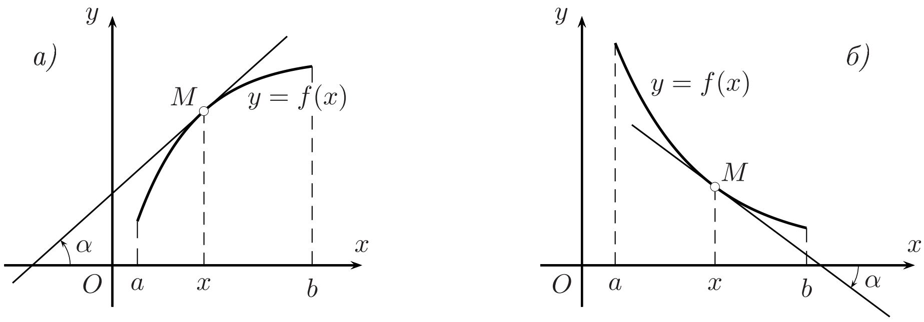
9. Приложение на диференциалното смятане при изследване на функции

Производните на една функция съдържат важна информация за поведението на функцията и "формата" на нейната графика. Елементарни свойства на първата и втората производна изразяват съществени свойства на функцията.

9.1. Изследване на функция за монотонност. Да предположим, че функцията $f(x)$ е диференцируема в интервала (a, b). Тогава графиката на $f(x)$ има допирателна във всяка своя точка $M(x, f(x))$, $x \in (a, b)$ [1]. Допирателните към графиката, показана на фиг. 9.1а), сключват положителен ъгъл α с положителната посока на оста Ox, т. е. $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Това означава, че производната $f'(x)$ на $f(x)$ е положителна в интервала (a, b). (Да си спомним, че $f'(x)$ е равна на ъгловия коефициент $m = \operatorname{tg}\alpha$ на допирателната в точката $M(x, f(x))$, т. е. $f'(x) = \operatorname{tg}\alpha$.) От графиката се вижда, че функцията е строго монотонно растяща в интервала (a, b).



Фиг. 9.1

Аналогично, допирателните към графиката, показана на фиг. 9.1б), сключват отрицателен ъгъл α с положителната посока на оста Ox, т. е. $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$. Това означава, че производната на $f(x)$ е отрицателна в интервала (a, b). От графика се вижда, че функцията е строго монотонно намаляваща в интервала (a, b). Тези наблюдения се потвърждават в следната теорема.

Теорема 9.1 *Нека функцията $f(x)$ е диференцируема в интервала (a, b). Тогава:*

а) Ако $f'(x) > 0$ в (a, b), то $f(x)$ е строго монотонно растяща в интервала (a, b).

б) Функцията $f(x)$ е монотонно растяща в интервала (a, b) тогава и само тогава, когато $f'(x) \geq 0$ в (a, b).

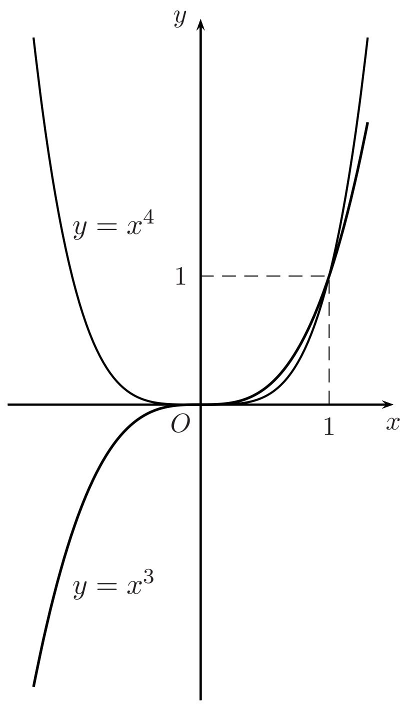
в) Ако $f'(x) < 0$ в (a, b), то $f(x)$ е строго монотонно намаляваща в интервала (a, b).

г) Функцията $f(x)$ е монотонно намаляваща в интервала (a, b) тогава и само тогава, когато $f'(x) \leq 0$ в (a, b).

[1] Под ъгъл α между една права и положителната посока на оста Ox ще разбираме острият ъгъл между правата и положителната посока на Ox, приемайки го за положителен, ако той е отложен в положителна посока (т. е. обратна на часовниковата стрелка) от оста Ox, и отрицателен – в противен случай. Ето защо $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, ако правата не е перпендикулярна на оста Ox.

д) Функцията $f(x)$ е постоянна (константа) в интервала (a,b) тогава и само тогава, когато $f'(x)=0$ в (a,b).

Веднага ще отбележим, че обратните твърдения на твърденията *а)* и *в)* не са верни, т. е. условията $f'(x)>0$ и $f'(x)<0$ в интервала (a,b) са само достатъчни (не са необходими) условия за строга монотонност на функцията $f(x)$ в този интервал. Например, кубичната функция $f(x)=x^3$ е строго растяща в цялата си дефиниционна област – интервала $(-\infty,+\infty)$ (вж. фиг. 9.2), но производната ѝ $f'(x)=3x^2$ не е строго положителна в този интервал, тъй като тя се анулира в точката $x=0$: $f'(0)=0$. Условията за производната $f'(x)$ в твърденията *б)*, *г)* и *д)* са както достатъчни, така и необходими за съответните свойства на функцията $f(x)$.



Фиг. 9.2

Доказателство. С помощта на теоремата на Лагранж можем лесно и елегантно да докажем, че условията за производната $f'(x)$ в теорема 9.1 са достатъчни условия за съответните свойства на функцията $f(x)$ в тази теорема. Наистина, нека x_1 и x_2 са две произволни точки от интервала (a,b). Тъй като функцията $f(x)$ е диференцируема в интервала (a,b) и интервалът $[x_1,x_2]$ (или $[x_2,x_1]$, ако $x_1>x_2$) се съдържа в (a,b), то за $f(x)$ са изпълнени условията на теоремата на Лагранж за този интервал. Следователно съществува точка c, намираща се между точките x_1 и x_2, такава, че

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1). \tag{9.1}$$

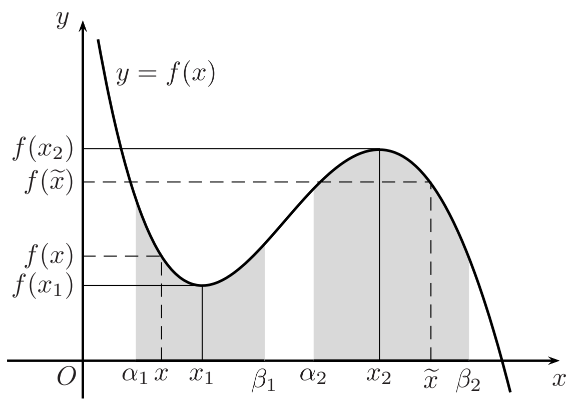
Нека първо предположим, че $x_1<x_2$. Тогава $x_2-x_1>0$. Ако $f'(x)>0$ в (a,b), то $f'(c)>0$, и от равенството (9.1) веднага следва, че $f(x_2)-f(x_1)>0$, или, еквивалентно $f(x_1)<f(x_2)$. Но това означава, че функцията $f(x)$ е строго монотонно растяща в (a,b). Така доказахме твърдението *а)* на теорема 9.1. Аналогично, ако $f'(x)\geq 0$ в (a,b), получаваме, че $f(x_1)\leq f(x_2)$, което означава, че функцията $f(x)$ е монотонно растяща в (a,b). Така доказахме достатъчността на условието $f'(x)\geq 0$ в твърдение *б)*. Върху доказателството на обратното твърдение няма да се спираме. Напълно аналогично се разглеждат и случаите, когато $f'(x)<0$ и $f'(x)\leq 0$ в интервала (a,b).

За да докажем последното твърдение *д)* на теорема 9.1, да фиксираме точката x_1 и да оставим точката x_2 да пробягва интервала (a,b), означавайки я с x, $x_2=x$. Тогава, ако $f'(x)=0$ в (a,b), то $f'(c)=0$, и от равенството (9.1) веднага получаваме, че $f(x)-f(x_1)=0$, т. е. $f(x)=C$ за всяко $x\in(a,b)$, където $C=f(x_1)$ е константа. Обратното твърдение, ако $f(x)=C$ в (a,b), то $f'(x)=0$ в (a,b), вече установихме в тема 6.

9.2. Локални екстремуми на функция. Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в интервала (a,b) и точките x_1 и x_2 са точки от този интервал.

Определение 9.1. *Точката x_1 се нарича точка на локален (или относителен) минимум за функцията $f(x)$, ако може да се намери околност[2] (α_1,β_1) на точката x_1,*

[2]Под околност на една точка се разбира отворен интервал, съдържащ тази точка.



Фиг. 9.3

съдържаща се в (a, b) и такава, че за всяко x от тази околност, различно от x_1, е в сила неравенството

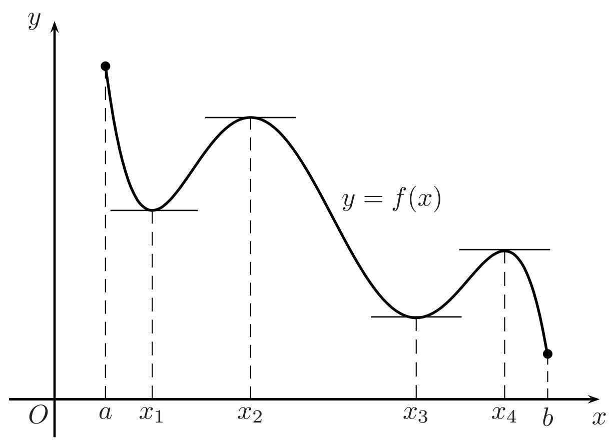
$$f(x) > f(x_1).$$

Аналогично, ако може да се намери околност (α_2, β_2) на точката x_2, съдържаща се в (a, b) и такава, че за всяко x от тази околност, различно от x_2, е в сила неравенството

$$f(x) < f(x_2),$$

то точката x_2 се нарича точка на локален (или относителен) максимум, вж. фиг. 9.3. *Стойността $f(x_1)$ се нарича локален минимум на функцията $f(x)$, а стойността $f(x_2)$ – локален максимум на $f(x)$.*

Точките на локален минимум и максимум за функцията се наричат *точки на локален екстремум*, а стойностите на функцията в тези точки – нейни *локални екстремуми.* Да отбележим, че в общия случай един локален минимум на функция представлява наймалката ѝ стойност *само* в някаква околност на точката на локален минимум, но не и в цялата ѝ дефиниционна област. Аналогична забележка е в сила и за локален максимум на функция. Например, локалният минимум в точката x_1 на функцията $f(x)$, зададена графично на фиг. 9.4, е по-голям от локалният максимум на функцията в точката x_4. Също така, най-голямата стойност (глобалният максимум) на тази функция, разглеждана в затворения интервал $[a, b]$, се достига в края a, а най-малката ѝ стойност (глобалният ѝ минимум) – в края b на интервала $[a, b]$.



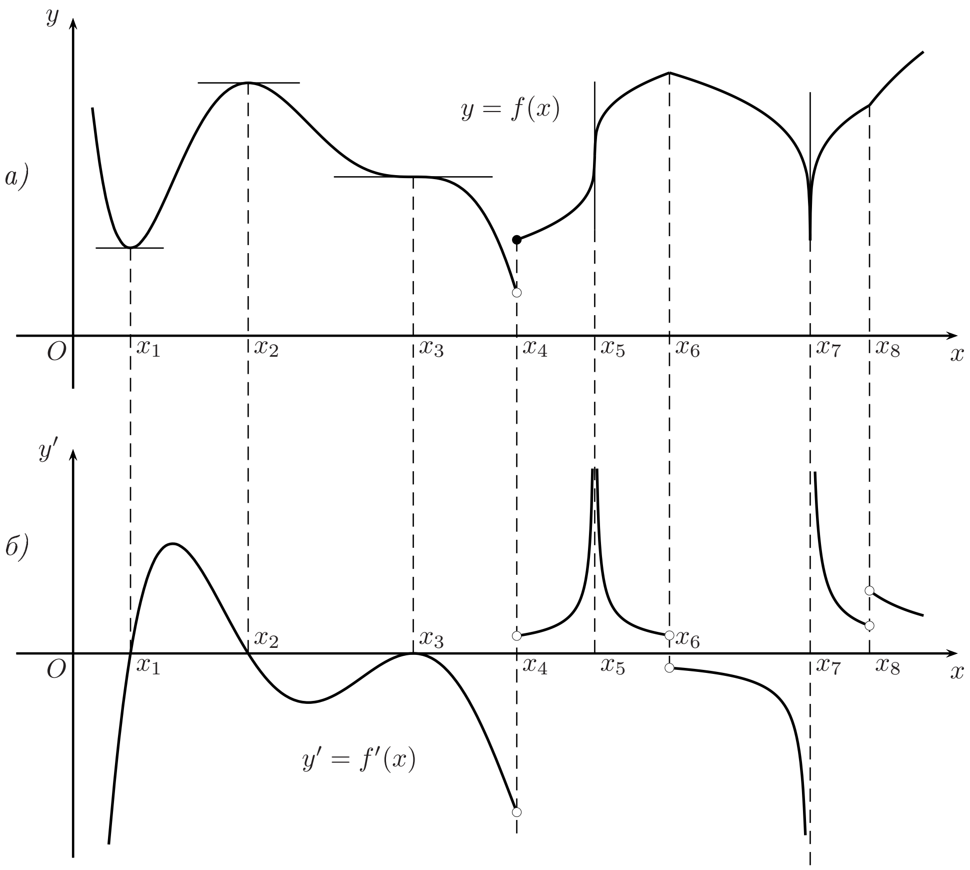
Фиг. 9.4

От фиг. 9.4 се вижда също, че допирателните към графиката на функцията в точките, съответстващи на локални екстремуми на функцията, са успоредни на абсцисната ос Ox. Това означава, че ъгловите им коефициенти са равни на нула, което на свой ред води до заключението, че производната $f'(x)$ се анулира в точките на локален екстремум. Може строго да се докаже, че това визуално установено свойство на производната е вярно, когато тя съществува.

Теорема 9.2. (Необходимо условие за локален екстремум.) *Ако функцията $f(x)$ е диференцируема в точката x_0 и тази точка е точка на локален екстремум за $f(x)$, то $f'(x_0) = 0$.*

Точките, в които първата производна $f'(x)$ се анулира, се наричат *стационарни точки.* Според теорема 9.2 точките на локален екстремум за диференцируема функция са стационарни точки. Не всяка стационарна точка, обаче, е точка на локален екстремум, т. е. условието $f'(x_0) = 0$

е само необходимо, но не и достатъчно условие точката x_0 да е точка на локален екстремум за функцията. Например, точката $x_0 = 0$ е стационарна точка за кубичната функция $f(x) = x^3$, но тя не е точка на локален екстремум, вж. фиг. 9.2. Такава стационарна точка се нарича *неутрална*.



Фиг. 9.5

Някои точки, в които функцията не е диференцируема, може също да са точки на локален екстремум. Например, за функцията $f(x)$, зададена графично на фиг. 9.5а), точките x_6 и x_7 са точки на локален екстремум, макар че $f(x)$ не е диференцируема в тези точки. Стационарните точки и точките, в които функцията не е диференцируема, се наричат *критични точки* или точки на възможен екстремум. Всички точки, означени на фиг. 9.5а), са критични точки, първите три от които (x_1, x_2 и x_3) са стационарни. Лесно се вижда, че ако функцията $f(x)$ е строго монотонно намаляваща в достатъчно малка лява "полуоколност" (α, x_0) на стационарна точка x_0 и е строго монотонно растяща в достатъчно малка дясна "полуоколност" (x_0, β) на тази точка, или обратно, то точката x_0 е точка на локален екстремум. Такива са точките x_1 и x_2. Същото твърдение е вярно и за точките, в които функцията не е диференцируема, но при условие, че тя е непрекъсната в тези точки. Такива са точките x_6 и x_7. Условието за непрекъснатост е съществено. Например, при преминаване през точката x_4 монотонността на функцията $f(x)$ се променя, но тя е прекъсната в тази точка. Вижда се, че тя не е точка на локален екстремум. При преминаването през неутралната стационарна точка x_3 и точките x_5 и x_8 монотонността на функцията $f(x)$ не се променя. Те не са точки на локален екстремум. Да отбележим, че $f(x)$ не е диференцируема в точките x_5 и x_8, но е непрекъсната в тези точки. (По-точно, в точката x_5 функцията има безкрайна производна, $f'(x_5) = +\infty$.)

Позовавайки се на приведените по-горе аргументи и достатъчните условия за строга монотонност на функция (твърдения *а)* и *в)* на теорема 9.1), можем лесно да достигнем до следното достатъчно условие за съществуване на локален екстремум на функция в дадена точка.

Теорема 9.3. (Първо достатъчно условие за локален екстремум.) *Нека функцията $f(x)$ е диференцируема в околност (α, β) на точката x_0 с изключение евентуално на самата точка x_0, но в която функцията $f(x)$ е непрекъсната. Тогава:*

1. *Ако при преминаваме през точката x_0 първата производна $f'(x)$ сменя знака си, то точката x_0 е точка на локален екстремум; при това,*

   а) ако $f'(x) < 0$ в интервала (α, x_0) и $f'(x) > 0$ в интервала (x_0, β), то точката x_0 е точка на локален минимум,

   б) ако $f'(x) > 0$ в интервала (α, x_0) и $f'(x) < 0$ в интервала (x_0, β), то точката x_0 е точка на локален максимум.

2. *Ако при преминаваме през точката x_0 първата производна $f'(x)$ не сменя знака си, то точката x_0 не е точка на локален екстремум.*

На фиг. 9.5б) е дадена графиката на производната $f'(x)$ на функцията $f(x)$ от фиг. 9.5а). Вижда се, че видът на критичните точки (без точката x_4, в която $f(x)$ е прекъсната) съответства на изменението на знака на $f'(x)$ около тези точки в съгласие с теорема 9.3.

Понякога определянето на знака на производната $f'(x)$ около критична точка x_0 е свързано с технически трудности. Ако критичната точка е стационарна, т. е. $f'(x_0) = 0$, можем да проверим дали са изпълнени условията на следната теорема.

Теорема 9.4. (Второ достатъчно условие за локален екстремум.) *Нека функцията $f(x)$ има втора производна в стационарната точка x_0. Тогава:*

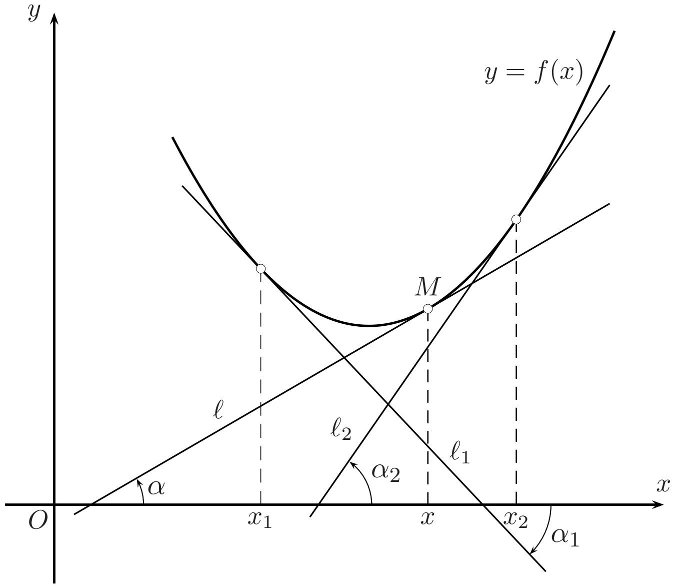
а) Ако $f''(x_0) > 0$, то точката x_0 е точка на локален минимум.

б) Ако $f''(x_0) < 0$, то точката x_0 е точка на локален максимум.

Да отбележим, че теорема 9.4 не дава отговор на въпроса за съществуване на локален екстремум в случая, когато се окаже, че $f''(x_0) = 0$. Например, за кубичната функция $f(x) = x^3$ имаме $f''(x) = 6x$ и, в частност, $f''(0) = 0$. Както вече отбелязахме, стационарната точка $x_0 = 0$ не е точка на локален екстремум за $f(x)$. Аналогично, за функцията $g(x) = x^4$ имаме $g'(x) = 4x^3$, $g''(x) = 12x^2$ и, в частност, $g'(0) = 0$ и $g''(0) = 0$. Точката $x_0 = 0$ е стационарна и за функцията $g(x)$, но в тази точка тя има локален минимум, вж. фиг. 9.2. Изследването за локален екстремум може да бъде продължено чрез разглеждане на производни от трети и по-висок ред в случая, когато $f''(x_0) = 0$ за стационарна точка x_0. Върху такова разглеждане тук няма да се спираме.

9.3. Изпъкналост и вдлъбнатост на функция. Инфлексни точки. Нека функцията $f(x)$ е диференцируема в интервала (a, b). Тогава графиката на $f(x)$ има допирателна, неперпендикулярна на оста Ox, във всяка своя точка $M(x, f(x))$ при $x \in (a, b)$.

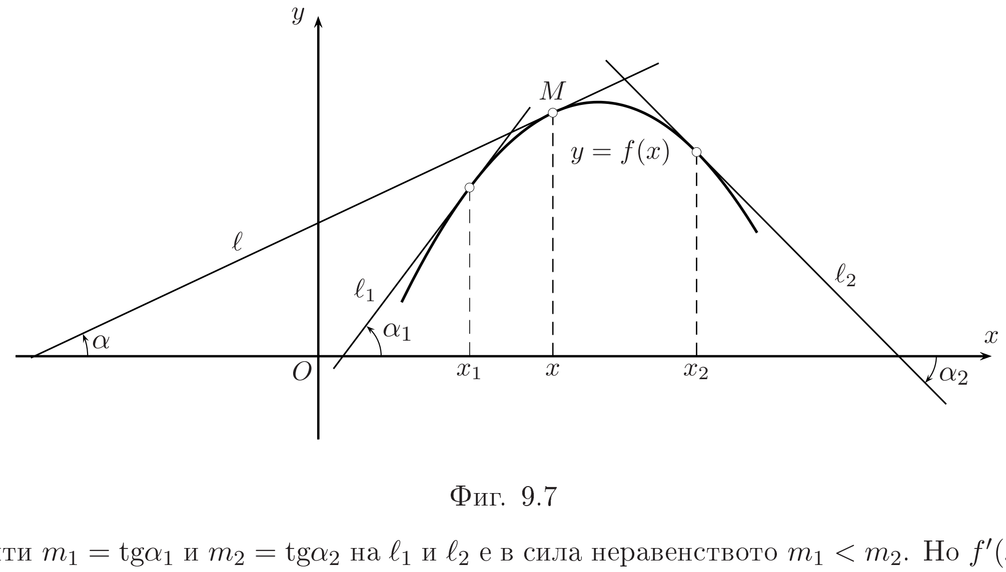
Определение 9.2. *Функцията $f(x)$ се нарича изпъкнала* (изпъкнала отдолу или вдлъбната отгоре) *в интервала (a, b), ако графиката и в този интервал се намира над всяка своя допирателна,* вж. фиг. (9.6). *Аналогично, ако тази графика се намира под всяка своя допирателна,*



Фиг. 9.6

функцията $f(x)$ се нарича вдлъбната (изпъкнала отгоре или вдлъбната надолу) *в интервала* (a,b), вж. фиг. (9.7). И в двата случая ще предполагаме, че на допирателната в произволна точка $M(x, f(x))$ лежи единствено[3] самата точка $M(x, f(x))$ от графиката на функцията, $x \in (a,b)$.

Нека x_1 и x_2 са две произволни точки от интервала (a,b), за които $x_1 < x_2$, и нека α_1 и α_2 са съответните ъгли, които допирателните ℓ_1 и ℓ_2 в точките $M_1(x_1, f(x_1))$ и $M_2(x_2, f(x_2))$ сключват с положителната посока на оста Ox. Забелязваме, че в случая на изпъкнала функция (фиг. 9.6) допирателната ℓ към графиката ѝ в точката $M(x, f(x))$ се завърта в посока обратна на часовниковата стрелка при движението на точката отляво надясно, т. е. при нарастването на x. Това означава, че ъгълът α, който допирателната ℓ сключва с положителната посока на оста Ox, е строго монотонно растяща функция на x. Следователно $\alpha_1 < \alpha_2$. Тъй като функцията $m = \operatorname{tg}\alpha$ е строго монотонно растяща в интервала $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, то за ъгловите



Фиг. 9.7

коефициенти $m_1 = \operatorname{tg}\alpha_1$ и $m_2 = \operatorname{tg}\alpha_2$ на ℓ_1 и ℓ_2 е в сила неравенството $m_1 < m_2$. Но $f'(x_1) = m_1$ и

[3]Понякога в литературата това условие не се изисква, т. е. допуска се точки (повече от една) от графиката на $f(x)$ да лежат на допирателна към нея. В такъв случай графиката на $f(x)$ може да има праволинейни участъци. При нашето предположение функцията се нарича още строго (или истински) изпъкнала и съответно строго (или истински) вдлъбната.

$f'(x_2) = m_2$. Следователно $f'(x_1) < f'(x_2)$, т. е. производната $f'(x)$ е строго монотонно растяща функция в интервала (a, b). Аналогично, в случая на вдлъбната функция (фиг. 9.7) допирателната ℓ към графиката на функцията в точката $M(x, f(x))$ се завърта в посока на часовниковата стрелка при нарастването на x, което означава, че ъгълът α е строго монотонно растяща функция на x, т. е. $\alpha_1 > \alpha_2$. Оттук заключаваме, че $f'(x_1) > f'(x_2)$, т. е. производната $f'(x)$ е също строго монотонно намаляваща функция в интервала (a, b). Може строго да се докаже, че определение 9.2 може да се преформулира в следната еквивалентна форма.

Определение 9.2*. *Нека функцията $f(x)$ е диференцируема в интервала (a, b). Тя се нарича изпъкнала в интервала (a, b), ако производната и $f'(x)$ е строго монотонно растяща функция в този интервал. Аналогично, функцията $f(x)$ се нарича вдлъбната в интервала (a, b), ако там $f'(x)$ е строго монотонно намаляваща функция.*

Съгласно това определение изследването на една функция $f(x)$ за изпъкналост и вдлъбнатост се свежда до изследването за строга монотонност на първата и производна $f'(x)$ – скоростта на изменение на функцията $f(x)$. Съгласно твърдения *а)* и *в)* на теорема 9.1 за това изследване е достатъчно да изследваме знака на производната на $f'(x)$, т. е. втората производна $f''(x) = [f'(x)]'$ на $f(x)$, представляваща скоростта на изменение на скоростта $f'(x)$ – ускорението на изменение на функцията $f(x)$. Да формулираме съответния резултат.

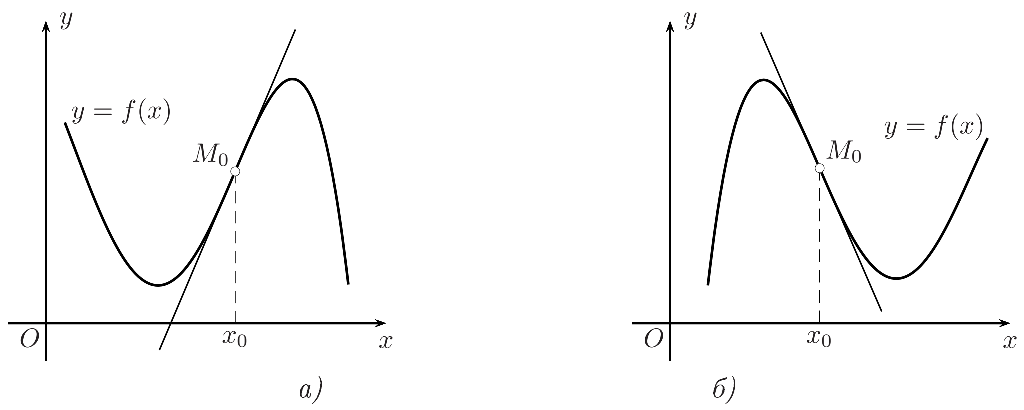
Теорема 9.5. *Нека функцията $f(x)$ е два пъти диференцируема в интервала (a, b). Тогава:*

а) Ако $f''(x) > 0$ в (a, b), то $f(x)$ е изпъкнала в интервала (a, b).

б) Ако $f''(x) < 0$ в (a, b), то $f(x)$ е вдлъбната в интервала (a, b).

Както следва да очакваме, тази теорема дава само достатъчни условия за изпъкналост и вдлъбнатост на функция. Например функцията $g(x) = x^4$ е изпъкнала в интервала $(-\infty, +\infty)$ (вж. фиг. 9.2), но $g'(x) = 4x^3$, $g''(x) = 12x^2$ и, в частност, $g''(0) = 0$, т. е. можем само да твърдим, че $g''(x) \geq 0$ в $(-\infty, +\infty)$.

Определение 9.3. *Точката x_0 от интервала (a, b) се нарича инфлексна точка за функцията $f(x)$, ако при преминаването през която изпъкналостта на функцията се сменя с вдлъбнатост или обратно. Съответната точка $M_0(x_0, f(x_0))$ се нарича инфлексна точка на графиката на функцията $f(x)$*, вж. фиг. 9.8.



Фиг. 9.8

Веднага се вижда, че графиката на $f(x)$ се разделя от допирателната в точката M_0 на две части, разположени от двете страни на тази допирателна. Тъй като отляво на инфлексна точка

x_0 и достатъчно близо до нея първата производна $f'(x)$ е строго монотонно растяща (при изпъкналост), а отдясно на x_0 – строго монотонно намаляваща (при вдлъбнатост), или обратно, то точката x_0 е точка на локален екстремум на производната $f'(x)$. Ето защо можем лесно да пренесем резултатите от т. 9.2 за инфлексните точки. В частност, след лека модификация на теорема 9.3 ще получим следното достатъчно условие за инфлексия в точката x_0.

Теорема 9.6. *Нека функцията $f(x)$ е два пъти диференцируема в околност (α, β) на точката x_0 с изключение евентуално на самата точка x_0, но графиката на функцията има допирателна в точката $M_0(x_0, f(x_0))$. Тогава:*

а) Ако при преминаване през точката x_0 втората производна $f''(x)$ сменя знака си, то точката x_0 е инфлексна точка за $f(x)$.

б) Ако при преминаване през точката x_0 втората производна $f''(x)$ не сменя знака си, то точката x_0 не е инфлексна точка за $f(x)$.

Най-простият пример на функция с инфлексна точка е кубичната функция $f(x) = x^3$. За втората и производна $f''(x) = 6x$ имаме $f''(x) < 0$ в интервала $(-\infty, 0)$ и $f''(x) > 0$ в интервала $(0, +\infty)$. Следователно кубичната функция е вдлъбната в интервала $(-\infty, 0)$ и е изпъкнала в интервала $(0, +\infty)$. При преминаването през точката $x_0 = 0$ втората производна $f''(x)$ сменя знака си, откъдето формално следва, че тази точка е инфлексна точка за функцията, вж. фиг. 9.2.