Формули по ЛААГ - Геометрия

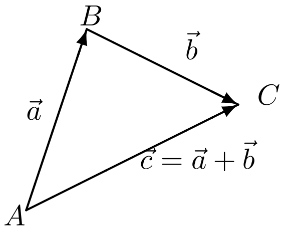
1.Афинни операции с вектори .

1.1 Умножение на вектор с число:
За $\lambda \in \Re$ векторът $\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$ има дължина $|\vec{b}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$ и посока $\vec{b} \upuparrows \vec{a}$ за $\lambda > 0$ и противоположна посока $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$ за $\lambda < 0$.
За $\lambda = -1$ получаваме противоположния вектор

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \quad -\vec{a} = -\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$$

1.2 Събиране на вектори:

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{BC}, \quad \vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$



1.3 Изваждане на вектори:

$$\vec{a} - \vec{c} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$$

2.Координати на вектори и точки.

$A(x_1, y_1, z_1),\ B(x_2, y_2, z_2) \ \Rightarrow\ \overrightarrow{AB}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

$M\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}, \dfrac{z_1 + z_2}{2}\right)$ е среда на отс. AB
$G\left(\dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \dfrac{z_1 + z_2 + z_3}{3}\right)$ е медицентър на $\triangle ABC$.

3.Скаларно произведение.Разстояние между две точки.

Скаларното произведение на два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ е числото $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\angle(\vec{a}, \vec{b})$.
Дължина на вектор: $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}.\vec{a}}$
Векторите са ортгонални $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow\ \vec{a}.\vec{b} = 0$
Ъгъл между вектори: $\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}$
Нека $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ са декартовите координати на векторите $\Rightarrow \vec{a}.\vec{b} = a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3$ и $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$
Разстоянието между точките $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ е равно на $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

4.Векторно произведение на два вектора.Лице на успоредник и триъгълник.

Векторното произведение на два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ е вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ такъв, че $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ е положително ориентирана тройка вектори. Дължината на $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}|.|\vec{b}|. \sin\angle(\vec{a}, \vec{b})$
Нека $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ са декатовите координати на векторите $\Rightarrow$
$\vec{a} \times \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$.

$S_{ABCD} = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}|$ е лице на успоредник $ABCD$
$S_{\triangle ABC} = \dfrac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2}$ е лице на триъгълник $\triangle ABC$

5.Смесено произведение на три вектора. Обем на призма и тетраедър.

Смесеното произведение на три вектора е число равно на $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}).\vec{c} = \vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$.
Обема на призмата определена от векторите $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ е равен на $V_{pr} = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$, а обема на тетраедъра определен от същите вектори е равен на $V_t = \dfrac{|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|}{6}$.

6.Уравнения на права в равнината.

Ако правата g минава през точка $M(x_0, y_0)$ и е колинеарна с вектор $\vec{p}(a, b)$, то *параметричните уравнения* на g са $\begin{cases} x = x_0 + \lambda.a \\ y = y_0 + \lambda.b \end{cases}$, където λ е произв. реално число.

$g : \dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b}$ е *общото уравнение* на правата

$g : y = k.x + b$ е *декартовото уравнение*, където $k = \tan\varphi$ е *ъгловия коефициент* на правата

$g : \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ е *отрезовото уравнение* на правата
Ако $g : Ax + By + C = 0$ е общото уравнение на правата, то векторът $\vec{p}(-B, A) \|\ g$ е колинеарен с нея , а $\vec{N}(A, B) \perp\ g$ е *нормалния* ѝ вектор.
$g : \dfrac{Ax + By + C}{-signC.\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$ е *нормалното уравнение* на правата
$d(M, g) = \left|\dfrac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|$ е *разстоянието* от точка $M(x_0, y_0)$ до g.

7.Уравнения на права и равнина в пространството.

Параметричните уравнения на равнина α която минава през точка $M(x_0, y_0, z_0)$ и е компланарна с векторите $\vec{p}_1(a_1, b_1, c_1)$, $\vec{p}_2(a_2, b_2, c_2)$ са
$\alpha : \begin{cases} x = x_0 + \lambda.a_1 + \mu.a_2 \\ y = y_0 + \lambda.b_1 + \mu.b_2 \\ z = z_0 + \lambda.c_1 + \mu.c_2 \end{cases}$, където $\lambda, \mu \in \Re$
а общото ѝ уравнение се получава от детерминантата
$\alpha : \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$
Ако правата g минава през точка $M(x_0, y_0, z_0)$ и е колинеарна с вектор $\vec{p}(a, b, c)$, то *параметричните уравнения* на g са $\begin{cases} x = x_0 + \lambda.a \\ y = y_0 + \lambda.b \\ z = z_0 + \lambda.c \end{cases}$, където $\lambda \in \Re$

Общото уравнение на равнина $\alpha : \begin{cases} \ni M(x_0, y_0, z_0) \\ \perp \vec{N}(A, B, C) \end{cases}$ е
$\alpha : A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

$\alpha : \dfrac{Ax+By+Cz+D}{-signD.\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = 0$ е *нормалното* ѝ уравнение

$d(M,\alpha) = \left|\dfrac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|$ е *разстоянието* от точка $M(x_0,y_0,z_0)$ до α.

8. Окръжност.

Кривата k с уравнение $x^2+y^2-2ax-2by+n=0$ е окръжност $\Leftrightarrow$ $a^2+b^2-n>0$. Центъра ѝ има координати $P(a,b)$, а радиусът ѝ е $r=\sqrt{a^2+b^2-n}$.
$k:(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ е *каноничното* и уравнение.
Правата $t: ux+vy+w=0$ се допира до окръжността $\Leftrightarrow r=d(P,t)=\left|\dfrac{ua+vb+w}{\sqrt{u^2+v^2}}\right|$.

9. Елипса.

$\epsilon : \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, като $a>b>0$ е канонично уравнение на елипса, с полуоси a и b, върхове $A_{1,2}(\mp a,0)$ и $B_{1,2}(0,\pm b)$, фокуси $F_{1,2}(\mp c,0)$ където $c=\sqrt{a^2-b^2}$, директриси $d_{1,2}: x=\mp\dfrac{a^2}{c}$ и ексцентрицитет $e=\dfrac{c}{a}$.
Когато $b>a$, x и y си разменят местата.
Правата $t: ux+vy+w=0$ се допира до елипсата $\Leftrightarrow a^2u^2+b^2v^2-w^2=0$

10. Хипербола.

$\chi : \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$, като $a,b>0$ е канонично уравнение на хипербола, с реална полуос a и имагинерна полуос b, върхове $A_{1,2}(\mp a,0)$, фокуси $F_{1,2}(\mp c,0)$ където $c=\sqrt{a^2+b^2}$, асимптоти $g_{1,2}: y=\pm\dfrac{b}{a}x$, директриси $d_{1,2}: x=\mp\dfrac{a^2}{c}$ и ексцентрицитет $e=\dfrac{c}{a}$.
Правата $t: ux+vy+w=0$ се допира до хиперболата $\Leftrightarrow a^2u^2-b^2v^2-w^2=0$

11. Парабола.

$\pi : y^2=2px$ е канонично уравнение на парабола с параметър $p>0$, фокус $F(\dfrac{p}{2},0)$ и директриса $d: x=-\dfrac{p}{2}$.
Правата $t: y=kx+n$ се допира до параболата $\Leftrightarrow p=2kn$.

12. Сфера.

Повърхнината $S: x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+n=0$ е сфера $\Leftrightarrow$ $a^2+b^2+c^2-n>0$. Центъра ѝ има координати $P(a,b,c)$, а радиусът ѝ е $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-n}$.
$S:(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ е *каноничното* ѝ уравнение.
Равнината $\alpha : Ax+By+Cz+D=0$ се допира до сферата $\Leftrightarrow R=d(P,\alpha)=\left|\dfrac{Aa+Bb+Cc}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|$.