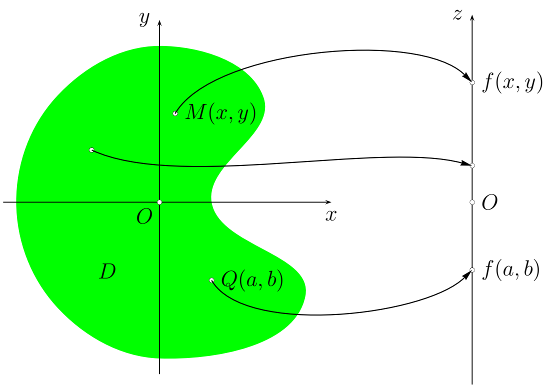
1. Функции на няколко променливи - основни понятия, граница и непрекъснатост

Функциите на n независими променливи се дефинират върху множества от точки в n-мерното евклидово координатно пространство, явяващо се обобщение на познатото ни реално тримерно пространство. Да напомним, че ако $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ са две точки от това пространство, то разстоянието $\rho(M_1, M_2)$ между тях се определя по формулата

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\,. \tag{1}$$

1.1. Понятие за функция на няколко променливи.

Определение 1. *Нека $D \subset \mathbb{R}^n$ е множество от точки в n-мерното евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ и на всяка точка $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ от D по някакъв закон (правило) f е съпоставено единствено реално число u. Този закон f се нарича* ***функция****, дефинирана в множеството D.*



Фиг. 1.1

Тогава записваме $u = f(M)$ или $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, или още $u = f(\boldsymbol{x})$, където $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Използват се също и означенията $u = u(M)$, $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $u = u(\boldsymbol{x})$. Казва се още, че f *е изображение на D в $\mathbb{R}$*.

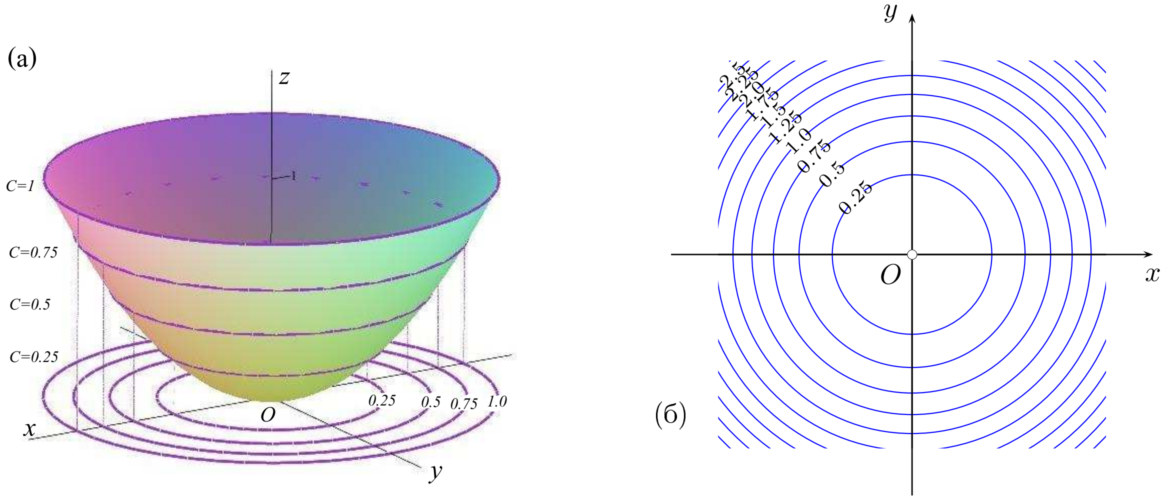
Множеството D се нарича *дефиниционна област* на функцията f. Координатните променливи $x_1, x_2, \ldots, x_n$ се наричат *независими променливи* (или *аргументи*), а числото $u = f(M)$, съответстващо на дадена точка M, стойност на функцията f в точката M или образ на точката M при изображението f. Множеството от числа $\mathcal{R} = \{\, f(M) \,|\, M \in D \,\}$, състоящо се от всички стойности на функцията f, които се получават, когато точката M пробягва дефиниционната област D, се нарича *множество от стойности на функцията* f или *образ на множеството D при изображението f*.

За функция $z = f(x, y)$ на двете променливи x и y даденото определение е визуализирано чрез диаграмата на фиг. 1.1. Дефиниционната област D на функцията е множество от точки в равнината Oxy, а стойностите ѝ са представени на диаграмата като точки от оста Oz. На стойността $f(x, y)$ можем да гледаме например като на температурата в точка $M(x, y)$ от метална пластина с формата на D. Тогава се казва, че върху D е дефинирано температурното поле $u = f(M)$. По-общо, ако в едно множество D е дефинирана функция $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, тогава се казва още, че в D е дефинирано *скаларно поле* $u = f(M)$. В случаите $n = 2$ или $n = 3$ това поле може да има ясен физически смисъл, например да бъде температурното поле, полето на електрическия потенциал и др.

Графиката на функция на една променлива $y = f(x)$ $(x \in D \subset \mathbb{R})$ е обикновено линия в равнината Oxy. *Графиката* Γ на функция $z = f(x, y)$ на две променливи x и y е обикновено повърхнина в тримерното $Oxyz$, състояща се от всички точки $N(x, y, f(M))$, които се получават, когато точката $M(x, y)$ се изменя в множеството D, т.е.

$$\Gamma = \left\{\, N(x, y, f(M)) \in \mathbb{R}^3 \,|\, M(x, y) \in D \,\right\}\,.$$

Тогава точката M представлява проекцията на N върху координатната равнина Oxy. Уравнението на тази повърхнина е самото уравнение $z = f(x, y)$, чрез което аналитично се задава функцията. Например графиката на функцията $z = x^2 + y^2$ е ротационен параболоид (повърхнината, която се описва например от параболата $z = x^2$ при въртенето ѝ около оста Oz), вж. фиг. 1.2(a). Тази функция е дефинирана в цялата равнина $\mathbb{R}^2$. Ако функцията е на повече от две променливи, нейната графика се дефинира по аналогичен начин, но тя вече е въображаема повърхнина, наречена хиперповърхнина, която за функция на n променливи се намира в пространството $\mathbb{R}^{n+1}$.



Фиг. 1.2

Поведението на една функция $f(x, y)$ на две променливи може да се визуализира също и по следния начин. Да пресечем мислено графиката ѝ с равнини, перпендикулярни на апликатната ос Oz. За точките от тези равнини z-координатата е постоянна: $z = C$. Тогава, ако проектираме пресечните линии на тези равнини с повърхнината $z = f(x, y)$ (графиката на функцията) върху координатната равнина Oxy, ще получим линии, върху всяка от които функцията има една и съща стойност C. Получаването на тези линии е илюстрирано на фиг. 1.2(б) за функцията $z = x^2 + y^2$.

Определение 2. ***Линия на ниво*** *за функцията* $z = f(x, y)$ *се нарича множеството от всички точки* $M(x, y) \in D$, *в които функцията има една и съща стойност* C. *Това означава, че* $f(x, y) = C$ *е уравнението на тази линия в равнината* Oxy.

Съвкупността от тези линии представлява "картата" на скаларното поле $u = f(M)$. Това представяне на функция на две променливи произлиза от картографията, където на картата на дадена местност са съединени точки с една и съща надморска височина. По аналогичен начин, ако се съединят точките с една и съща температура или атмосферно налягане, получават се линии, наречени в метеорологията съответно изотерми и изобари. За да се получи по-нагледна представа за поведението на функцията, за константата C се избират обикновено стойности $C_1, C_2, \ldots, C_p$, образуващи аритметична прогресия със зададена разлика $h = C_{j+1} - C_j$, $j = 1, \ldots, p-1$. Там, където линиите на ниво са разположени по-нагъсто, там функцията се изменя по-бързо (тогава графиката ѝ е "по-стръмна"), а на тези места, където те са по-нарядко, функцията се изменя по-бавно (графиката ѝ е "по-полегата").

За функцията $f(x, y) = x^2 + y^2$ намирането на линиите на ниво е елементарно. Тъй като $f(x, y) = C \Leftrightarrow x^2 + y^2 = C \Leftrightarrow x^2 + y^2 = r^2$, където $r = \sqrt{C}$, тези линии са концентрични окръжности с радиус r и център в координатното начало $O(0, 0)$, вж. фиг. 1.2(б).

По напълно аналогичен начин за функция $u = f(x, y, z)$ на три променливи се въвеждат повърхнини, върху които функцията приема една и съща стойност C, т.е. повърхнини с уравнения $f(x,y,z) = C$, наречени *повърхнини на ниво*. Например, тъй като $x^2 + y^2 + z^2 = C \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = (\sqrt{C})^2$ $(C \geq 0)$, то повърхнините на ниво за функцията $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ са концентрични сфери с радиуси $r = \sqrt{C}$ и центрове в координатното начало $O(0,0,0)$.

1.2. Някои множества от точки в пространството $\mathbb{R}^n$. Нека точката $M_0 \in \mathbb{R}^n$, а R е положително число. Да въведем първо някои често срещани множества при изучаване на функциите на няколко променливи.

1. Множеството

$$\mathcal{U}(M_0,R) = \{M \in \mathbb{R}^n \,|\, \rho(M,M_0) < R\}, \tag{2}$$

т.е. множеството от всички точки M в пространството $\mathbb{R}^n$, удовлетворяващи условието $\rho(M,M_0) < R$, се нарича *отворено n-мерно кълбо с радиус R и център в точката M_0*.

*Отвореното n-мерно кълбо $\mathcal{U}(M_0,\delta)$ с радиус δ и център в точката M_0 се нарича δ-**околност** на точката M_0.*

2. Множеството

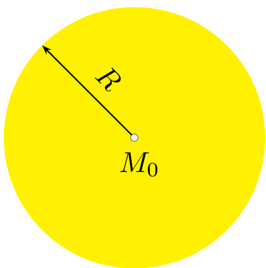
$$S(M_0,R) = \{M \in \mathbb{R}^n \,|\, \rho(M,M_0) = R\}, \tag{3}$$

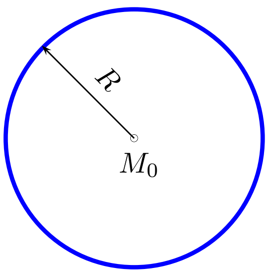
т.е. множеството от всички точки M в пространството $\mathbb{R}^n$, отдалечени на едно и също разстояние R от точката M_0, се нарича *n-мерна сфера с радиус R и център в точката M_0*.

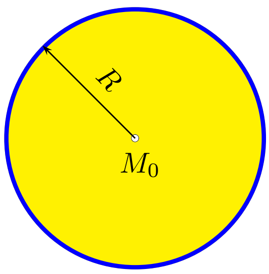
3. Множеството

$$\overline{\mathcal{U}}(M_0,R) = \{M \in \mathbb{R}^n \,|\, \rho(M,M_0) \leq R\} \tag{4}$$

се нарича *затворено n-мерно кълбо с радиус R и център в точката M_0*.

(а) 

(б) 

(в) 

Фиг. 1.3. (а) отворен кръг, (б) неговият контур, (в) затворен кръг

Очевидно $\overline{\mathcal{U}}(M_0,R) = \mathcal{U}(M_0,R) \cup S(M_0,R)$. Да отбележим, че при $n = 2$ (т.е. в евклидовата равнина) множествата $\mathcal{U}(M_0,R)$, $\overline{\mathcal{U}}(M_0,R)$ и $S(M_0,R)$ представляват съответно отворен кръг, затворен кръг и окръжност с радиус R и център в точката M_0, вж. фиг. 1.3. При $n = 1$ множеството $\mathcal{U}(M_0,R)$ е отвореният интервал $(x_0 - R, x_0 + R)$, $\overline{\mathcal{U}}(M_0,R)$ е затвореният интервал $[x_0 - R, x_0 + R]$, а $S(M_0,R)$ се състои от краищата на тези интервали; сега x_0 е координатата на точката M_0.

Нека сега G е множество от точки в $\mathbb{R}^n$.

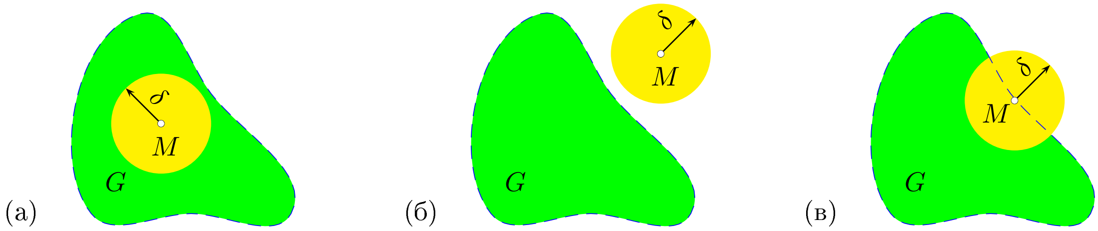
Определение 3. *Точката M се нарича **вътрешна точка** за множеството G, ако съществува δ-околност на точката M, всички точки на която принадлежат на множеството G.*

Очевидно, ако точката M е вътрешна точка за множеството G, то $M \in G$.

Определение 4. *Точката M се нарича* ***външна точка*** *за множеството G, ако съществува δ-околност на точката M, всички точки на която не принадлежат на това множество.*

Определение 5. *Точката M се нарича* ***контурна точка*** *за множеството G, ако тази точка не е нито вътрешна, нито външна за това множество. Множеството от всички контурни точки за множеството G се нарича* ***контур*** *на G и се означава с ∂G.*

От последните три определения заключаваме, че *точката M е контурна точка за G, ако всяка δ-околност на точката M съдържа едновременно точки от множеството G и точки, непринадлежащи на G.*



Фиг. 1.4. Трите вида точки M: (а) вътрешна, (б) външна, (в) контурна точка за G

Определенията за тези три вида точки са илюстрирани на фиг. 1.4. Лесно се вижда, че $\partial\mathcal{U}(M_0, R) = \partial\overline{\mathcal{U}}(M_0, R) = S(M_0, R)$, вж. фиг. 1.3.

Определение 6. *Множеството G се нарича* ***отворено****, ако всички негови точки са вътрешни, т.е. ако всяка точка M на множеството G принадлежи на това множество заедно с някоя своя δ-околност.*

Определение 7. *Произволно отворено множество, съдържащо дадена точка M_0, се нарича* ***околност*** *на точката M_0.*

Лесно се вижда, че отвореното кълбо $\mathcal{U}(M_0, R)$ е отворено множество.

Определение 8. *Множеството G се нарича* ***затворено****, ако то съдържа всичките си контурни точки.*

Лесно се вижда, че затвореното кълбо $\overline{\mathcal{U}}(M_0, R)$ и сферата $S(M_0, R)$ са затворени множества.

Определение 9. *Множеството G се нарича* ***ограничено****, ако съществува n-мерно кълбо, съдържащо всички точки на това множество.*

Определение 10. *Множеството G се нарича* ***линейно свързано****, ако всеки две точки на това множество могат да се съединят с непрекъсната крива, всички точки на която принадлежат на това множество.*

Определение 11. *Всяко отворено и линейно свързано множество G в пространството $\mathbb{R}^n$ се нарича* ***област****. Множеството $\overline{G} = G \cup \partial G$, което се получава, като към областта G се присъедини нейният контур ∂G, се нарича* ***затворена област****.*

Например отвореното кълбо $\mathcal{U}(M_0, R)$ е ограничена област в $\mathbb{R}^n$. Затвореното кълбо $\overline{\mathcal{U}}(M_0, R)$ е затворена ограничена област в $\mathbb{R}^n$. Допълнението $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{U}(M_0, R)$ на отвореното кълбо $\mathcal{U}(M_0, R)$ е затворена неограничена област, а допълнението $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\mathcal{U}}(M_0, R)$ на затвореното кълбо $\overline{\mathcal{U}}(M_0, R)$ е неограничена област в $\mathbb{R}^n$. Обединението на две непресичащи се области не е линейно свързано множество.

1.3. Граница на функция на няколко променливи

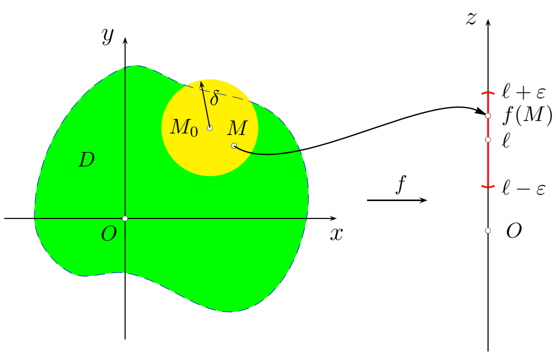
В основата на понятието за граница на функция лежи идеята за близост на функционалните стойности на функцията $f(M)$ до границата ѝ ℓ, когато точките M се намират близо до точка M_0. За да може да се въведе понятието граница на една функция $u = f(M)$ в точка M_0, тази функция трябва да бъде дефинирана в точки, които са "безкрайно близо" до точката M_0.

Определение 12. *Точката M_0 се нарича **точка на сгъстяване** за множеството D, ако всяка δ-околност на точката M_0 съдържа точки от множеството D, различни от M_0.*

Образно казано, една точка M_0 е точка на сгъстяване за множеството D, ако "можем да се приближим безкрайно близко до точката M_0, вървейки по точки от множеството D, без да стъпваме на самата точка M_0". Ето защо ще изискваме точката M_0 да е точка на сгъстяване за дефиниционната област D на функцията $u = f(M) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Определението за граница на функция се основава на идеята, че модулът на разликата $f(M) - \ell$ между $f(M)$ и ℓ може да стане толкова малък, колкото си пожелаем, ако изберем точката M да е достатъчно близо до точката M_0.

Определение 13 *(Определение за граница на функция)*. *Числото ℓ се нарича **граница** на функцията $u = f(M)$ при $M \to M_0$, ако за всяка ε-околност $\mathcal{U}(\ell, \varepsilon) = (\ell-\varepsilon, \ell-\varepsilon)$ на ℓ може да се намери такава δ-околност $\mathcal{U}(M_0, \delta)$ на точката M_0, че за всички точки $M \in \mathcal{U}(M_0, \delta)$ и $M \in D$, които са различни от M_0, да е изпълнено $f(M) \in \mathcal{U}(\ell, \varepsilon)$, т.е. $|f(M) - \ell| < \varepsilon$.*



Фиг. 1.5

За означаване на границата на функцията $f(M)$ в точката $M_0(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ се използват означенията $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = \ell$ или $\lim\limits_{\substack{x_1 \to x_1^{(0)} \\ \cdots \\ x_n \to x_n^{(0)}}} f(x_1, \ldots, x_n) = \ell$, или просто $f(M) \to \ell$ при $M \to M_0$.

За функция $z = f(x, y)$ на двете променливи x и y определението е илюстрирано чрез диаграмата на фиг. 1.5: колкото и малка околност $(\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon)$ на ℓ да изберем, можем да намерим такъв отворен кръг $\mathcal{U}(M_0, \delta)$ с център в точката M_0 и радиус δ, че всички точки от $\mathcal{U}(M_0, \delta) \cap D$, с евентуално изключение на точката M_0, да се изобразяват в интервала $(\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$.

Да отбележим, че определението остава в сила и когато ℓ е някой от символите $+\infty$, $-\infty$ или ∞ (без знак), при условие, че в определението под околността $\mathcal{U}(\ell, \delta)$ се разбират съответно интервалите $(\varepsilon, +\infty)$, $(-\infty, -\varepsilon)$ или $(-\infty, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, +\infty)$.

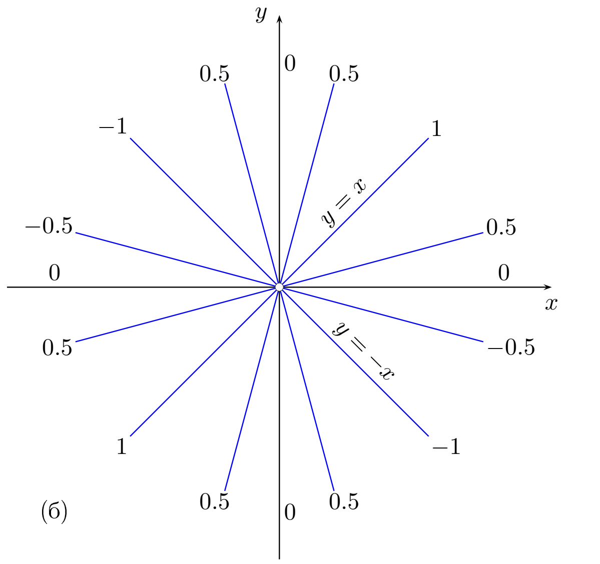
Пример. *Да покажем, че функцията $f(x, y) = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$ няма граница в точката $O(0, 0)$.*

До извода, че не съществува границата на функцията в точката $O(0, 0)$, можем до достигнем по следния начин. Правите, минаващи през тази точка, имат параметрични уравнения $x = at$, $y = bt$, където $\boldsymbol{v} = (a, b)$ е направляващ вектор на правата. (При изменение на параметъра t в интервала $[0, +\infty)$ се получава лъчът, излизащ от точката O, който е еднопосочен с $\boldsymbol{v}$, а при изменение в интервала $(-\infty, 0]$ – противоположният на него лъч.) По всяка такава права функцията $f(x, y)$ е постоянна:

$$f(x, y) = f(at, bt) = \frac{2(at)(bt)}{(at)^2 + (bt)^2} = \frac{2ab}{a^2 + b^2}\,,$$

но стойността на функцията зависи от направлението на правата, т.е. от вектора $\boldsymbol{v} = (a, b)$. Това означава, че правите, минаващи през координатното начало, са линии на ниво за функцията, вж. фиг. 1.6. Тъй като точката $M(at, bt) \to O(0,0)$ при $t \to 0$, то ***границата на функцията*** $f(at, bt)$ ***при*** $t \to 0$ ***представлява границата на функцията*** $f(x, y)$ ***в точката*** O ***по направлението, определено от вектора*** $\boldsymbol{v}$***.*** (Ако изискваме още $t > 0$ или $t < 0$, ще получим границата на функцията по посоката на съответния лъч.) Следователно за границата на нашата функция по това направление имаме

$$f(x, y) \to \frac{2ab}{a^2 + b^2} \quad \text{при} \quad M(x, y) \to O(0,0) \quad \text{и} \quad \overrightarrow{OM} \parallel \boldsymbol{v}.$$



Фиг. 1.6. Линии на ниво на функцията $f(x, y) = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$

Тъй като *по различните направления, определящи се от вектора* $\boldsymbol{v} = (a, b)$*, получаваме различни граници*, достигаме отново до заключението, че не съществува границата на функцията в точката $O(0,0)$. ▲

Разгледаният пример показва, че има значение по какъв път се приближаваме към дадена точка M_0. Да си спомним, че това има значение даже за функция на една променлива $y = f(x)$ в точка x_0; тогава има само два пътя за приближаване към точката x_0: отляво и отдясно на x_0, които ни доведоха до понятията лява и дясна граница. Както вече видяхме, случаят на функция на две променливи предлага много по-голямо разнообразие от възможности за приближаване към точка M_0. Според определенията за граница на функция обаче, за да съществува границата на функцията в дадена точка M_0, трябва границите ѝ по всевъзможните пътища към M_0 да са равни. В общия случай тези пътища са безбройно много. Следователно можем само да направим следното заключение:

Ако функцията $f(x, y)$ *има различни граници по два различни пътя на приближаване на точките* $M(x, y)$ *към точката* M_0*, то границата на функцията при* $M \to M_0$ *не съществува.*

Тъй като даденото определение за граница на функция на няколко променливи напълно съвпада по форма със съответното определение за функция на една променлива, то за функциите на няколко променливи остават в сила всички свойства на границите на функции на една променлива, освен тези, използващи съществено наредбата на точки върху числовата права.

Както и при функции на една променлива, оказва се полезно въвеждането на понятието безкрайно малка функция.

Определение 14. *Функцията* $\alpha(M)$ *се нарича* ***безкрайно малка*** *при* $M \to M_0$*, ако* $\lim\limits_{M \to M_0} \alpha(M) = 0$.

Тъй като $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = \ell \Leftrightarrow \lim\limits_{M \to M_0} [f(M) - \ell] = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{M \to M_0} \gamma(M) = 0$, където $\gamma(M) = f(M) - \ell$, достигнахме до следното твърдение:

Лема 1. $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = \ell$ *тогава и само тогава, когато функцията* $f(M)$ *може да се представи във вида* $f(M) = \ell + \gamma(M)$*, където* $\gamma(M)$ *е безкрайно малка функция при* $M \to M_0$.

Нека сега $\alpha(M)$ и $\beta(M)$ са безкрайно малки функции при $M \to M_0$. Оказва се, че *сумата, разликата и произведението на тези функции е също безкрайно малка функция при $M \to M_0$.*

Определение 15. *Безкрайно малката функция $\alpha(M)$ се нарича **безкрайно малка от по-висок ред** в сравнение с безкрайно малката функция $\beta(M)$ при $M \to M_0$, ако*

$$\lim_{M \to M_0} \frac{\alpha(M)}{\beta(M)} = 0. \tag{5}$$

Този факт изразяваме чрез означението $\alpha(M) = o(\beta(M))$ при $M \to M_0$. Напомняме, че тук символът o се чете "o-малко".

1.4. Непрекъснатост на функция на няколко променливи

Нека функцията $f(M)$ е дефинирана в множеството D и M_0 е точка на сгъстяване за D, която нека още да принадлежи на D.

Определение 16. *Функцията $f(M)$ се нарича непрекъсната в точката M_0, ако съществува границата ѝ в тази точка и тази граница е равна на стойността ѝ $f(M_0)$:*

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = f(M_0). \tag{6}$$

Тъй като $f(M_0)$ е число, то $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0) \Leftrightarrow \lim\limits_{M \to M_0} [f(M) - f(M_0)] = 0$. Нека M е точка от дефиниционната област D на функцията. Разликата

$$\Delta f = f(M) - f(M_0) \tag{7}$$

нарастване (или ***пълно нарастване***) на функцията $f(M)$ в точката M_0, съответстващо на изменението на аргумента на функцията от точката M_0 до точката M. (Означава се още с Δu.) Така достигнахме до следното твърдение:

Лема 2. *Функцията $u = f(M)$ е непрекъсната в точката M_0 тогава и само тогава, когато пълното ѝ нарастване е безкрайно малка функция при $M \to M_0$:*

$$\lim_{M \to M_0} \Delta f = 0. \tag{8}$$

Както вече изтъкнахме в т. 1.3, според определението за граница на функция към точката M_0 можем да се приближаваме по различни пътища. Следователно можем да въведем непрекъснатост на функция по посока, направление или линия в точката M_0. Да разгледаме частните случаи, когато се приближаваме към точката M_0 по направления, успоредни на координатните оси. За простота да разгледаме функция $z = f(M) = f(x, y)$ на две променливи в точка $M_0(x_0, y_0)$. Правата, минаваща през точката M_0 и успоредна на абсцисната ос Ox, е с уравнение $y = y_0$. Върху тази линия функцията $f(x, y)$ е функция само на променливата x, която да означим с $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = f(x, y_0). \tag{9}$$

Аналогично правата $x = x_0$ минава през точката M_0 и е успоредна на ординатната ос Oy. Върху тази права $f(x, y)$ е функция само на y, която да означим с $\psi(y)$:

$$\psi(y) = f(x_0, y). \tag{10}$$

Определение 17. *Функцията $f(x, y)$ се нарича* ***непрекъсната в точката*** *$M_0(x_0, y_0)$* ***по променливата*** *x, ако функцията $\varphi(x)$ е непрекъсната в точката x_0. Аналогично функцията $f(x, y)$ се нарича* ***непрекъсната в точката*** *$M_0(x_0, y_0)$* ***по променливата*** *y, ако функцията $\psi(y)$ е непрекъсната в точката y_0.*

От определенията на функциите $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ се вижда, че непрекъснатостта на функцията $f(x, y)$ по една от променливите x или y означава непрекъснатост по направлението на съответната координатна ос.