phi_p^2 + o(\phi_p^2),$$

където  $\Omega_0 = \frac{5}{36} - \frac{1}{16} \ln 3$ ,  $\Omega_1 = \frac{25}{72} + \frac{51}{96} \ln 5 - \ln 3$  и  $\Omega_2 \approx 0.080980$ .

За параметъра  $\zeta_p$  Бийзли и Торкуато [22] получават приближено:

$$(28) \quad \zeta_p = 0.21068 \phi_p + 0.04693 \phi_p^2 + 0.00247 \phi_p^3 + o(\phi_p^3).$$

По-удобно е вместо параметъра  $\Omega$  да въведем параметъра

$$(29) \quad \chi_p = 3\Omega\phi_p = \frac{3}{2V_a} b_2^\dagger \phi_p$$

за който се оказва [23], че  $0 \leq \chi_p \leq 1$ . Добре известно е, че същите неравенства се удовлетворяват и от параметъра  $\zeta_p$ :  $0 \leq \zeta_p \leq 1$ , вж. [19, 20]. Оказва се също, че за  $\chi_p$  може да се изведе представяне, аналогично на това, определено от (22) и (24) за  $\zeta_p$ .

#### 4.3. Крайна форма на вариационните граници

Имайки предвид стойностите на коефициентите  $r_2$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $\tilde{a}_2$ ,  $b_1$ ,  $b_2$  и  $\tilde{b}_2$ , формулата (29) и произтичащото от равенствата (22) и (23) представяне на  $b_3$ , за коефициентите  $R$  и  $Q$  в израза (18) за горната граница  $\kappa_U$  намираме

$$(30) \quad \begin{aligned} R &= \left[ \left( \mathcal{E}(\kappa_p) - \kappa_m \right) \mathcal{E}(\gamma) \phi_m + \text{Cov}(\kappa_p, \gamma) \right] \phi_p, \\ Q &= \frac{\kappa_m}{\alpha_m^{(k)}} \left[ \mathcal{E}^2(\gamma) \phi_m + \text{Var}(\gamma) \right] \phi_p \\ &+ \left( \mathcal{E}(\kappa_p) - \kappa_m \right) \left[ \mathcal{E}^2(\gamma) \phi_m^2 + \text{Var}(\gamma) \right] \phi_p \\ &+ \left[ \text{Cov}(\kappa_p, \gamma^2) - 2\text{Cov}(\kappa_p, \gamma) \mathcal{E}(\gamma) \phi_p \right] \phi_p \\ &+ \frac{4}{3} \left( \mathcal{E}(\mu_p) - \mu_m \right) \left[ \mathcal{E}^2(\gamma) \zeta_p \phi_m + \text{Var}(\gamma) \chi_p \right] \phi_p, \end{aligned}$$

където  $\text{Cov}(\xi, \eta) = \mathcal{E}[(\xi - \mathcal{E}(\xi))(\eta - \mathcal{E}(\eta))] = \mathcal{E}(\zeta\eta) - \mathcal{E}(\xi)\mathcal{E}(\eta)$  е ковариацията на случайните величини  $\xi$  и  $\eta$ , а  $\text{Var}(\xi) = \text{Cov}(\xi, \xi) = \mathcal{E}[(\xi - \mathcal{E}(\xi))^2] = \mathcal{E}(\zeta^2) - \mathcal{E}^2(\xi)$  е вариацията (дисперсията) на  $\xi$ .

Аналогична вариационна процедура, основана на минимизирането на функционала (8) върху класа от пробни полета



$$\hat{\mathbf{\tau}}(\mathbf{x}) = \langle \boldsymbol{\tau} \rangle + \alpha \iint \gamma(\kappa, \mu) [\nabla \nabla \varphi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + h(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mathbf{I}] \times \psi'(\mathbf{x}; \kappa, \mu) dy d\kappa d\mu \text{Tr} \langle \boldsymbol{\tau} \rangle$$

при  $\langle \boldsymbol{\tau} \rangle = \frac{1}{3} \text{Tr} \langle \boldsymbol{\tau} \rangle \mathbf{I}$  води до намирането на долната граница  $\kappa_L$  на ефективния обмен модул  $\kappa_e$ :

$$(31) \quad \kappa_L = \left\{ \left\langle \frac{1}{\kappa} \right\rangle - \frac{R^2}{Q} \right\}^{-1},$$

където сега

$$(32) \quad \begin{aligned} R &= 2 \left[ (\mathcal{E}(1/\kappa_p) - 1/\kappa_m) \mathcal{E}(\gamma) \phi_m + \text{Cov}(1/\kappa_p, \gamma) \right] \phi_p, \\ Q &= \frac{3}{\alpha_m^{(k)} \mu_m} \left[ \mathcal{E}^2(\gamma) \phi_m + \text{Var}(\gamma) \right] \phi_p \\ &+ 4 (\mathcal{E}(1/\kappa_p) - 1/\kappa_m) \left[ \mathcal{E}^2(\gamma) \phi_m^2 + \text{Var}(\gamma) \right] \phi_p \\ &+ 4 \left[ \text{Cov}(1/\kappa_p, \gamma^2) - 2 \text{Cov}(1/\kappa_p, \gamma) \mathcal{E}(\gamma) \phi_p \right] \phi_p \\ &+ 3 (\mathcal{E}(1/\mu_p) - 1/\mu_m) \left[ \mathcal{E}^2(\gamma) \phi_m \zeta_p + \text{Var}(\gamma) \chi_p \right] \phi_p. \end{aligned}$$

Детайлно изследване на поведението на границите  $\kappa_L$  и  $\kappa_U$  ще бъде дадено в [12]. Тук ще отбележим само, че най-простият случай, когато  $\gamma$  е неслучайна величина, води до получаването на границите

$$\frac{1}{\kappa_L} = \left\langle \frac{1}{\kappa} \right\rangle - \frac{4 \phi_p \phi_m (\mathcal{E}(1/\kappa_p) - 1/\kappa_m)^2}{3/(\alpha_m^{(k)} \mu_m) + 4 (\mathcal{E}(1/\kappa_p) - 1/\kappa_m) \phi_m + 3 (\mathcal{E}(1/\mu_p) - 1/\mu_m) \zeta_p},$$

$$\kappa_U = \langle \kappa \rangle - \frac{3 \phi_p \phi_m (\mathcal{E}(\kappa_p) - \kappa_m)^2}{3 \kappa_m / \alpha_m^{(k)} + 3 (\mathcal{E}(\kappa_p) - \kappa_m) \phi_m + 4 (\mathcal{E}(\mu_p) - \mu_m) \zeta_p},$$

които представляват границите на Беран-Молиньо за двуфазна среда с еластични модули  $\mathcal{E}(\kappa_p), \mathcal{E}(\mu_p)$  и  $\kappa_m, \mu_m$  за горната

граница и еластични модули  $1/\mathcal{E}(1/\kappa_p)$ ,  $1/\mathcal{E}(1/\mu_p)$  и  $\kappa_m$ ,  $\mu_m$  на компонентите си за долната граница. Ако  $\gamma$  е случайна величина, обаче, статистическият параметър  $\chi_p$  има самостоятелно значение в определянето на поведението на границите.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Maxwell, J. C., *A Treatise on Electricity and Magnetism*, Vol.1, Ch. 9, article No 310-315, pp. 435-441, 1st edn. Oxford, United Kingdom: Clarendon Press, 1973.
2. Torquato S., *Random heterogeneous materials*, New York, NY: Springer, 2002.
3. McCartney L. Neil, A. Kelly, Maxwell's far-field methodology applied to the prediction of properties of multi-phase isotropic particulate composites, *Proc. R. Soc. London A* **464**, 423, 2008.
4. Weng, G. J., Some elastic properties of reinforced solids with special reference to isotropic ones containing spherical inclusions, *Int. J. Eng. Sci.* **22**, 845-856, 1984.
5. Mori, T., K. Tanaka, Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions, *Acta Metall.* **21**, 571-574. 1973.
6. Benveniste, Y., Revisiting the generalized self-consistent scheme in composites: Clarification of some aspects and a new formulation, *J. Mech. Phys. Solids*, **56**, 2984, 2008.
7. Hashin, Z., S. Shtrikman, A variational approach to the theory of the elastic behavior of multiphase materials, *J. Mech. Phys. Solids*, **11**, 127-140, 1963.
8. Markov, K. Z., K. D. Zvyatkov, Optimal third-order bounds on the effective properties of some composite media, and related problems, *Advances in Mechanics* (Warsaw) **14**(4), 3-46, 1991.
9. Markov, K. Z., Kr. D. Zvyatkov, On the optimal third-order bounds on the effective elastic moduli of random dispersions of spheres, *Annuaire Univ. Sofia, Fac. Math. Inf., Livre 2, Mécanique*, **83**/1989, 37-63, 1992.
10. Quintanilla, J. and Torquato, S. (1995). New bounds on the elastic moduli of suspensions of spheres, *J. Appl. Phys.* **77**, 4361-4372, 1995.
11. Beran, M. J., Molyneux, J., Use of classical variational principles to determine bounds for the effective bulk modulus in heterogeneous media, *Quart. Appl. Math.* **24**, 107-118, 1966.
12. Tsvyatkov, Kr. D., Bounds on the effective elastic moduli of multi-phase dispersions of spheres, to be published.

13. Torquato, S., Bulk properties of two-phase disordered media. III. New bounds on the effective conductivity of dispersions of penetrable spheres, *J. Chem. Phys.* **84**, 6345, 1986.
14. Stratonovich, R. L., *Topics in theory of random noises*, Vol. 1, New York, Gordon and Breach, 1967.
15. C. I. Christov, A further development of the concept of random density function with application to Volterra-Wiener expansions, *C. R. Acad. bulg. sci.* **38**(1), 35-38, 1985.
16. Zvyatkov, Kr. D., On the effective conductivity of a class of random dispersions, *Annuaire Univ. Sofia, Fac. Math. Inf., Livre 2*, **89**, 217, 1995.
17. Tsvyatkov, Kr. D., On the effective conductivity of multi-phase dispersions, *Proceedings of the Conference MATHTEX 2012, Univ. Shumen, Fac. Math. Inf., Vol. 1*, 85-90, 2013. (in Bulgarian)
18. Beran, M. J., Use of the variational approach to determine bounds for the effective permittivity in random media, *Nuovo Cimento* **38**, 771, 1965.
19. Torquato, S., Microscopic Approach to Transport in Two-Phase Random Media, Ph.D. thesis, State University of New York at Stony Brook, 1980.
20. Milton, G. W., Bounds on the electromagnetic, elastic, and other properties of two-component composites., *Physical Review Letters* **46**(8), 542, 1981.
21. Miller, C. A., S. Torquato, Effective conductivity of hard-sphere dispersions, *J. Appl. Phys.* **68**, 5486, 1990.
22. Beasley, J. D, S. Torquato, Bounds on the effective conductivity of suspension of random impenetrable spheres, *J. Appl. Phys.* **60**, 3556, 1986.
23. Tsvyatkov, Kr. D., Bounds on the effective conductivity of multi-phase dispersions of spheres, to be published.

**Красимир Д. Цвятков**

ШУ „Епископ Константин Преславски“, гр. Шумен, ФМИ,

катедра „Математически анализ“

E-mail: ktsvyatkov@abv.bg

