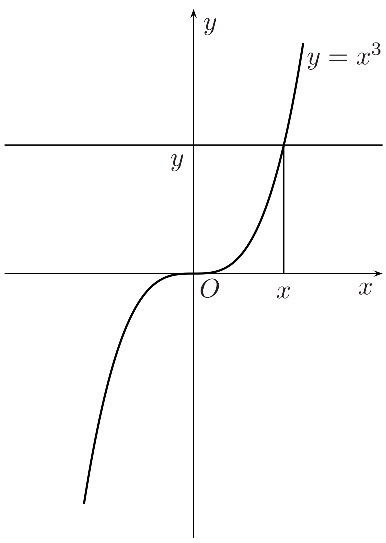
4. Понятие за обратна функция. Основни елементарни функции

I. ПОНЯТИЕ ЗА ОБРАТНА ФУНКЦИЯ

Нека функцията $y = f(x)$ е дефинирана в множеството $X \subset \mathcal{R}$ и приема стойности в множеството $Y \subset \mathcal{R}$.

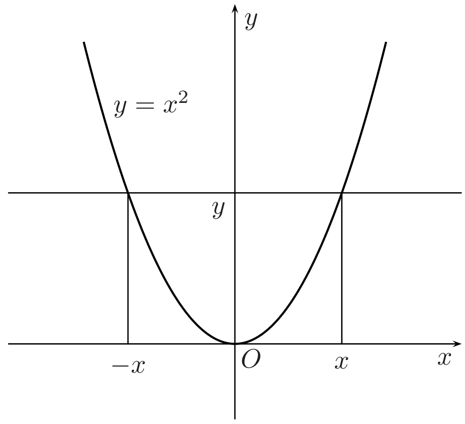
Определение: Ще казваме, че функцията f е *взаимно еднозначна* (или, f е *взаимно еднозначно изображение на* X *върху* Y), ако множеството от стойностите $R_f = \{f(x)|x \in X\}$ на f съвпада с Y (т. е., $R_f = Y$) и за произволни $x_1, x_2 \in X$ такива, че $x_1 \neq x_2$, е изпълнено $f(x_1) \neq f(x_2)$.

От това определение веднага следва, че f е взаимно еднозначно изображение на X върху Y тогава и само тогава, когато за всяко $y \in Y$ може да се намери *единствено* $x \in X$ такова, че $f(x) = y$. Геометрично това означава, че всяка права $y = C$, успоредна на абсцисната ос Ox, пресича графиката на $f(x)$ точно в една точка, когато $y \in Y$. За кубичната функция



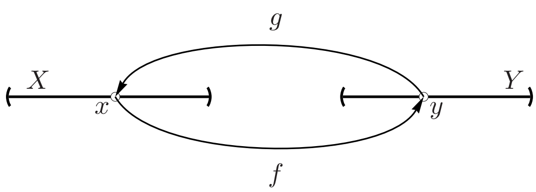
Фиг. 1

$y = x^3$ това е изпълнено (вж. Фиг. 1), но за квадратната функция $y = x^2$ това не е така: за всяко $y > 0$ съществуват две стойности на x, за които $f(x) = y$ (вж. Фиг. 2). Лесно може да се съобрази, че строго монотонните функции са взаимно еднозначни.



Фиг. 2

Определение: Нека f е взаимно еднозначно изображение на X върху Y. Тогава на всяко $y \in Y$ да съпоставим единственото $x \in X$, за което $f(x) = y$. По този начин върху множеството Y дефинираме функция g, приемаща стойности в множеството X, вж. Фиг. 3. Функцията $x = g(y)$ се нарича *обратна* на функцията $y = f(x)$. За обратната функция g се използва означението f^{-1}.



Фиг. 3

Лесно се вижда, че за функциите f и g са в сила следните тъждества:

$$g\,(f(x)) = x \qquad \text{за всяко} \qquad x \in X, \tag{1}$$

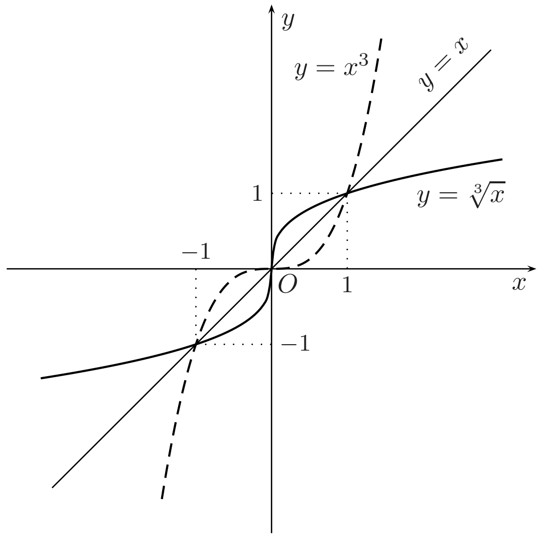
$$f\,(g(y)) = y \qquad \text{за всяко} \qquad y \in Y. \tag{2}$$

За дефиниционните области и множествата от стойности на тези функции имаме: $D_g = Y = R_f$ и $R_g = X = D_f$. Очевидно е, че ако g е обратна на f, то f е обратна на g. Ето защо функциите f и g се наричат взаимно обратни.

Графиките на функциите $y = f(x)$ и $x = g(y)$ съвпадат при условие, че стойностите на аргумента на g се нанасят по оста Oy, а на функционалните ѝ стойности – по оста Ox. Обикновено, обаче, стойностите на аргумента се нанасят по оста Ox, а на функционалните стойности – по оста Oy. Тъй като точките (y, x) и (x, y) са симетрични относно ъглополовящата $y = x$ на първи и трети квадрант, то графиката на обратната функция $y = g(x)$ (сега разменихме x и y)

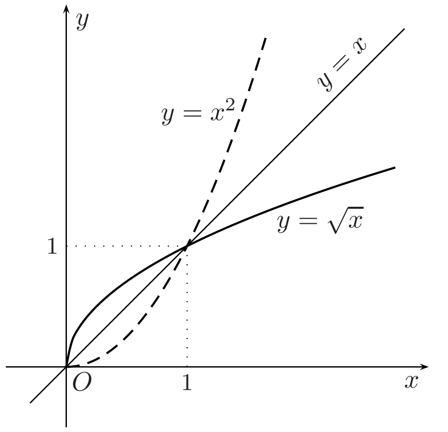
се получава от графиката на $y = f(x)$ чрез симетрия относно тази права.

Примери: 1. Тъй като кубичната функция $y = f(x) = x^3$ е строго монотонно растяща в дефиниционната си област $D_f = (-\infty, +\infty)$, то тя има обратна функция $x = g(y)$, дефинирана върху множеството от стойностите $R_f = (-\infty, +\infty)$ на f. Уравнението $y = x^3$ има единствено решение $x = \sqrt[3]{y}$ и затова $x = g(y) = \sqrt[3]{y}$. Графиката на обратната функция $y = g(x) = \sqrt[3]{x}$ получаваме чрез симетрия относно правата $y = x$ на графиката на функцията $y = f(x) = x^3$, вж. Фиг. 4.



Фиг. 4

2. Квадратната функция $y = f(x) = x^2$, когато се разглежда в цялата си дефиниционна област $D_f = (-\infty, +\infty)$, не е взаимно еднозначна. За да дефинираме обратна функция, трябва да се ограничим с разглеждането на f върху някакво по-тясно множество $\widetilde{D}_f$, в което тя е взаимно еднозначна, т. е., където уравнението $y = x^2$ има единствено решение. Такова множество $\widetilde{D}_f$ е, например, $\widetilde{D}_f = [0, +\infty)$, в което уравнението $y = x^2$ има единствения (неотрицателен) корен $y = \sqrt{x}$. Обратната функция $x = g(y) = \sqrt{y}$ е дефинирана в множеството $D_g = R_f = [0, +\infty)$ и приема стойности в множеството $R_g = \widetilde{D}_f = [0, +\infty)$. Графиката на обратната функция $y = g(x) = \sqrt{x}$ е построена на Фиг. 4 чрез симетрия относно правата $y = x$ на графиката на функцията $y = f(x) = x^2$, разглеждана в множеството $\widetilde{D}_f$.



Фиг. 5

II. ОСНОВНИ ЕЛЕМЕНТАРНИ ФУНКЦИИ

Степенната функция $y = x^\alpha$, показателната функция $y = a^x$ и нейната обратна – логаритмичната функция функция $y = \log_a x$, тригонометричните функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{cotg} x$ и техните обратни функции се наричат *основни елементарни функции*.

Всяка функция, която може да се получи от основните елементарни функции посредством четирите аритметични операции и операцията композиция на функции, се нарича *елементарна функция*.

A. Степенната функция $y = x^\alpha$

В общия случай на произволно реално число α функцията се дефинира само за положителни стойности на x. В някои частни случаи, обаче, степенната функция може да се разглежда в по-широка дефиниционна област.

1. При $\alpha = n$ (n е естествено число) функцията $y = x^n$ е дефинирана върху цялата числова права: $D_f = (-\infty, +\infty)$. В случая на нечетно n ($n = 1, 3, 5, \ldots$) множеството от стойности на функцията е $R_f = (-\infty, +\infty)$, а в случая на четно n ($n = 2, 4, 6, \ldots$) – $R_f = [0, +\infty)$.

Определение. Една Функция $y = f(x)$ се нарича *четна* (*нечетна*), ако за всяко $x \in D_f$ е изпълнено

$$f(-x) = f(x) \qquad (\ f(-x) = -f(x) \ ) \, .$$

Очевидно тези равенства изискват дефиниционната област D_f да е симетрична относно нулата, т. е., ако $x \in D_f$, то и $-x \in D_f$. Графиките на четните функции са симетрични относно ординатната ос Oy, а на нечетните функции – относно координатното начало $O(0, 0)$.

Степенната функция $y = x^n$ е нечетна при нечетно n; поведението на функцията тогава е аналогично на това на кубичната функция ($n = 3$), вж. Фиг. 1. В този случай

$$\lim_{x\to-\infty} x^n = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty\,.$$

При четно n степенната функция $y = x^n$ е четна; поведението ѝ е аналогично на това на квадратната функция ($n = 2$), вж. Фиг. 2. В този случай

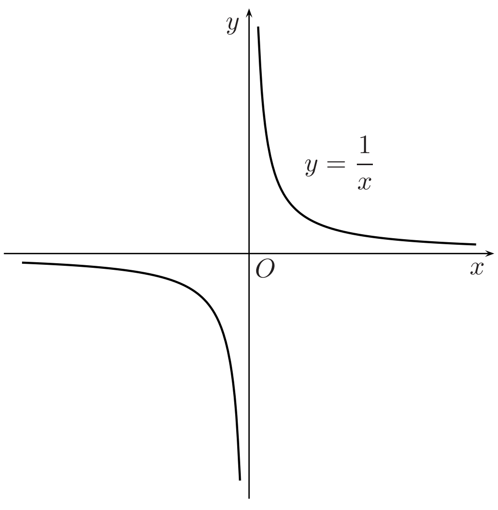
$$\lim_{x\to-\infty} x^n = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty\,.$$

2. При $\alpha = -n$ (n е естествено число) степенната функция се дефинира чрез равенството

$$y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}\,.$$

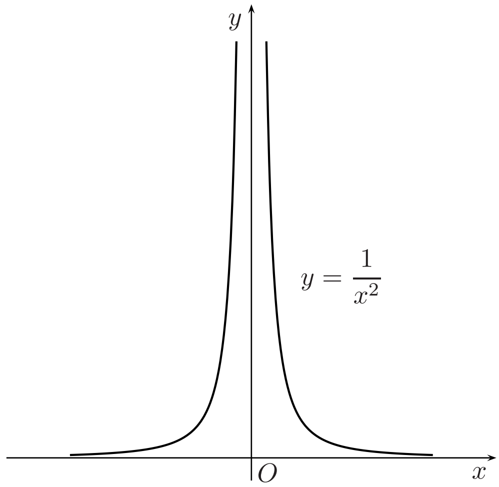
В този случай $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ – от числовата права изключваме нулата. При нечетно n функцията е нечетна, а при четно n – четна. Функцията е безкрайно малка при $x \to -\infty$ и $x \to +\infty$ (т. е. $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0$), и е безкрайно голяма при $x \to 0$. Следователно абсцисната ос Ox е хоризонтална асимптота към графиката на функцията при $x \to -\infty$ и $x \to +\infty$, а ординатната ос Oy е вертикална асимптота. Графиката на функцията при $n = 1$ е дадена на Фиг. 6. Тогава, както и в случая на произволно нечетно n, имаме

$$\lim_{x\to0-0} \frac{1}{x^n} = -\infty, \qquad \lim_{x\to0+0} \frac{1}{x^n} = +\infty\,.$$



Фиг. 6

Графиката на функцията при $n = 2$ е показана на Фиг. 7. Тогава, както и в случая на произволно четно n, имаме $\lim_{x\to0} \frac{1}{x^n} = +\infty\,.$

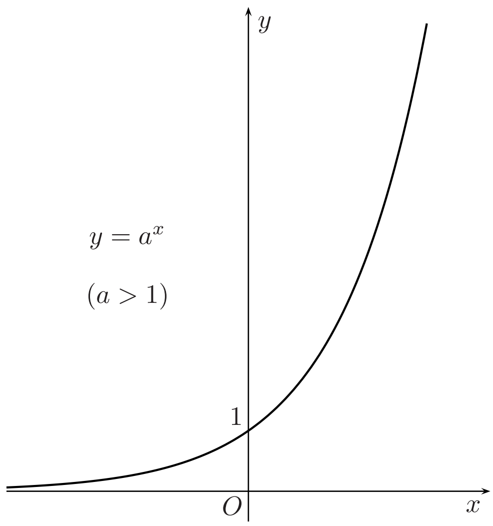


Фиг. 7

3. При $\alpha = \frac{1}{n}$ (n е естествено число) степенната функция $y = g(x) = x^{1/n}$ се дефинира като обратната функция на функцията $y = f(x) = x^n$. Случаят, когато n е нечетно, е напълно аналогичен на вече разгледания случай $n = 3$ (Пример 1, Фиг. 4); тогава $D_g = (-\infty, +\infty)$ и $R_g = (-\infty, +\infty)$. Случаят на произволно четно n е аналогичен на частния случай $n = 2$ (Пример 2, Фиг. 5); тогава $D_g = [0, +\infty)$ и $R_g = [0, +\infty)$. И в двата случая функцията $y = g(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ е строго монотонно растяща и $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty\,.$

В. Показателната функция и нейната обратна – логаритмичната функция

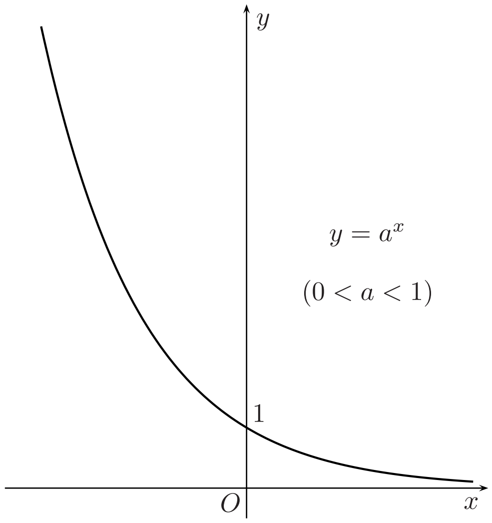
Показателната функция $y = f(x) = a^x$ е дефинирана върху цялата реална права: $D_f = (-\infty, +\infty)$, и приема само положителни стойности: $R_f = (0, +\infty)$. При $a > 1$ функцията е строго монотонно растяща (вж. Фиг. 8) и



Фиг. 8

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty\,.$$

Първата от тези граници означава, че абсцисната ос Ox е хоризонтална асимптота при $x \to -\infty$.

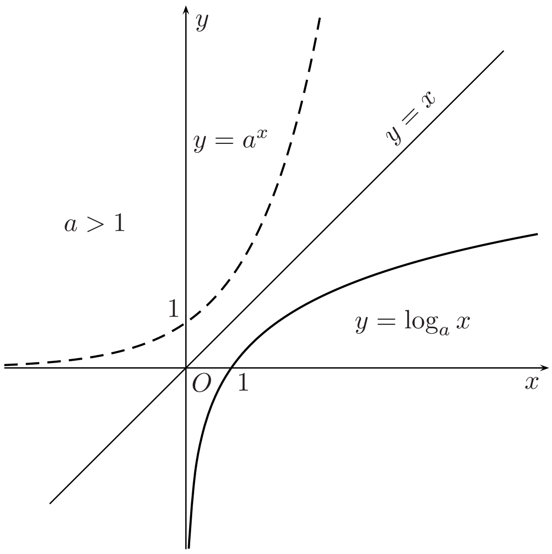


Фиг. 9

При $0 < a < 1$ показателната функция е строго монотонно намаляваща (вж. Фиг. 9) и

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} a^x = 0\,,$$

т. е., абсцисната ос Ox е хоризонтална асимптота при $x \to +\infty$.



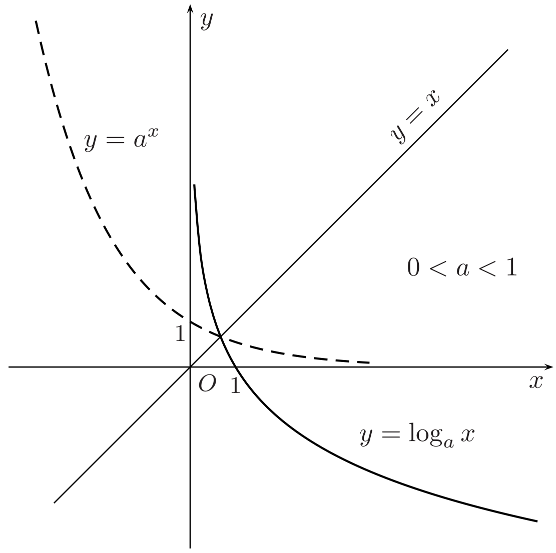
Фиг. 10

Тъй като показателната функция $y = f(x) = a^x$ е строго монотонна в цялата си дефиниционна област, тя е взаимно еднозначна. Обратната ѝ функция е логаритмичната функция $x = g(y) = \log_a y$, която е дефинирана в множеството $D_g = R_f = (0, +\infty)$ и приема всички стойности от числовата права: $R_g = D_f = (-\infty, +\infty)$. Графиката на логаритмичната функция при $a > 1$ е построена на фиг.10 чрез симетрия относно ъглополовящата $y = x$ на графиката на показателната функция. В този случай логаритмичната функция е строго монотонно растяща, както и показателната, и

$$\lim_{x\to0+0} \log_a x = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty\,.$$

Първата от тези граници означава, че ординатната ос Oy е вертикална асимптота.

По аналогичен начин се получава графиката на логаритмичната функция при $0 < a < 1$ (вж. Фиг. 11). Коментирайте поведението ѝ в този случай.



Фиг. 11

За показателната и логаритмичната функции тъждествата (1) и (2) приемат вида

$$\log_a a^x = x \quad \text{за всяко} \quad x \in D_f = (-\infty, +\infty), \qquad (3)$$
$$a^{\log_a y} = y \quad \text{за всяко} \quad y \in D_g = (0, +\infty). \qquad (4)$$

Замествайки в тъждеството (4) y с x^α, получаваме следното представяне на степенната функция:

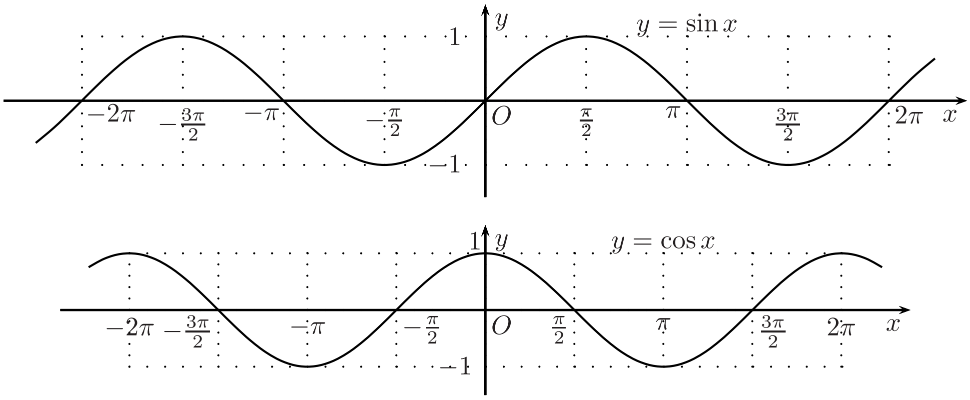
$$x^\alpha = a^{\alpha \log_a x} \quad \text{при} \quad x > 0. \qquad (5)$$

C. Тригонометричните функции и техните обратни функции

Тригонометричните функции са класически примери на периодични функции.

Определение. Една функция $y = f(x)$ се нарича *периодична с период* T, ако за всяко x от дефиниционната област D_f на функцията е изпълнено $f(x + T) = f(x)$.

Лесно се проверява, че ако $f(x)$ е периодична с период T, то числата kT, $k = \pm1, \pm2, \ldots$, са също периоди на функцията. Най-малкият положителен период T се нарича основен период (или само период) на функцията.

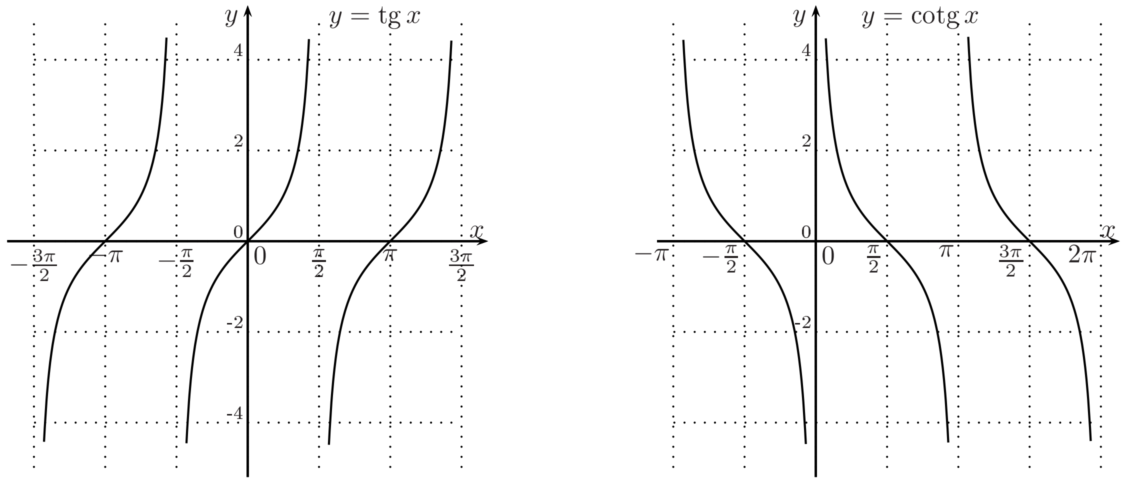


Фиг. 12

Функциите $y = \sin x$ и $y = \cos x$ са дефинирани за всяко $x \in (-\infty, +\infty)$. Графиките на тези функции са дадени на фиг. 12. Функцията $y = \operatorname{tg} x$ не е дефинирана в точките $x = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$, където $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. В околност на тези точки функцията $y = \operatorname{tg} x$ расте неограничено; например, при $x \to \dfrac{\pi}{2}$ имаме

$$\lim_{x \to \pi/2 - 0} \operatorname{tg} x = +\infty, \qquad \lim_{x \to \pi/2 + 0} \operatorname{tg} x = -\infty.$$

Аналогично, функцията $y = \operatorname{cotg} x$ не е дефинирана в точките $x = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Внимателният читател лесно може да напише съответните граници, например, при $x \to 0$. Графиките на функциите $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{cotg} x$ са дадени на фиг. 13.



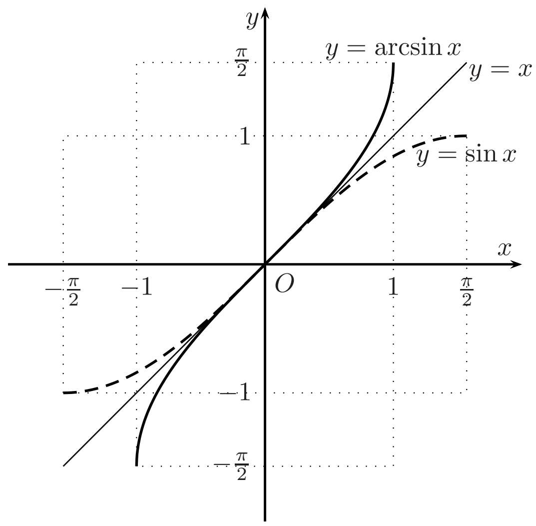
Фиг. 13

Между разглежданите тригонометрични функции съществуват очевидни връзки. В сила са следните зависимости:

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\operatorname{tg} x}.$$

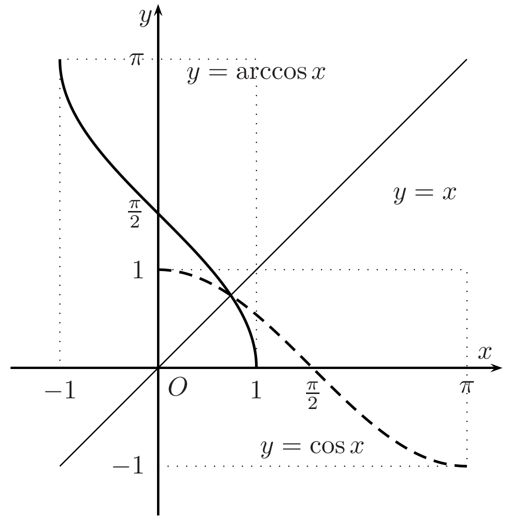
Първото от тези равенства означава, че графиката на функцията $y = \cos x$ се получава от графиката на $y = \sin x$ чрез успоредно пренасяне по абсцисната ос наляво на разстояние $\dfrac{\pi}{2}$. Функциите $y = \sin x$, $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{cotg} x$ са нечетни, а функцията $y = \cos x$ е четна. Лесно се вижда, че функциите $y = \sin x$ и $y = \cos x$ са периодични с основен период $T = 2\pi$, а функциите $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{cotg} x$ са периодични с период $T = \pi$.



Фиг. 14

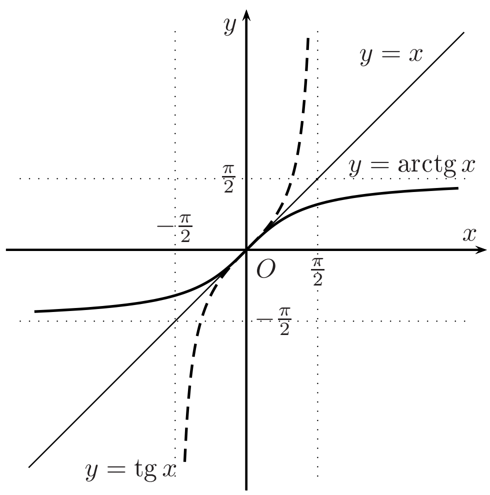
Тъй като тригонометричните функции са периодични, те не са взаимно еднозначни функции. Да разгледаме по-подробно функцията $y = f(x) = \sin x$. Тя не е взаимно еднозначна, защото за всяко фиксирано y, $-1 \le y \le 1$, съществуват повече от едно x (всъщност, безкрайно много), за които да е изпълнено $f(x) = y$, т. е. всяка права $y = y_0$ $(-1 \le y_0 \le 1)$, успоредна на абсцисната ос, пресича графиката на функцията в безбройно много точки. Ето защо, с цел да се освободим от тази нееднозначност, разделяме дефиниционната област на интервали, в които функцията е взаимно еднозначна. Един такъв интервал е интервалът $\widetilde{D}_f = \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ – интервал, в който функцията $f(x) = \sin x$ е строго монотонна растяща. Функцията $y = f(x) = \sin x$, ограничена в този интервал, го изобразява взаимно еднозначно върху интервала $R_f = [-1, 1]$. Обратната ѝ функция $x = g(y)$ изобразява интервала $D_g = R_f = [-1, 1]$ върху интервала $R_g = \widetilde{D}_f = \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Функцията $x = g(y)$ се означава с $x = \arcsin y$ (чете се *аркус синус*). Графиката на $y = \arcsin x$ се получава от графиката на $y = \sin x$ чрез симетрия относно ъглополовящата $y = x$ на първи и трети квадрант, вж. фиг. 14. Тъй като $y = \arcsin x$ и $y = \sin x$ са взаимно обратни функции, за техните композиции е изпълнено

$$\begin{aligned} &\sin(\arcsin x) = x \quad \text{за всяко} \quad x \in [-1, 1], \\ &\arcsin(\sin x) = x \quad \text{за всяко} \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]. \end{aligned} \tag{11.4}$$



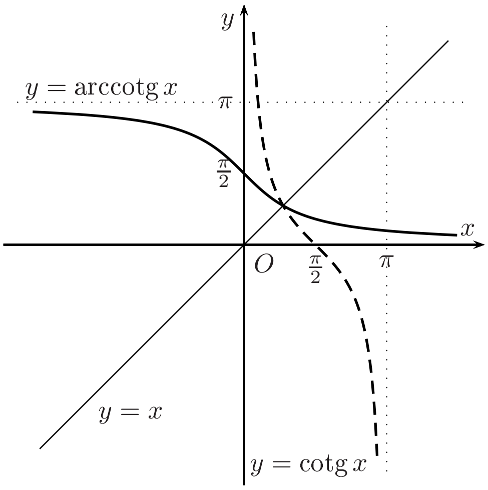
Фиг. 15

Напълно аналогично разглеждаме функцията $y = f(x) = \cos x$, но ограничена върху интервала $[0, \pi]$, където тя е строго монотонно намаляваща. Обратната ѝ функция $x = g(y) = \arccos y$ (чете се *аркус косинус*) е дефинирана в $[-1, 1]$ и приема стойности в $[0, \pi]$. Графиката на $y = \arccos x$ е построена на фиг. 15.



Фиг. 16

По аналогичен начин разглеждаме функцията $y = f(x) = \operatorname{tg} x$ върху интервала $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, в който тя е строго монотонно растяща и го изобразява взаимно еднозначно в интервала $(-\infty, +\infty)$. Обратната ѝ функция $x = g(y) = \operatorname{arctg} y$ (чете се *аркус тангенс*) е дефинирана в $(-\infty, +\infty)$ и приема стойности в $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Графиката на функцията $y = \operatorname{arctg} x$ е построена на фиг. 16.



Фиг. 17

Коментирайте получаването на обратната функция $y = \operatorname{arccotg} x$ на функцията $y = \operatorname{cotg} x$, чиято графика е построена на фиг. 17. Напишете тъждествата (1), (2) и за останалите двойки взаимно обратни функции.