6. Несобствени интеграли. Критерии за сравнение

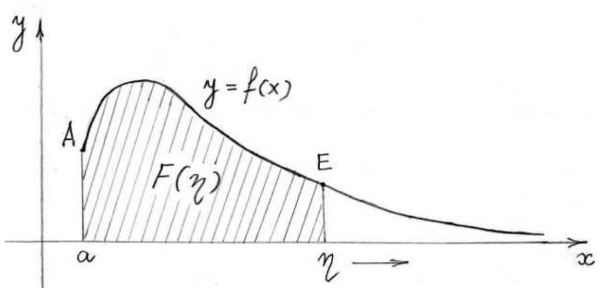
При въвеждането на определения интеграл на Риман предполагахме, че интервалът на интегриране $[a, b]$ е краен. Оказва се, че в определени случаи понятието определен интеграл може да се разшири и за неограничен интервал на интегриране, например интервала $[a, +\infty)$. Всяка функция $f(x)$, която е интегруема в смисъла на Риман, е ограничена. Оказва се също, че в определени случаи понятието определен интеграл може да се разшири и за функции $f(x)$, които са неограничени в околност на някоя точка от интервала на интегриране, например точката $x = b$, когато разглеждаме функции, дефинирани в интервал $[a, b)$. Интегралите, които се получават при тези обобщения, се наричат несобствени.

6.1. Несобствени интеграли с безкрайни интеграционни граници (несобствени интеграли от първи род)

Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в интервала $[a, +\infty)$ и е интегруема във всеки краен интервал $[a, \eta]$ при $\eta \geq a$, т.е. функцията

$$F(\eta) = \int_a^\eta f(x)\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

е дефинирана в интервала $[a, +\infty)$, вж. фиг. 1. При $f(x) \geq 0$ в интервала $[a, +\infty)$ функцията $F(\eta)$ изразява изменението на лицето на криволинейния трапец $a\eta EA$, когато η се изменя в този интервал.



Фиг. 1

Определение 1. *Ако съществува крайна граница на функцията $F(\eta)$ при $\eta \to +\infty$, тя се нарича несобствен интеграл от първи род от функцията $f(x)$ и се означава със символа*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\,, \tag{2}$$

т.е.

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\eta\to+\infty} F(\eta) = \lim_{\eta\to+\infty} \int_a^\eta f(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{3}$$

Символът (2) се използва и когато границата (3) не съществува (в смисъл на крайна граница) и се нарича също несобствен интеграл. В случая, когато тази граница съществува, несобственият интеграл (2) се нарича *сходящ* със стойност, равна на тази граница, а когато тя не съществува, интегралът (2) се нарича *разсходящ*.

Вижда се, че при $f(x) \geq 0$ в интервала $[a, +\infty)$ границата на функцията $F(\eta)$ при $\eta \to +\infty$ може да се приеме за лице на неограничената фигура G, ограничена от графиката на функцията $y = f(x)$, абсцисната ос Ox и вертикалната права $x = a$, т.е.

$$G = \big\{M(x, y) | a \leq x \leq +\infty,\, 0 \leq y \leq f(x)\big\}\,.$$

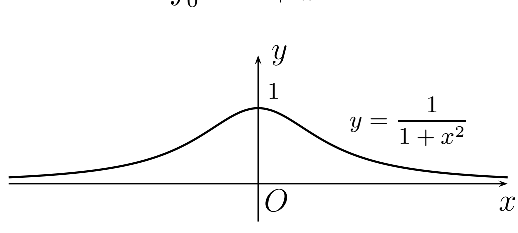
Следователно сходимостта на несобствения интеграл (2) геометрически означава, че неограничената фигура G има крайно лице S_G, равно на стойността на този интеграл:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = S_G\,.$$

Разсходимостта на интеграла (2) означава, че това лице не е крайно: $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = +\infty$.

Пример 1. Да разгледаме интеграла

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^2}\,.$$



Фиг. 2

За този интеграл

$$F(\eta) = \int_0^\eta \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_0^\eta = \operatorname{arctg}\eta - \operatorname{arctg} 0$$

и, тъй като съществува границата

$$\lim_{\eta\to+\infty} F(\eta) = \lim_{\eta\to+\infty} (\operatorname{arctg}\eta - \operatorname{arctg} 0)$$

$$= \lim_{\eta\to+\infty} \operatorname{arctg}\eta = \frac{\pi}{2}\,,$$

то този несобствен интеграл е сходящ и има стойност $\frac{\pi}{2}$:

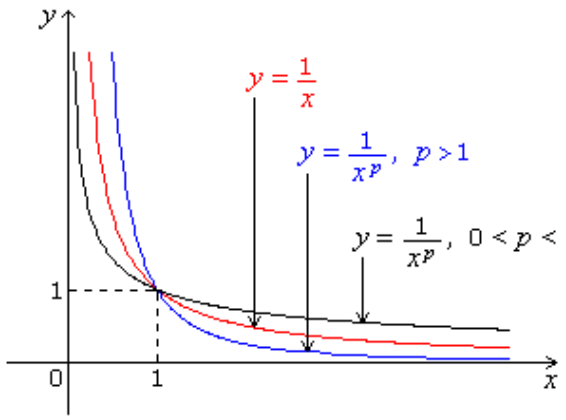
$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\eta\to+\infty} \int_a^\eta \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}\,, \qquad (4)$$

която е равна на лицето на частта от неограничената фигура на фиг. 2, намираща се надясно от ординатната ос Oy.

Пример 2. Да покажем, че

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} \quad \text{е} \quad \begin{cases} \text{сходящ при } p > 1, \\ \text{разсходящ при } p \le 1, \end{cases}$$

където a е положителна константа ($a > 0$), а p е реален параметър.



Фиг. 3. Графики на подинтегралната функция $f(x) = \frac{1}{x^p}$ при $x > 0$ за различни положителни стойности на p.

При $p \ne 1$ имаме

$$\int_a^\eta \frac{dx}{x^p} = \int_a^\eta x^{-p}\,dx = \frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_a^\eta$$

$$= \frac{1}{1-p}\left(\eta^{1-p} - a^{1-p}\right)\,.$$

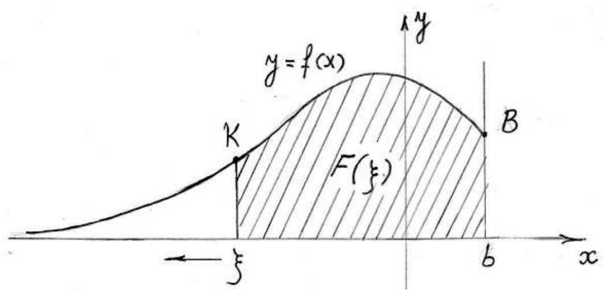
Тъй като $\lim_{\eta\to+\infty} \eta^{1-p} = +\infty$ при $1 - p > 0$, т.е. при $p < 1$, а $\lim_{\eta\to+\infty} \eta^{1-p} = \lim_{\eta\to+\infty} \frac{1}{\eta^{p-1}} = 0$ при $p - 1 > 0$, т.е. при $p > 1$, то

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{\eta\to+\infty} \int_a^\eta \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} -\dfrac{a^{1-p}}{1-p} & \text{при } p > 1, \\ +\infty \quad \text{при} & p < 1. \end{cases}$$

При $p = 1$ имаме

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{\eta\to+\infty} \int_a^\eta \frac{dx}{x} = \lim_{\eta\to+\infty} \left(\ln x\Big|_a^\eta\right)$$

$$= \lim_{\eta\to+\infty} (\ln\eta - \ln a) = +\infty\,.$$



Фиг. 4

Напълно аналогично се дефинира несобственият интеграл

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx\,, \qquad (5)$$

за функция $f(x)$, дефинирана в интервала $(-\infty, b]$ и интегруема във всеки интервал $(\xi, b]$ при $\xi < b$, вж. фиг. 4. Именно

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{\xi\to-\infty} \int_\xi^b f(x)\,dx\,. \qquad (6)$$

Пример 3. Да разгледаме интеграла

$$\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2}\,.$$

Аналогично на пример 1 за този несобствен интеграл имаме

$$\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\xi\to-\infty} \int_\xi^0 \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \lim_{\xi\to-\infty} \operatorname{arctg} x\Big|_{\xi}^{0} = \lim_{\xi\to-\infty}(\operatorname{arctg} 0 - \operatorname{arctg}\xi)$$

$$= -\lim_{\xi\to-\infty}\operatorname{arctg}\xi = -\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\,,$$

т.е. интегралът е сходящ и има стойност $\dfrac{\pi}{2}$, която е равна на лицето на частта от неограничената фигура на фиг. 2, намираща се наляво от ординатната ос Oy.

Накрая, за функция $f(x)$, дефинирана върху целата числова ос, може да се разглежда интеграл с две безкрайни граници. Ако за някаква точка c несобствените интеграли $\displaystyle\int_{-\infty}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x$ и $\displaystyle\int_{c}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ са сходящи, то можем да дефинираме несобствения интеграл $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ чрез равенството

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{7}$$

Пример 4. Да разгледаме интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}\,.$$

Избирайки $c = 0$ и позовавайки се на резултатите от примери 1 и 3, от равенството (7) намираме

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} + \int_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi\,,$$

което е равно на лицето на цялата неограничена фигура, ограничена от графиката на функцията $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ и абсцисната ос Ox, вж. фиг. 2.

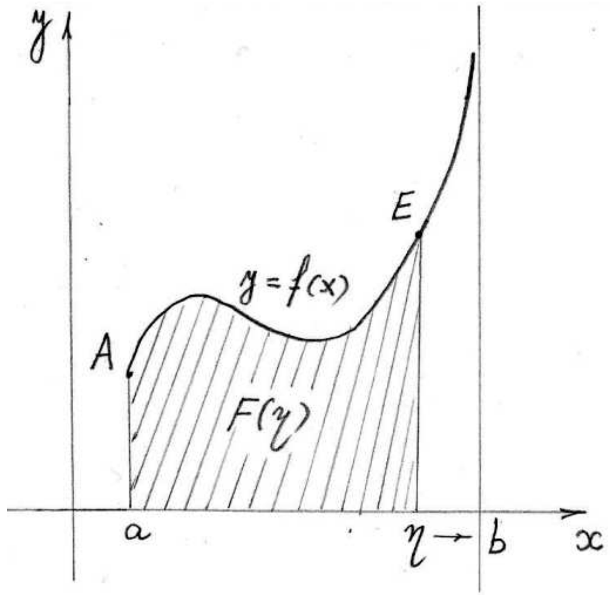
6.2. Несобствени интеграли от неограничени функции (несобствени интеграли от втори род)

Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в интервала $[a, b)$. Точката $x = b$ се нарича *особена точка* за функцията, ако тя е неограничена в интервала $[a, b)$, но е ограничена във всеки интервал $[a, \eta]$ при $a < \eta < b$. Това означава, че функцията $f(x)$ е неограничена в "безкрайно малка" околност на точката $x = b$. Очевидно е, че ако лявата граница на функцията $f(x)$ при $x \to b$ е безкрайна, то точката $x = b$ е особена. Тогава правата с уравнение $x = b$ е вертикална асимптота към графиката на функцията, вж. фиг. 5.

Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в интервала $[a, b)$ и е интегруема във всеки краен интервал $[a, \eta]$ при $a \le \eta < b$, т.е. функцията

$$F(\eta) = \int_{a}^{\eta} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{8}$$

е дефинирана в интервала $[a, b)$. Да предположим още, че точката $x = b$ е особена точка за финкцията $f(x)$.



Фиг. 5

Определение 2. *Ако съществува крайна лява граница на функцията $F(\eta)$ при $\eta \to b$, тя се нарича несобствен интеграл от втори род от функцията $f(x)$ и се означава със символа*

$$\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x\,, \tag{9}$$

т.е.

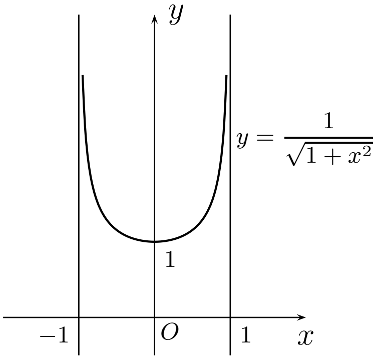
$$\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\eta\to b-0} F(\eta) = \lim_{\eta\to b-0} \int_{a}^{\eta} f(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{10}$$

Символът (9) се използва и когато границата (10) не съществува (в смисъл на крайна граница) и се нарича също несобствен интеграл. В случая, когато тази граница съществува, несобственият интеграл (9) се нарича *сходящ* със стойност, равна на тази граница, а когато тя не съществува, интегралът (9) се нарича *разсходящ*.

Да отбележим, че ако функцията $f(x)$ е интегруема в интервала $[a, b]$ в обичайния смисъл като граница на интегрални суми на Риман (собствен смисъл), то тя е интегруема и в смисъла на определение 2 (т.е. в несобствен смисъл) и съответните интеграли в двата смисъла са равни.

Пример 5. Да разгледаме интеграла

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$



Фиг. 6

Точката $x = 1$ е особена точка за подинтегралната функция $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, разглеждана в интервала $[0, 1)$, вж. фиг. 6. За този интеграл

$$F(\eta) = \int_0^\eta \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \arcsin x\Big|_0^\eta = \arcsin\eta - \arcsin 0$$

и, тъй като съществува лявата граница

$$\lim_{\eta\to 1-0} F(\eta) = \lim_{\eta\to 1-0}(\arcsin\eta - \arcsin 0)$$

$$= \lim_{\eta\to 1-0}\arcsin\eta = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}\,,$$

то този несобствен интеграл е сходящ и има стойност $\dfrac{\pi}{2}$:

$$\int_a^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\eta\to 1-0}\int_a^\eta \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}\,, \qquad (11)$$

която е равна на лицето на частта от неограничената фигура на фиг. 6, намираща се надясно от ординатната ос Oy.

Пример 6. Да покажем, че

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(b-x)^p} \quad \text{е} \quad \begin{cases} \text{сходящ при } p < 1, \\ \text{разсходящ при } p \geq 1, \end{cases}$$

където $a < b$ и p е реален параметър.

Точката $x = b$ е особена точка за подинтегралната функция на този интеграл. При $p \neq 1$ имаме

$$\int_a^\eta \frac{\mathrm{d}x}{(b-x)^p} = -\int_a^\eta (b-x)^{-p}\,\mathrm{d}(b-x)$$

$$= -\frac{(b-x)^{1-p}}{1-p}\Bigg|_a^\eta = -\frac{1}{1-p}\left[(b-\eta)^{1-p} - (b-a)^{1-p}\right].$$

Тъй като $\lim\limits_{\eta\to b-0}(b-\eta)^{1-p} = 0$ при $1 - p > 0$, т.е. при $p < 1$, а $\lim\limits_{\eta\to b-0}\eta^{1-p} = \lim\limits_{\eta\to b-0}\dfrac{1}{(b-\eta)^{p-1}}$ $= +\infty$ при $p - 1 > 0$, т.е. при $p > 1$, то

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(b-x)^p} = \lim_{\eta\to b-0}\int_a^\eta \frac{\mathrm{d}x}{(b-x)^p}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{(b-a)^{1-p}}{1-p} \text{ при } p < 1, \\ +\infty \quad \text{при} \quad p > 1. \end{cases}$$

При $p = 1$ имаме

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}}{b-x} = \lim_{\eta\to b-0}\int_a^\eta \frac{\mathrm{d}x}{b-x} = -\lim_{\eta\to b-0}\left[\ln(b-x)\Big|_a^\eta\right]$$

$$= -\lim_{\eta\to b-0}\left[\ln(b-\eta) - \ln(b-a)\right] = +\infty\,.$$

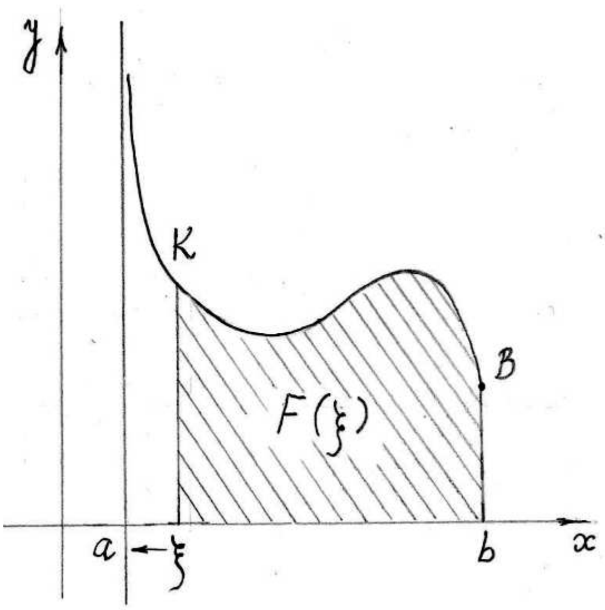
За функция $f(x)$, дефинирана в интервала $(a, b]$ и интегруема във всеки интервал $(\xi, b]$

при $a < \xi < b$ (вж. фиг. 7), несобственият интеграл

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{12}$$

се дефинира напълно аналогично. Именно

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\xi\to a+0}\int_\xi^b f(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{13}$$



Фиг. 7

Пример 7. Да разгледаме интеграла

$$\int_{-1}^0 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

Точката $x=-1$ е особена точка за подинтегралната функция $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, разглеждана в интервала $(-1,0]$, вж. фиг. 6. Аналогично на пример 5 за този несобствен интеграл имаме

$$\int_{-1}^0 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\xi\to-1+0}\int_\xi^0 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \lim_{\xi\to-1+0} \arcsin x\Big|_\xi^0 = \lim_{\xi\to-1+0}(\arcsin 0 - \arcsin\xi)$$

$$= -\lim_{\xi\to-1+0}\arcsin\xi = -\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\,,$$

т.е. интегралът е сходящ и има стойност $\dfrac{\pi}{2}$, която е равна на лицето на частта от неограничената фигура на фиг. 6, намираща се наляво от ординатната ос Oy.

Напълно аналогично на пример 6 може да се покаже, че интегралът

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^p} \quad \text{е} \quad \begin{cases} \text{сходящ при } p<1, \\ \text{разсходящ при } p \ge 1, \end{cases}$$

където $a<b$. Поведението на подинтегралната функция $f(x)=\dfrac{1}{(x-a)^p}$ при $a=0$ за различни стойности на p е показано на фиг. 3.

Нека сега функцията $f(x)$ е дефинирана в интервала (a,b) и за някоя точка c интегралите $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ и $\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ са сходящи. Тогава можем да дефинираме

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{14}$$

Същото равенство (14) дефинира интеграла $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ и в случая, когато функцията $f(x)$ е дефинирана в интервалите $[a,c)$ и $(c,b]$, а точката $x=c$ е особена точка за функцията, т.е. тя е неограничена във всяка околност на тази точка.

Пример 8. Да разгледаме интеграла

$$\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

Избирайки $c=0$ и позовавайки се на резултатите от примери 5 и 7, от равенството (14) намираме

$$\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^0 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} + \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi\,,$$

което е равно на лицето на цялата неограничена фигура, ограничена от графиката на функцията $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ и абсцисната ос Ox, вж. фиг. 6.

6.3. Критерий за сравнение при несобствените интеграли.

Сравнявайки определения 1 и 2 за двата рода несобствени интеграли $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ и $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, виждаме, че тези интеграли представляват съответните граници на функция $F(\eta) = \displaystyle\int_a^\eta f(x)\,\mathrm{d}x$. Ето защо разглеждането на двата вида несобствени интеграли може да стане под един чадър, като разглеждаме функция $f(x)$, дефинирана в интервала $[a, b)$ при $a < b \leq +\infty$. Тогава

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\eta\to b} F(\eta) = \lim_{\eta\to b}\int_a^\eta f(x)\,\mathrm{d}x\,. \quad (15)$$

където тук за крайна стойност на b ($b \neq +\infty$) границата се подразбира като лява граница ($\eta < b$).

Да предположим, че функциите $f(x)$ и $g(x)$ са дефинирани и неотрицателни в интервала $[a, b)$: $f(x) \geq 0$ и $g(x) \geq 0$ при $x \in [a, b)$ и са интегруеми във всеки интервал $[a, \eta]$ при $\eta \in [a, b)$. Тогава за тях може да се докаже следната теорема.

Теорема 1 (Критерий за сравнение). *Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяват още неравенството*

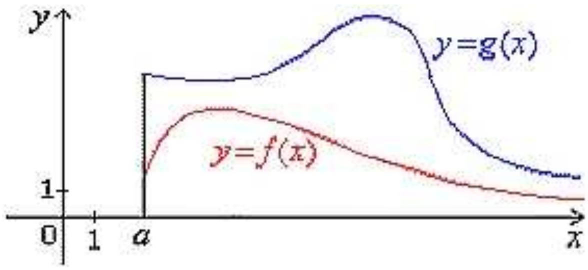
$$f(x) \leq g(x) \quad (16)$$

в интервала $[a, b)$. Тогава:

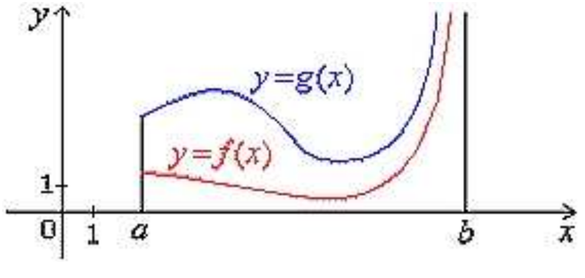
1) *ако интегралът $\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ е сходящ, то интегралът $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ е също сходящ,*

2) *ако интегралът $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ е разсходящ, то интегралът $\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ е също разсходящ.*

Твърденията на тази теорема имат прост *геометричен смисъл.* Първото означава, че ако лицето на фигурата ограничена от графиката на функцията $g(x)$, абсцисната ос Ox и съответните вертикални прави е крайно, то крайно е и лицето на аналогичната фигура, ограничена от графиката на функцията $f(x)$. Второто твърдение означава, че ако лицето на фигурата ограничена от графиката на функцията $f(x)$, абцисната ос Ox и съответните вертикални прави е безкрайно, то безкрайно е също и лицето на аналогичната фигура, ограничена от графиката на функцията $g(x)$, вж. фиг. 8 за несобствените интеграли от първи род и фиг. 9 за интегралите от втори род.



Фиг. 8.



Фиг. 9.