# 1. Функции на една независима променлива - основни понятия. Някои видове функции

## 1.1. Понятие за функция. Начини за задаване на функция

**Определение 1.** Нека $X$ и $Y$ са множества от реални числа ($X, Y \subset \mathbb{R}$) и нека по някакво правило (или закон) $f$ на всяко число $x$ от множеството $X$ е съпоставено *единствено* число $y$ от множеството $Y$. Това правило $f$ се нарича *функция*, дефинирана в множеството $X$ и приемаща стойности в множеството $Y$. Казва се още, че $f$ е *изображение* на $X$ в $Y$. Тогава $y$ се нарича образ на $x$. Записваме $y = f(x)$ или още $y = y(x)$.

В определението $x$ може да се разглежда като променлива величина, пробягваща независимо от $y$ множеството $X$. Ето защо $x$ се нарича независима променлива или аргумент на функцията, а съответният ѝ образ $y$ – зависима променлива, стойност на функцията или само функция. Множеството $X$ се нарича *дефиниционна област* на функцията $f$, което ще означаваме още с $D_f$, т.е. $D_f = X$.

Множеството

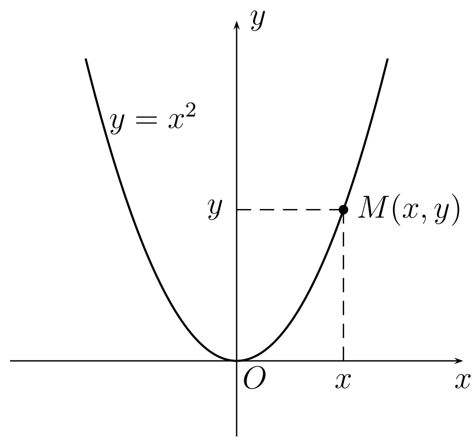
$$R_f = \{f(x)|\, x \in D_f\},$$

състоящо се от всички стойности $y = f(x)$, които функцията $f$ приема, когато $x$ пробягва дефиниционната ѝ област $D_f$, се нарича *множество от стойности* на функцията $f$.

Множеството

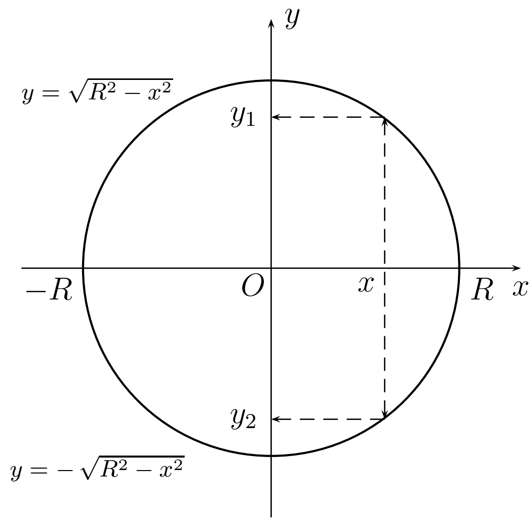
$$\Gamma_f = \{M(x, f(x))|\, x \in D_f\},$$

състоящо се от всички точки $M(x, f(x))$ в равнината $Oxy$, които се получават, когато $x$ пробягва дефиниционната област $D_f$, се нарича *графика* на функцията $f$.




Фиг. 1

Например, графиката на квадратната функция $y = x^2$ е парабола, вж. фиг. 1. Функцията е навсякъде дефинирана, т.е. $D_f = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$. Тъй като винаги $x^2 \geq 0$, то множеството ѝ от стойности $R_f$ е интервалът $[0, +\infty)$.




Фиг. 2

Графиката на една функция, дефинирана в интервал $(a, b)$, е обикновено линия в равнината. Не всяка линия в равнината, обаче, е графика на функция. Например, окръжността с уравнение $x^2 + y^2 = R^2$ не е графика на функция, тъй като чрез окръжността на всяко $x$ от интервала $(-R, R)$ се съпоставят две числа: $y_1 = \sqrt{R^2 - x^2}$ и $y_2 = -\sqrt{R^2 - x^2}$ - решенията относно $y$ на уравнението $x^2 + y^2 = R^2$, вж. фиг. 2. Според определението за функция на всяко фиксирано $x = x_0$ чрез графиката ѝ трябва да се съпостави единствено $y_0$. Това геометрично означава, че всяка вертикална права $x = x_0$ пресича графиката на функцията само в една точка.

Има три основни начина за задаване на функция:

1. *Аналитичен начин:* функцията се задава с помощта на една или няколко формули. На свой ред това задаване може да бъде явно, неявно или параметрично.

а) *явно задаване:* функцията се задава чрез формула от вида $y = f(x)$, чиято дясна страна не съдържа $y$. Например, $y = x^2$, $y = \sqrt{1 - x^2}$, $y = \sin^3 x$ и т. н. Такива ще бъдат почти всички функции, които ще разглеждаме. Функция, зададена по този начин, се нарича явна.

б) *неявно задаване:* функцията се задава чрез уравнение от вида $F(x, y) = 0$, което не е решено относно $y$. За да изразим явна функция $y = f(x)$, определена неявно от това уравнение, трябва да го решим относно $y$. Функция, зададена по този начин, се нарича неявна.

Например, уравнението $x^2 + y^2 = R^2$ задава неявно две функции $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ и $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$, дефинирани в интервала $[-R, R]$, чиито графики са непрекъснати линии: горната полуокръжност на функцията $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ и долната – на $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$, вж. фиг. 2.

в) *параметрично задаване:* функцията $y$ на аргумента си $x$ се задава с помощта на две функции

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \tag{4.1}$$

чийто аргумент $t$, изменящ се в интервал $[\alpha, \beta]$, се нарича параметър. Много често параметърът $t$ има физически смисъл на време, а уравненията (4.1) се разглеждат като уравнения, задаващи закона на движение на точка $M(x, y)$ в равнината $Oxy$.

**Пример.** Точка $M(x, y)$ се движи по закона

$$x = R\cos t, \quad y = R\sin t, \qquad t \in [0, \pi].$$

След като повдигнем на квадрат двете страни на тези уравнения и след това ги съберем, ще изключим времето $t$, получавайки уравнението $x^2 + y^2 = R^2$. Тъй като $-R \le x \le R$ и $y \ge 0$ при $t \in [0, \pi]$, то траекторията на точката е горната полуокръжност, което означава, че параметрично зададената функция е $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, вж. фиг. 2.

2. *Табличен начин:* функцията се задава с помощта на таблица, съдържаща стойностите на аргумента и съответните стойности на функцията. Например, като резултат на измервания може да се направи таблица, изразяваща зависимостта на температурата от надморската височина.

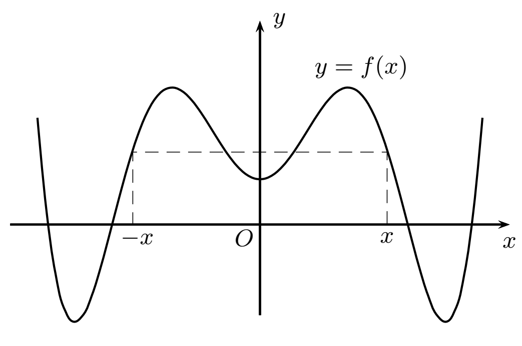
3. *Графичен начин:* функцията се задава чрез нейната графика, построена в дадена координатна система.

## 1.2 Някои видове функции

### 1.2.1 Четни и нечетни функции

**Определение 2.** Функцията $f(x)$ се нарича *четна*, ако за всяко $x$ от дефиниционната ѝ област е изпълнено $f(-x) = f(x)$.

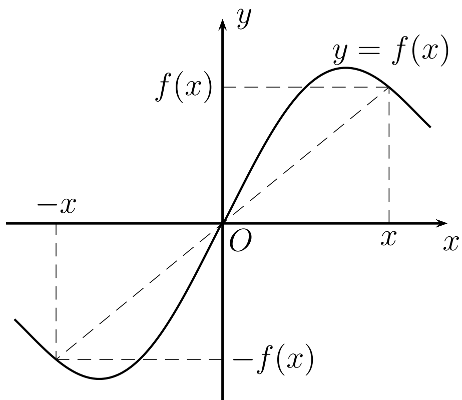
Графиката на всяка четна функция е симетрична относно ординатната ос $Oy$, вж. фиг. 3. Например, четни функции са $y = x^0 = 1$, $y = x^2$, $y = \cos x$.




Фиг. 3

**Определение 3.** Функцията $f(x)$ се нарича *нечетна*, ако за всяко $x$ от дефиниционната ѝ област е изпълнено $f(-x) = -f(x)$.

Графиката на всяка нечетна функция е симетрична относно координатното начало $O$, вж. фиг. 4. Например, нечетни функции са $y = x$, $y = x^3$, $y = \sin x$, $y = \operatorname{tg} x$.




Фиг. 4

### 1.2.2 Монотонни функции

Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в интервала $(a, b)$.

**Определение 4.** функцията $f(x)$ се нарича *монотонно растяща* в интервала $(a, b)$, ако за всеки две стойности на $x$, за които $x_1 < x_2$, е изпълнено

$$f(x_1) \leq f(x_2), \tag{4.2a}$$

т.е. стойностите на $f(x)$ нарастват с нарастването на аргумента ѝ $x$, вж. фиг. 5.

Аналогично, функцията $f(x)$ се нарича *монотонно намаляваща* в интервала $(a, b)$, ако за всеки две стойности на $x$, за които $x_1 < x_2$, е изпълнено

$$f(x_1) \geq f(x_2), \tag{4.2b}$$

т.е. стойностите на $f(x)$ намаляват с нарастването на аргумента ѝ $x$, вж. фиг. 6. Ако неравенството (4.2a) е строго, т.е. $f(x_1) < f(x_2)$, функцията се нарича *строго монотонно растяща*, а ако (4.2b) е строго, т.е. $f(x_1) > f(x_2)$ – *строго монотонно намаляваща.*

Графиката на една монотонно растяща функция върви отдолу нагоре, а на монотонно намаляваща функция – отгоре надолу,когато се движим отляво надясно. Функцията, чиято графика е показана на фиг. 5, е строго монотонно растяща, а на фиг. 6 – монотонно намаляваща, но не строго монотонно намаляваща, защото графиката ѝ има праволинеен участък, успореден на абсцисната ос $Ox$. Квадратната функция $y = x^2$ е строго монотонно намаляваща в интервала $(-\infty, 0)$ и е строго монотонно растяща в интервала $(0, +\infty)$, вж. фиг. 1.

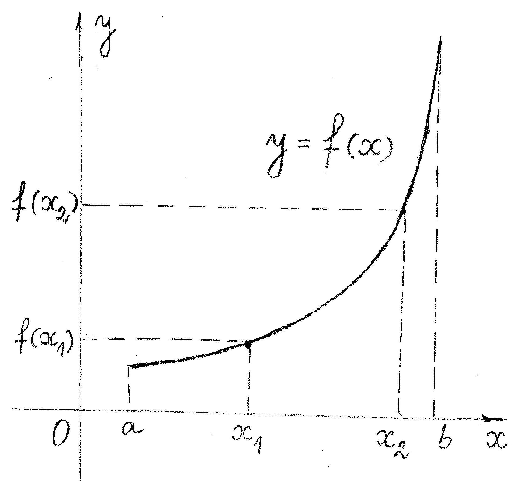



Figure 5:

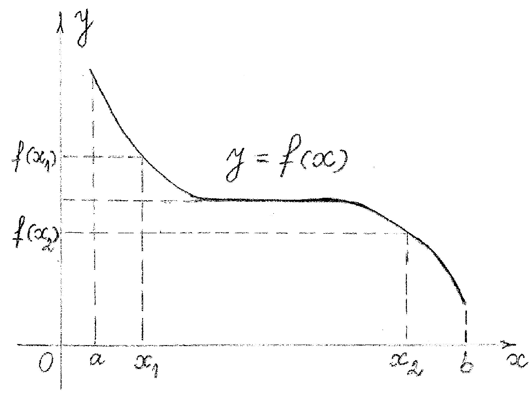



Figure 6:

Монотонно растящите и монотонно намаляващите функции се наричат монотонни функции.

### 1.2.3 Ограничени функции

**Определение 5.** Функцията $f(x)$ се нарича *ограничена отгоре* в интервала $(a, b)$, ако съществува константа $M$ такава, че за всяко $x \in (a, b)$ е изпълнено $f(x) \leq M$. Аналогично, функцията $f(x)$ се нарича *ограничена отдолу* в интервала $(a, b)$, ако съществува константа $m$ такава, че за всяко $x \in (a, b)$ е изпълнено $f(x) \geq m$. Функцията $f(x)$ се нарича *ограничена* в интервала $(a, b)$, ако тя е ограничена отдолу и отгоре в този интервал.

Да бъде една функция ограничена отгоре в даден интервал геометрично означава графиката ѝ в този интервал да бъде разположена под хоризонталната права $y = M$, а да бъде ограничена отдолу – над хоризонталната права $y = m$.

Квадратната функция $y = x^2$ е ограничена отдолу, но не е ограничена отгоре в интервала $(-\infty, +\infty)$, вж. фиг. 1. функцията $y = \sin x$ е ограничена в цялата си дефиниционна област – интервала $(-\infty, +\infty)$, тъй като $-1 \leq \sin x \leq 1$ за всяко $x \in (-\infty, +\infty)$.

## 1.3 Операции с функции

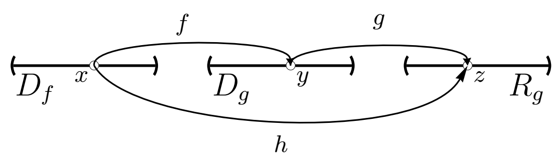
Нека функциите $f$ и $g$ имат една и съща дефиниционна област $D$. Тогава за тези функции се дефинират сума $f + g$, разлика $f - g$.произведение $f\,g$ и частно $f/g$ по следните естествени правила:

$$(f \pm g)(x) = f(x) + g(x), \quad x \in D,$$

$$(f\,g)(x) = f(x)\,g(x), \quad x \in D,$$

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad x \in D \text{ и } g(x) \neq 0.$$

Така дефинираните операции с функции се наричат аритметични.




Фиг. 7

Друга важна операция с функции е операцията композиция на функции.

**Определение 6.** Нека функцията $y = f(x)$ има дефиниционна област $D_f$ и множество от стойности $R_f$, а функцията $z = g(y)$ има дефиниционна област $D_g$ и $f(x) \in D_g$ за всяко $x \in D_f$, т.е. $R_f \subset D_g$. Функцията $z = h(x)$, дефинирана в $D_f$ по следния начин:

$$h(x) = g\,[f(x)] \tag{4.3}$$

се нарича *композиция* на функциите $f$ и $g$ в посочения ред, вж. фиг. 7. За функцията $h(x)$ се използват също термините *сложна функция, съставна функция, функция от функция.*

**Пример.** Функцията $h(x) = (1 - x^3)^2$ може да се разглежда като композиция на функциите $y = f(x) = 1 - x^3$ и $z = g(y) = y^2$.