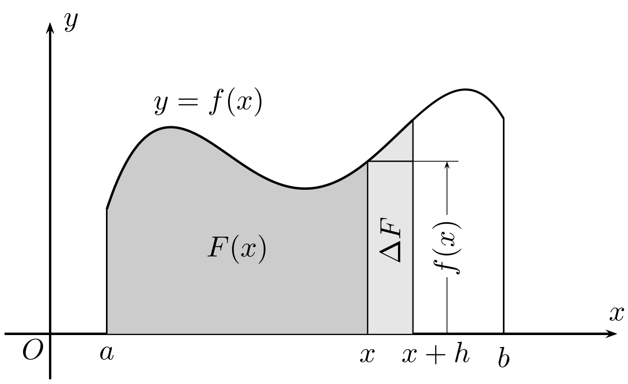
14. Формула на Лайбниц-Нютон. Методи за пресмятане на определени интеграли. Някои геометрични приложения на определения интеграл

14.1. Основна теорема на интегралното смятане.

14.1.1. Интеграл с променлива горна граница. Нека функцията $f(x)$ е интегруема в интервала $[a, b]$. Тогава тя е интегруема във всеки интервал $[a, x]$, съдържащ се в $[a, b]$, т. е. при $a \leq x \leq b$. Ето защо в интервала $[a, b]$ може да се определи функцията



Фиг. 14.1

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \tag{1}$$

(Тъй като x е променливата горна граница, сега интеграционната променлива сме означили с t.)

Функцията $F(x)$ има проста геометрична интерпретация: ако $f(x) \geq 0$ в интервала $[a, b]$, тя описва изменението на лицето на криволинейния трапец, показан в тъмен цвят на фиг. 14.1, когато точката x се движи в този интервал. Да намерим скоростта на това изменение, т. е. на производната $F'(x)$.

Нека $\Delta x = h$ е нарастване на x. Съгласно определението (1) съответното нарастване ΔF на функцията F е

$$\Delta F = F(x + h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t \tag{2}$$

и геометрично се представя от лицето на криволинейния трапец, показан в светъл цвят на фиг. 4.1. Вижда се, че когато h е много малко, т. е. $|h| \ll 1$, и функцията $f(x)$ е непрекъсната [1], лицето на този криволинеен трапец може да се замени с лицето на правоъгълника с височина $f(x)$ и основа h, т. е.

$$\Delta F \approx f(x)\,h \qquad \text{при} \quad |h| \ll 1\,.$$

При това, когато h става все по-малко, това приближение става все по-точно. (Това заключение следва формално и от (2), ако приемем, че $f(t) \approx f(x)$ при $t \in [x, x + h]$.) Тогава

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{\Delta F}{h} \approx f(x) \qquad \text{при} \quad |h| \ll 1\,,$$

което става точно равенство при $\Delta x = h \to 0$, т. е.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = f(x)\,.$$

[1] Това означава, да напомним, че стойностите на $f(x)$ се изменят плавно, без скокове, при изменението на x.

Но тази граница представлява точно производната $F'(x)$ на функцията $F(x)$. Така достигнахме до следната теорема, наречена *основна теорема на интегралното смятане* .

Теорема 14.1. *Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[a, b]$, то функцията $F(x)$, дефинирана с (1), е диференцируема в (a, b) и*

$$F'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = f(x)\,. \tag{3}$$

14.1.2. Формула на Лайбниц-Нютон. По същество равенството (3) означава, че функцията $F(x)$ е една примитивна на функцията $f(x)$. Следователно *всяка непрекъсната функция $f(x)$ има примитивна – интегралът с променлива горна граница (1) е такава функция.*

Както вече знаем, всяка друга примитивна $\Phi(x)$ на $f(x)$ се получава от дадена нейна примитивна $F(x)$ чрез прибавяне на константа C, т. е. $\Phi(x) = F(x) + C$. В частност, ако $F(x)$ е интегралът (1), имаме

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + C\,. \tag{4}$$

Но полагайки в това равенство $x = a$, ще определим веднага константата C:

$$\Phi(a) = \int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t + C = 0 + C = C\,,$$

т. е. $C = \Phi(a)$. Тогава равенството (4) може да се запише във вида

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \Phi(x) - \Phi(a)\,. \tag{5}$$

Полагайки сега в последното равенство $x = b$, достигаме до следната важна теорема.

Теорема 14.2. *Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[a, b]$ и $\Phi(x)$ е коя да е примитивна на f в този интервал, то е в сила формулата*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Phi(b) - \Phi(a)\,. \tag{6}$$

Тази формула показва, че определеният интеграл от функцията $f(x)$ в интервала $[a, b]$ е равен на глобалното нарастване $\Phi(b) - \Phi(a)$ в този интервал на примитивна Φ на функцията f. Прието е това нарастване да се означава символично така

$$\Phi(b) - \Phi(a) = \Phi(x)\Big|_a^b\,. \tag{7}$$

Формулата (6) се нарича *формула на Лайбниц-Нютон.* Тъй като намирането на примитивна Φ е въпрос на решаването на неопределения интеграл от функцията f, формулата на Лайбниц-Нютон свежда пресмятането на определения интеграл от една функция до намирането на неопределения интеграл от същата функция.

14.2. Методи за пресмятане на определени интеграли. Предвид на току-що казананото по-горе, основните методи за пресмятане на определени интеграли са аналогични на тези за неопределени интеграли.

14.2.1. Непосредствено приложение на формулата на Лайбниц-Нютон.

Примери:

$$1. \quad \int_0^{\pi/2} \cos x \, \mathrm{d}x = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1 \ .$$

$$2. \quad \int_1^e \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln x \Big|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1 \ .$$

$$3. \quad \int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x \Big|_{-1}^1 = \arctan 1 - \arctan(-1) = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} \ .$$

14.2.2. Интегриране чрез смяна на променливата. Този метод се основава на следната теорема.

Теорема 14.3. *Нека функцията $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[a,b]$, а функцията $x = \varphi(t)$ има непрекъсната производна в интервала $[\alpha, \beta]$,*

$$\varphi(\alpha) = a \, , \quad \varphi(\beta) = b$$

и $\varphi(t) \in [a,b]$ при $t \in [\alpha, \beta]$. Тогава е в сила формулата

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f\left(\varphi(t)\right) \varphi'(t) \, \mathrm{d}t \ . \tag{8}$$

Пример. Да пресметнем интеграла $\int_0^3 x\sqrt{1+x} \, \mathrm{d}x$.

Полагаме $1 + x = t^2$, т. е. $x = t^2 - 1$, откъдето $\mathrm{d}x = 2t \, \mathrm{d}t$. Приемайки, че $t \geq 0$, имаме $t = \sqrt{1+x}$ и, полагайки тук $x = 0$ и $x = 3$, получаваме съответно $\alpha = 1$ и $\beta = 2$. Следователно

$$\begin{aligned} \int_0^3 x\sqrt{1+x} \, \mathrm{d}x &= \int_1^2 (t^2-1)t \, 2t \, \mathrm{d}t = 2\int_1^2 (t^4 - t^2) \, \mathrm{d}t = 2 \left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_1^2 \\ &= 2 \left[\left(\frac{32}{5} - \frac{8}{3} \right) - \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3} \right) \right] = 2 \left(\frac{31}{5} - \frac{7}{3} \right) = \frac{116}{15} \ . \end{aligned}$$

14.2.3. Интегриране по части. Този метод се основава на следната теорема.

Теорема 14.4. *Ако функциите $u(x)$ и $v(x)$ имат непрекъснати производни в интервала $[a,b]$, то в сила е формулата*

$$\int_a^b u(x)v'(x) \, \mathrm{d}x = u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) \, \mathrm{d}x \, , \tag{9}$$

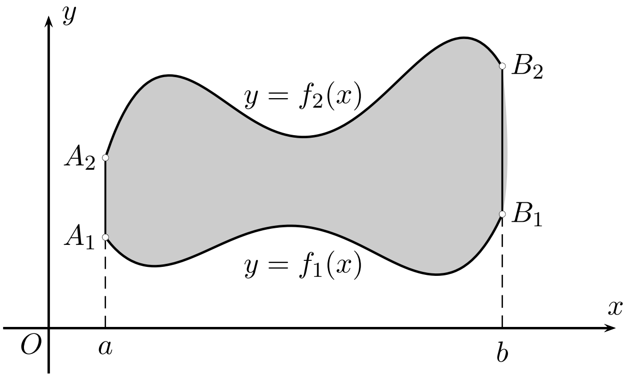
Тази формула се нарича *формула за интегриране по части.*

Пример:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi x \cos x \, \mathrm{d}x &= \int_0^\pi x \, \mathrm{d} \sin x = x \sin x \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin x \, \mathrm{d}x \\ &= \pi \, \sin \pi - 0 \, \sin 0 - (-\cos x) \Big|_0^\pi = 0 - 0 + (\cos \pi - \cos 0) = -1 - 1 = -2 \ . \end{aligned}$$

14.3. Някои геометрични приложения на определения интеграл.

14.3.1. Лице на равнинна фигура. Да разгледаме фигурата $A_1B_1B_2A_2$, ограничена от графиките на функциите $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, разглеждани в интервала $[a, b]$, и вертикалните прави $x = a$ и $x = b$, вж. фиг. 14.2. Естествено, предполагаме, че $f_1(x) \le f_2(x)$ за всяко $x \in [a, b]$, което осигурява непресичане на графиките на тези функции. Очевидно лицето S на тази фигура представлява разликата от лицата на криволинейните трапеци abB_2A_2 и abB_1A_1. Ето защо



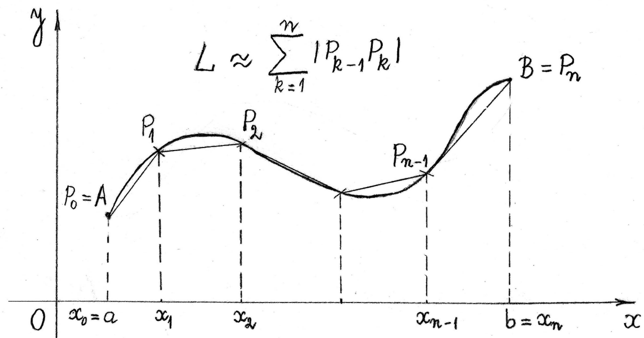
Фиг. 14.2

$$S = \int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

т. е.

$$S = \int_a^b [\,f_2(x) - f_1(x)]\,\mathrm{d}x\,. \qquad (10)$$

14.3.2. Дължина на равнинна крива. Нека кривата $\widehat{AB}$ е графиката на функцията $y = f(x)$, разглеждана в интервала $[a, b]$, вж. Фиг. 3. Оказва се, че ако функцията $y = f(x)$ има непрекъсната производна в интервала $[a, b]$, то за дължината L на кривата $\widehat{AB}$ е в сила формулата

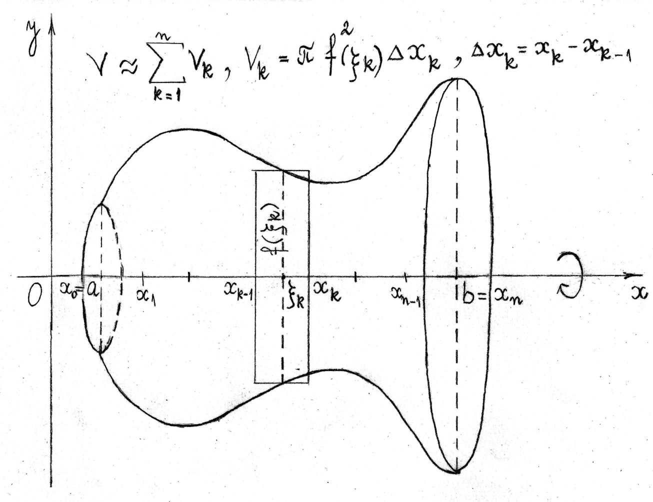


фиг. 3

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\,\mathrm{d}x\,. \qquad (11)$$

Основната идея за извеждане на тази формула се състои в заменяне на кривата $\widehat{AB}$ с начупена линия, чиито участъци са отсечки с безкрайно малки дължини, т. е. с дължини, клонящи към нула.

14.3.3. Обем на ротационно тяло и лице на ротационна повърхнина. Нека кривата $\widehat{AB}$ е графиката на функцията $y = f(x)$, разглеждана в интервала $[a, b]$, а $abBA$ е съответният ѝ криволинеен трапец. Ако завъртим тази крива и този криволинеен трапец около абцисната ос Ox, ще се опишат съответно една повърхнина и едно тяло, наречени ротациионни, вж. Фиг. 4.



фиг. 4

Може да се докаже, че обемът V на ротационното тяло се дава сформулата

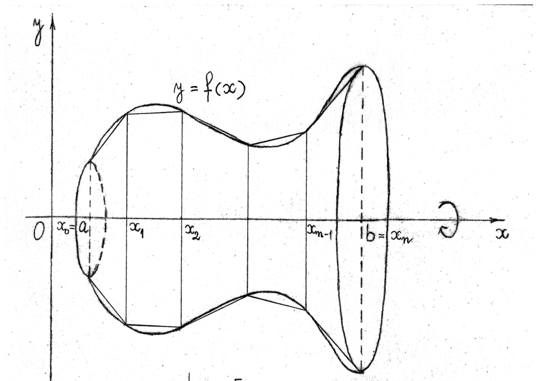
$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\,, \qquad (12)$$

основната идея за извод на която се състои в заменянето на тялото със система от безкрайно тънки кръгови цилиндри с ос на симетрия оста Ox, вж. Фиг. 4.

Аналогично, заменяйки ротационната повърхнина със система от безкрайно тънки конични повърхнини, се достига до следната формула за нейното лице:

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\,\mathrm{d}x\,, \tag{13}$$

ако функцията $y = f(x)$ има непрекъсната производна в интервала $[a, b]$, вж. Фиг. 5.



фиг. 5