Тема 1

Забележителни повърхнини от втора степен

Аналитично представяне чрез каноничните им уравнения

Лекционен курс по *Аналитична геометрия* от летен семестър на 2006/2007

Радостина Енчева
Факултет по математика и информатика
Шуменски Университет "Еп.Константин Преславски"

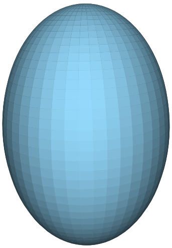
Съдържание

Определение и канонично уравнение

Определение

Елипсоидът е повърхнина, която спрямо дадена ортонормирана координатна система има уравнение

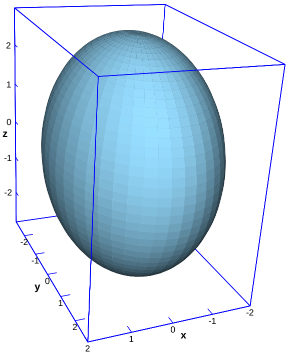
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{1}$$

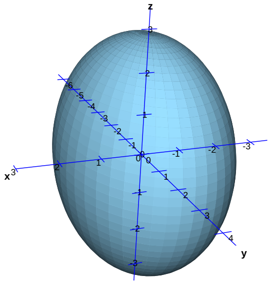


Уравнението (1) се нарича канонично уравнение на елипсоида.

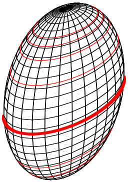
Симетрии

За произволна точка M(x,y,z) от елипсоида е изпълнено, че $|x| \leq a$, $|y| \leq b$, $|z| \leq c$, което означава, че елипсоида е разположен в правоъгълния паралелепипед с основни ръбове 2a, 2b, 2c. Очевидно елипсоидът е разположен симетрично спрямо началото на координатната система поради което тази точка се нарича център на елипсоида.





Сечения на елипсоида с равнини, успоредни на Oxy



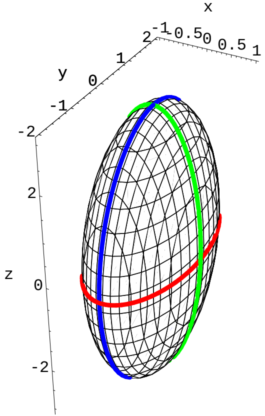
Равнината $z = z_0$ при $|z_0| < c$ пресича елипсоида в елипсата с уравнение

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1, z = z_0, \qquad (2)$$

като $a' = a\sqrt{1 - \frac{z_0^2}{c^2}}$, $b' = b\sqrt{1 - \frac{z_0^2}{c^2}}$.
Координатните оси пресичат елипсоида в точките $A_1(a, 0, 0)$, $A_2(-a, 0, 0)$, $B_1(0, b, 0)$, $B_2(0, -b, 0)$, $C_1(0, 0, c)$, $C_2(0, 0, -c)$, които се наричат върхове на елипсоида. Координатните оси се наричат оси на елипсоида. Ако $a = b$, то (2) определя окръжност с център на оста Oz. Тогава елипсоида може да се разглежда като ротационна повърхнина, получена при въртене на елипса около една от осите ѝ. Такъв елипсоид се нарича ротационен елипсоид. В случая когато $a = b = c$ елипсоида е сфера.

Сечения на елипсоида с равнини, успоредни на Oxz или Oyz

Елипси си получават и при сечението на елипсоида с равнини успоредни на Oxz или Oyz.

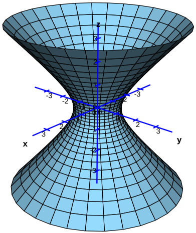


Определение и канонично уравнение

Определение

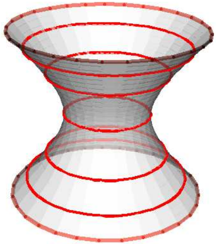
Прост Хиперболоид е повърхнина, която спрямо дадена ортонормирана координатна система има уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (3)$$



Началото на координатната система е център на симетрия за простия хиперболоид и затова тази точка се нарича негов център.

Сечения с равнини, успоредни на Oxy



Фигура: Равнината $z = z_0$ пресича простия хиперболоид в елипса с уравнение

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a'^2} + \dfrac{y^2}{b'^2} & = & 1 \\ z & = & z_0 \end{cases}$$

с полуоси

$$a' = a\sqrt{1 + \frac{z_0^2}{c^2}} \text{ и}$$

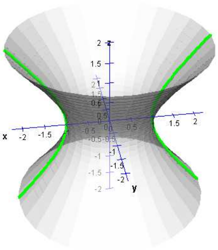
$$b' = b\sqrt{1 + \frac{z_0^2}{c^2}},$$

разположена симетрично относно равнините Oxz и Oyz.

При $z = 0$ елипсата има уравнение $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ и се нарича гърлова елипса на простия хиперболоид. При $a = b$ се получава ротационен прост хиперболоид.

Сечения с равнини, успоредни на Oxz

Равнините $x = x_0$ или $y = y_0$ пресичат простия хиперболоид в хиперболи.

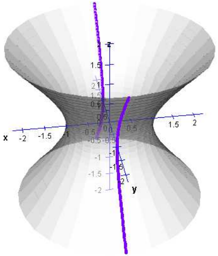


Фигура: Сечението с равнината Oxz се определя с уравнението

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} & = & 1 \\ y & = & 0 \end{cases},$$

което е хипербола разположена симетрично относно осите Ox, Oz и пресича Ox в точките $A_1(a, 0, 0)$ и $A_2(-a, 0, 0)$.

Сечения с равнини, успоредни на Oyz



Фигура: Сечението с равнината Oyz се определя с уравнението

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} & = & 1 \\ x & = & 0 \end{cases},$$

което е хипербола разположена симетрично относно осите Oy, Oz и пресича Oy в точките $B_1(0, b, 0)$ и $B_2(0, -b, 0)$.
Точките $A_1(a, 0, 0)$, $A_2(-a, 0, 0)$, $B_1(0, b, 0)$, $B_2(0, -b, 0)$ се наричат върхове на простия хиперболоид и очевидно са пресечните точки на хиперболоида с координатните оси.

Праволинейни образуващи на простия хиперболоид от първа система

Да представим уравнението (3) във вида

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2}$$

или

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \left(1 + \frac{y}{b}\right)\left(1 - \frac{y}{b}\right).$$

Разглеждаме уравненията

$$\begin{cases} \alpha\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) & = & \beta\left(1 + \frac{y}{b}\right) \\ \beta\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) & = & \alpha\left(1 - \frac{y}{b}\right) \end{cases} \tag{4}$$

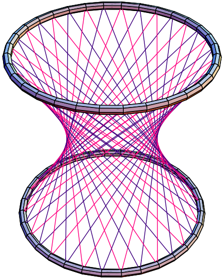
където α и β са произволни различни от нула числа. Ако α и β са фиксирани, то (4) определят права. Умножавайки двете уравнения получаваме (3). Следователно правите, определени от (4) изцяло лежат на хиперболоида. Тези прави се наричат праволинейни образуващи.

Праволинейни образуващи на простия хиперболоид от втора система

Аналогично на (4) можем да съставим уравненията

$$\begin{cases} \alpha\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right) &= \beta\left(1-\frac{y}{b}\right) \\ \beta\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right) &= \alpha\left(1+\frac{y}{b}\right), \end{cases} \tag{5}$$

които също определят праволинейни образуващи на простия хиперболоид. Така простият хиперболоид има две системи от праволинейни образуващи, определени от уравненията (4) и (5).



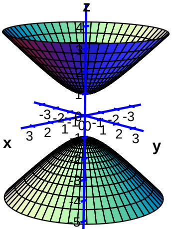
Определение и канонично уравнение

Определение

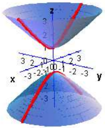
Двоен Хиперболоид е повърхнина, която спрямо дадена ортонормирана координатна система има уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \tag{6}$$

Началото на координатната система е също център на симетрия за двойния хиперболоид, поради което тя се нарича негов център.



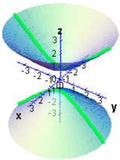
Сечение на двойния хиперболоид с равнината Oxz или Oyz



Фигура: Сечението с равнината Oxz се определя с уравнението

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} & = & -1 \\ y & = & 0 \end{cases},$$

което е хипербола разположена симетрично относно осите Ox, Oz и пресича Oz в точките $A_1(0,0,c)$ и $A_2(0,0,-c)$.



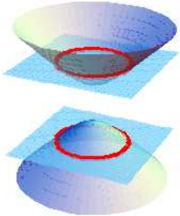
Фигура: Сечението с равнината Oyz се определя с уравнението

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} & = & -1 \\ x & = & 0 \end{cases},$$

което е хипербола разположена симетрично относно осите Oy, Oz и пресичаща Oz в същите точки A_1 и A_2.

Сечения на двойния хиперболоид с равнини, успоредни на Oxy

Всяка равнина, успоредна на Oxy има уравнение $z = z_0$, а сечението с хиперболоида се определя с уравненията
$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} - 1 \\ z = z_0 \end{cases}$. Когато $|z_0| > c$, равнината $z = z_0$ пресича двойния хиперболоид в елипси с полуоси
$a' = a\sqrt{\frac{z_0^2}{c_0^2} - 1}$, $b' = b\sqrt{\frac{z_0^2}{c_0^2} - 1}$, разположени симетрично относно Oxz и Oyz.



При $z_0 = \pm c$ имаме $a' = b' = 0$, т. е. равнините $z_0 = \pm c$ пресичат двойния хиперболоид в точките A_1 и A_2, съответно. При $z_0 < c$ равнината $z = z_0$ няма общи точки с дадения хиперболоид. Точките A_1 и A_2 се наричат върхове, а оста Oz ос на двойния хиперболоид. Когато $a = b$ двойния хиперболоид може да се разглежда като ротационна повърхнина, получена при въртене на хипербола около една от осите ѝ. Нарича се ротационен двоен хиперболоид.

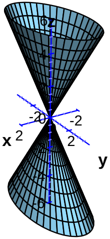
Определение и канонично уравнение

Определение

Конус от втори ред е повърхнина, която спрямо дадена ортонормирана координатна система има уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \qquad (7)$$

което се нарича канонично уравнение на конуса.



Уравнението (7) е хомогенно, откъдето следва следната геометрична особеност на конуса.

Праволинейни образуващи на конуса

Твърдение

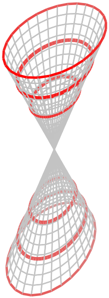
Ако една точка $M \neq O$ лежи на конуса, то всяка точка върху правата, която минава през началото и точката M също лежи на повърхнината.

Док.: Нека $M(x_0, y_0, z_0)$. Правата OM има уравнения $x = x_0 t$, $y = y_0 t$, $z = z_0 t$. Имаме, че $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$.
Заместваме x, y, z в (7) и получаваме

$$\frac{t^2x^2}{a^2} + \frac{t^2y^2}{b^2} - \frac{t^2z^2}{c^2} = t^2\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right) = 0.$$

Тази права се нарича образуваща на конуса, а точката O - връх на конуса.

Сечения на конуса с равнини, успоредни на равнината Oxy



Сеченията на конуса с равнини, успоредни на равнината Oxy с уравнения $z = z_0 \neq 0$ са елипси с уравнения

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= \frac{z_0^2}{c^2} \\ z &= z_0 \end{cases} \tag{8}$$

с полуоси

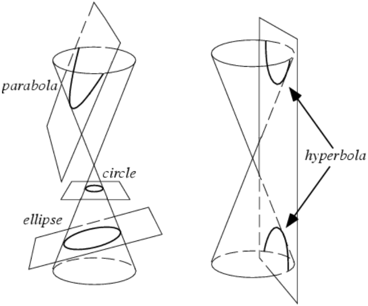
$$a' = a\frac{|z_0|}{c}, \; b' = b\frac{|z_0|}{c}.$$

Когато $a = b$, то (8) е уравнение на окръжност и в този случай конуса се нарича ротационен.

Сечения на конуса с равнини, успоредни на равнината Oyz или Oxz

Равнините $x = x_0 \neq 0$ (или $y = y_0 \neq 0$) пресичат конуса в хиперболи с уравнения

$$\begin{cases} \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} & = \frac{x_0^2}{a^2} \\ x & = x_0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} & = \frac{y_0^2}{b^2} \\ y & = y_0 \end{cases}$$



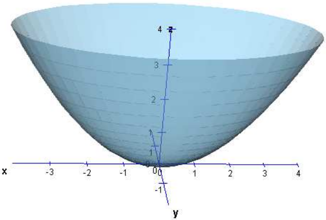
Може да се докаже, че сечението на конуса с равнина, успоредна на образуваща права е парабола. Затова елипсата, хиперболата и параболата са известни още като конични сечения.

Определение и канонично уравнение

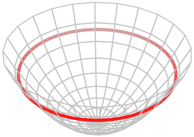
Определение

Елиптичен параболоид е повърхнина, която спрямо дадена ортонормирана координатна система има уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$$



Сечения на елиптичния параболоид с равнини, успоредни на Oxy

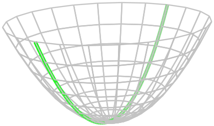


Сечението на елиптичния параболоид с равнините $z = z_0 > 0$ се определя с уравнението

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} & = & 2z_0 \\ z & = & z_0 \end{cases} \qquad (9)$$

което е елипса с полуоси $a' = a\sqrt{2z_0}$, $b' = b\sqrt{2z_0}$. Когато $z_0 = 0$ $a' = b' = 0$ и получаваме една единствена точка O(0, 0, 0)-допирната точка на елиптичния параболоид с равнината Oxy. Когато $a = b$ уравненията (9) определят окръжност, получена при въртене на парабола около оста й́.

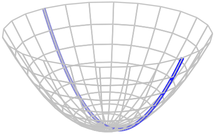
Сечение на елиптичния параболоид с равнините Oxz или Oyz



Сечението
на елиптичния параболоид с равнината Oxz с уравнение $y = 0$ е

$$\begin{cases} x^2 &= 2a^2 z \\ y &= 0 \end{cases}$$

което е уравнение на парабола симетрична относно Oz с връх O и параметър a^2.



Сечението
на елиптичния параболоид с равнината Oyz с уравнение $x = 0$ е

$$\begin{cases} y^2 &= 2b^2 z \\ x &= 0 \end{cases}$$

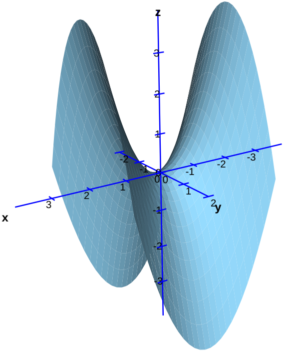
което също е уравнение на парабола симетрична относно Oz с връх O и параметър b^2.

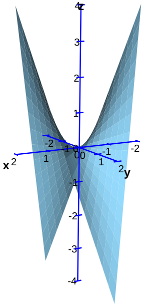
Определение и канонично уравнение

Определение

Хиперболичен параболоид *е повърхнина, която спрямо дадена ортонормирана координатна система има уравнение*

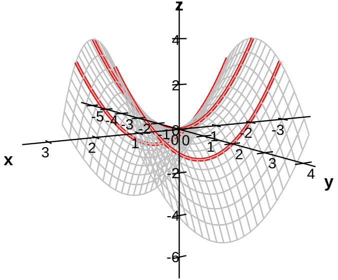
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z,\ a > 0,\ b > 0 \qquad (10)$$





Сечения на хиперболичния параболоид с равнини, успоредни на Oxz

Хиперболичният параболоид има формата на седло с две равнини на симетрия Oxz и Oyz. Точката O се нарича връх, а числата a^2 и b^2 - параметри.



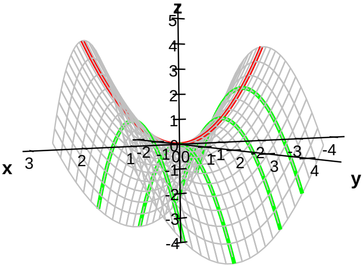
Сечението на Хиперболичния параболоид с равнината $Oxz : y = 0$ има уравнение

$$\begin{cases} x^2 = 2a^2 z \\ y = 0 \end{cases} \tag{11}$$

което е уравнение на парабола, симетрична относно Oz с връх O и параметър a^2. Равнините с уравнение $y = y_0$ ($\|Oxz$) пресичат хиперболичния параболоид в параболи с уравнение $\begin{cases} x^2 = 2a^2 z + \dfrac{a^2 y_0^2}{b^2} \\ y = y_0 \end{cases}$

с връх в точка $(0, y_0, -\dfrac{y_0^2}{2b^2})$ и симетрични относно Oz.

Сечения на хиперболичния параболоид с равнини, успоредни на Oyz

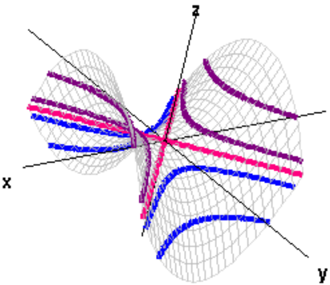


Сечението на Хиперболичния параболоид с равнината $x = x_0$, успоредна на Oyz има уравнение

$$\begin{cases} -y^2 & = & 2b^2 z - \dfrac{b^2 x_0^2}{a^2} \\ x & = & x_0. \end{cases}$$

За всяко x_0 сечението е парабола, симетрична относно Oz и обърната към отрицателната посока на Oz. Върховете на тази парабола са точки с координати $(x_0, 0, \dfrac{x_0^2}{2a^2})$ и лежат на параболата с уравнение (11).

Сечения на хиперболичния параболоид с равнини, успоредни на Oxy



Сечението на хиперболичния параболоид с равнини успоредни на Oxy се определя с уравнението

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} & = & 2z_0 \\ z & = & z_0, \end{cases}$$

което е уравнение на хипербола, симетрична относно Oxz и Oyz. Когато $z_0 > 0$ сечението е хипербола с полуоси $\sqrt{2a^2 z_0}$ и $\sqrt{2b^2 z_0}$ като реалната ос е успоредна на Ox, а имагинерната на Oy. Когато $z_0 < 0$ сечението е хипербола с полуоси $\sqrt{-2a^2 z_0}$ и $\sqrt{-2b^2 z_0}$ като реалната ос е успоредна на Oy, а имагинерната на Ox.

Когато $z_0 = 0$ (равнината Oxy) се получават двойка пресичащи се прави с уравнения $\begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} & = & 0 \\ z & = & 0, \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} & = & 0 \\ z & = & 0. \end{cases}$

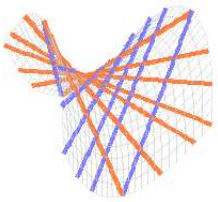
Праволинейни образуващи на хиперболичния параболоид

Уравнението на хиперболичния параболоид (10) може да се запише още във вида

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right).\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=2z.$$

За всяка ненулева двойка от числа λ, μ определяме правата с уравнение

$$\begin{cases} \lambda(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}) & = & \mu 2z \\ \mu(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}) & = & \lambda. \end{cases} \qquad (12)$$



Аналогично, за всяка ненулева двойка от числа λ', μ' получаваме семейството от прави с уравнение

$$\begin{cases} \lambda'(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}) & = & \mu' \\ \mu'(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}) & = & \lambda' 2z, \end{cases}.$$

Тези прави както и правите с уравнения (12) лежат на параболоида с уравнение (10).

Всеки две прави от една и съща система са кръстосани, а от различните системи се пресичат.

Определение и канонични уравнения

Определение

Цилиндрични повърхнини, които спрямо определена ортонормирана координатна система имат уравнения

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \ a > 0, \ b > 0$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \ a > 0, \ b > 0$$

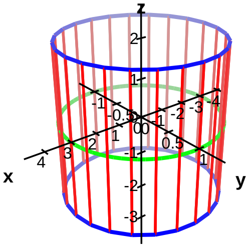
$$y^2 = 2px, \ p > 0$$

се наричат съответно елиптичен, хиперболичен, параболичен цилиндър.

Тези повърхнини съдържат прави, наречени образуващи, успоредни на оста Oz. Сечението на елиптичния, хиперболичния и параболичния цилиндър с равнината Oxy е съответно елипса, хипербола и парабола, наречени още управителни криви.

Елиптичен цилиндър:

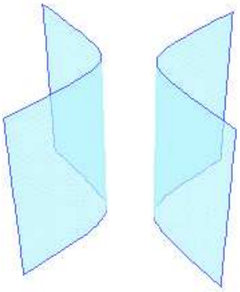
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \ a > 0, \ b > 0$$

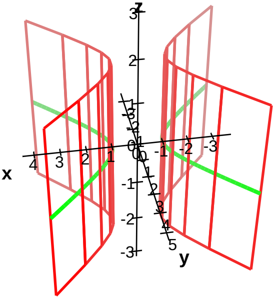


Когато $a = b$ уравнението $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ е уравнение на ротационен цилиндър с ос Oz, т.е. прав кръгов цилиндър.

Хиперболичен цилиндър:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \;\; a > 0, \; b > 0$$





Параболичен цилиндър:

$$y^2 = 2px, \; p > 0$$