3. Непрекъснатост на функция. Свойства на непрекъснатите функции в затворен интервал

3.1. Непрекъснатост на функция в точка.

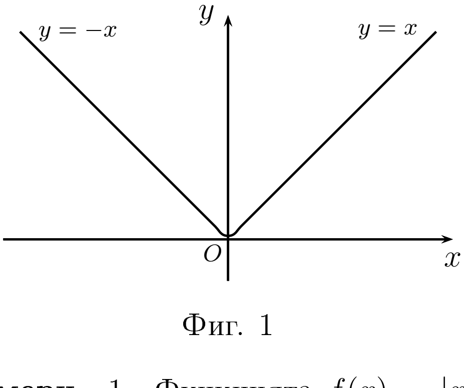
Определение. Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в интервала (a, b) и $x_0 \in (a, b)$. *Функцията $f(x)$ се нарича непрекъсната в точката x_0 , ако съществува крайната граница $\lim_{x\to x_0} f(x)$ и тази граница е равна на стойността на функцията в точката x_0:*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)\,. \tag{1}$$

Функцията $f(x)$ се нарича *непрекъсната в интервала* (a, b), ако тя е непрекъсната във всяка точка x от този интервал. Геометрично това означава, че ние можем да начертаем графиката на функцията в този интервал без да отделяме молива от хартията.

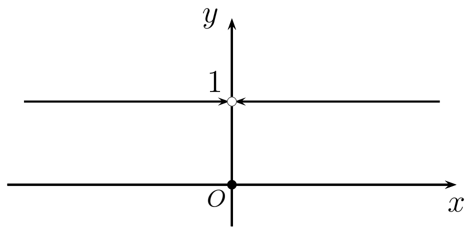
Оказва се, че всичка основна елементарна функция е непрекъсната във всеки интервал, включващ се в дефиниционната ѝ област.

Функцията $f(x)$ се нарича *прекъсната в точката* x_0 от интервала (a, b), в който тя е дефинирана, ако функцията не е непрекъсната в тази точка. Геометрично това означава, че за да начертаем графиката на функцията в интервала (a, b)) ние трябва да отделим молива от хартията в точката $M_0(x_0, f(x_0))$.



Фиг. 1

Примери. 1. Функцията $f(x) = |x|$, графиката на която е показана на фиг. 1, е непрекъсната в цялата си дефиниционна област – интервалът $(-\infty, +\infty)$. В частност, тя е непрекъсната и в точката $x_0 = 0$, тъй като границата $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} |x| = 0$ и стойността $f(0) = |0| = 0$ на функцията са равни.

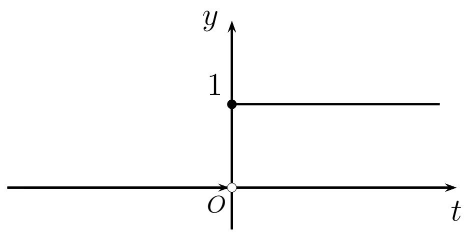


Фиг. 2

2. Да разгледаме функцията

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ако } x \neq 0, \\ 0, & \text{ако } x = 0. \end{cases}$$

За тази функция съществува границата $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$, но тя е различна от стойността $f(0) = 0$ на функцията. следователно функцията е прекъсната в точката $x_0 = 0$, вж. фиг. 2. Във всички останали точки от интервала $(-\infty, +\infty)$ функцията е непрекъсната.

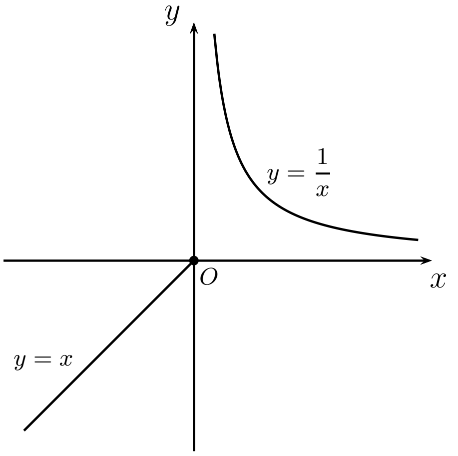


Фиг. 3

3. Да разгледаме сега така наречената импулсна функция

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{ако } t < 0, \\ 1, & \text{ако } t \geq 0. \end{cases}$$

За едностранните граници на тази функция в точката $t_0 = 0$ имаме $\lim\limits_{t\to 0-0} f(t) = \lim\limits_{t\to 0-0} 0 = 0$ и $\lim\limits_{t\to 0+0} f(t) = \lim\limits_{t\to 0+0} 1 = 1$. Тъй като те не са равни, то не съществува границата на функцията в тази точка (вж. теорема 5.1). Следователно функцията е прекъсната в точката $t_0 = 0$, вж. фиг. 3. Забелязваме, че дясната граница $\lim\limits_{t\to 0+0} f(t)$ е равна на стойността $f(0) = 1$ на функцията. Ако се получи аналогична ситуация за една функция $f(x)$ в точка x_0, функцията се нарича *непрекъсната отдясно* в тази точка.



Фиг. 4

4. Да разгледаме накрая функцията

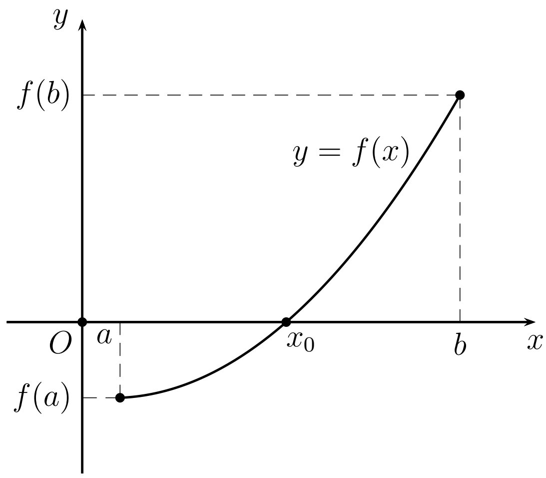
$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ако } x \leq 0, \\ \dfrac{1}{x}, & \text{ако } x > 0. \end{cases}$$

Дясната граница на функцията в точката $x_0 = 0$ е безкрайна: $\lim\limits_{x \to 0+0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0+0} \dfrac{1}{x} = +\infty$, което означава, че функцията не може да има крайна граница в тази точка, вж. фиг. 4. Следователно функцията е прекъсната в точката $x_0 = 0$. Забелязваме, че лявата граница $\lim\limits_{x \to 0-0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0-0} x = 0$ е равна на стойността $f(0) = 0$ на функцията. Ако се получи аналогична ситуация за една функция в точка x_0, функцията се нарича *непрекъсната отляво* в тази точка.

Накрая ще отбележим, че ако две функции $f(x)$ и $g(x)$ са непрекъснати в точка x_0,то тяхната сума, разлика, произведение и частно са също непрекъснати в тази точка. (За частното $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ изискваме $g(x_0) \neq 0$.). Също така композицията на непрекъснати функции е отново непрекъсната функция.

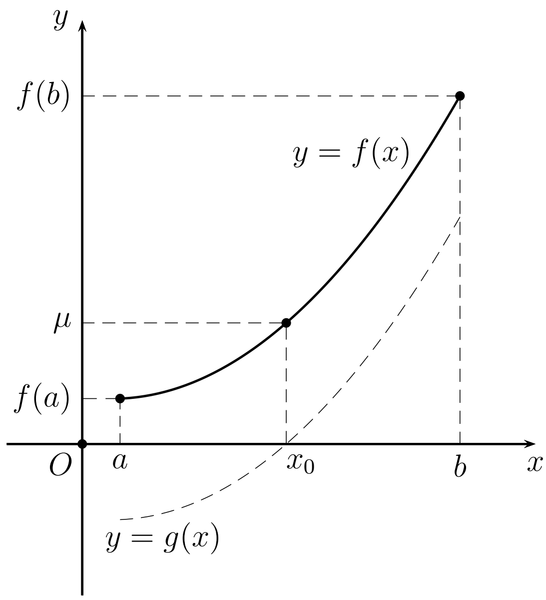
3.2. Свойства на непрекъснатите функции в затворен интервал.

Теорема на Болцано-Коши. *Нека функцията $f(x)$ е непрекъсната в затворения интервал $[a, b]$ и приема стойности с различни знаци в краищата му a и b (или, еквивалентно, $f(a)\, f(b) < 0$). Тогава съществува точка x_0, намираща се в интервала (a, b), за която $f(x_0) = 0$.*



Фиг. 5

Заключението на тази теорема отразява очевидния геометричен факт, че графиката на функцията трябва да пресече абсцисната ос Ox, вж. фиг. 5. То означава също, че при направените предположения уравнението $f(x) = 0$ има решение в интервала $[a, b]$.



Фиг. 6

Следствие. (Теорема за преминаване на непрекъсната функция през всяка своя междинна стойност.) *Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[a, b]$, то* *за всяко число μ, намиращо се между $f(a)$ и $f(b)$, може да се намери такава точка x_0 в интервала (a,b), за която $f(x_0)=\mu$.*

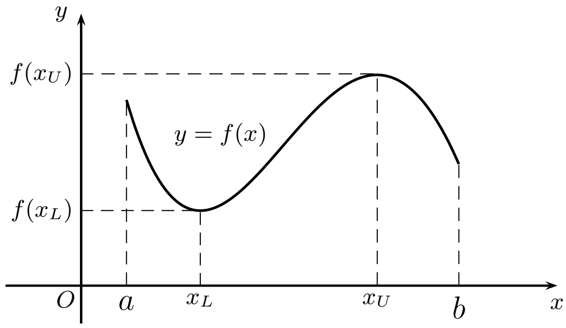
До тази теорема достигаме веднага, ако приложим теоремата на Болцано-Коши за функцията $g(x)=f(x)-\mu$, вж. фиг. 6. Очевидно тези две теореми са еквивалентни.

Първа теорема на Ваерщрас. *Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в затворения интервал $[a,b]$, тя е ограничена в този интервал.*

Определение. *Казва се, че* ***функцията*** $f(x)$ ***има най-малка (най-голяма) стойност в подмножеството*** G ***от дефиниционната ѝ*** *област, ако съществува такава точка x_L (точка x_U), че за всяка точка $x\in G$ да е изпълнено*

$$f(x)\geq f(x_L) \quad (\ f(x)\leq f(x_U)\ )\,.$$

Стойността $f(x_L)$ нарича ***най-малка стойност*** *(или* ***абсолютен минимум****) на функцията в множеството G и се означава с $\min\limits_G f(x)$, а стойността $f(x_U)$ –* ***най-голяма стойност*** *(или* ***абсолютен максимум****) в това множество и се означава с $\max\limits_G f(x)$, т.е. $\min\limits_G f(x) = f(x_L)$ и $\max\limits_G f(x)=f(x_U)$.*



Фиг. 7

Втора теорема на Ваерщрас. *Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в затворения интервал $[a,b]$, тя има най-малка и най-голяма стойност в този интервал.*