3. Частни производни и диференцируемост на функция на няколко променливи

3.1. Частни производни. Да разгледаме отначало функция $z = f(x,y)$ на двете променливи x и y. Нека точката $M_0(x_0, y_0)$ е вътрешна точка за дефиниционната област D на функцията, т.е. M_0 се съдържа в D заедно със своя δ-околност. Тогава точка $M(x,y)$, тръгвайки от положение M_0, може да започне да се движи във всички посоки, без да напуска веднага дефиниционната област D. (Очевидно, ако точката M_0 е контурна, това не може да стане.)

Две специални посоки са тези по координатните оси Ox и Oy. При движението по направление на оста Ox координатата y е фиксирана: $y = y_0$, и се изменя само координатата x. Тогава функцията $f(x,y)$ става функция $\varphi(x) = f(x, y_0)$ само на променливата x. Нейната производна $\varphi'(x)$ в точката x_0 дава скоростта на изменение на φ в тази точка или, еквивалентно, на функцията $f(x,y)$ в точката $M_0(x_0,y_0)$ по направление на оста Ox. Съгласно определението за производна на функция на една променлива имаме

$$\varphi'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta x},$$

където $\Delta\varphi = \varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$ е нарастването на функцията $\varphi(x)$ в точката x_0, съответстващо на нарастването $\Delta x = x - x_0$ на аргумента x. Това нарастване се означава с $\Delta_x f$, т.е. $\Delta_x f = \Delta\varphi$, или

$$\Delta_x f = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0), \tag{1}$$

и се нарича ***частно нарастване относно променливата*** x на функцията $f(x,y)$ в точката $M_0(x_0,y_0)$, съответстващо на нарастването Δx на аргумента x.

Определение 1 ***(Определение за частна производна)***. *Ако съществува границата на отношението на частното нарастване $\Delta_x f$ на функцията $f(x,y)$ в точката $M_0(x_0,y_0)$ и съответното нарастване Δx на аргумента x, когато последното клони към нула, тази граница се нарича* ***частна производна на функцията*** $f(x,y)$ ***в точката*** M_0 ***по променливата*** x *и обикновено се означава с* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(M_0)$*, т.е.*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}. \tag{2}$$

Аналогично, при движение по направление на оста Oy координатата x е фиксирана: $x = x_0$, и се изменя само координатата y. Тогава функцията $f(x,y)$ става функцията $\psi(y) = f(x_0, y)$, чиято производна $\psi'(y)$ в точката y_0 представлява скоростта на изменение на функцията $f(x,y)$ в точката $M_0(x_0,y_0)$ по направление на оста Oy. Според определението за производна сега имаме

$$\psi'(y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta\psi}{\Delta y}$$

при нараствания $\Delta y = y - y_0$ и $\Delta\psi = \psi(y_0 + \Delta y) - \psi(y_0) = \Delta_y f$, където

$$\Delta_y f = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \tag{3}$$

се нарича ***частно нарастване относно променливата*** y на функцията $f(x,y)$ в точката $M_0(x_0,y_0)$, съответстващо на нарастването Δy на аргумента y. Аналогично се въвежда и

частната производна на функцията по променливата y като границата на частното ѝ нарастване $\Delta_y f$ и съответното нарастване Δy на аргумента y, когато последното клони към нула:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(M_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y f}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}. \tag{4}$$

Според разглеждането по-горе имаме

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = \varphi'(x_0) \quad \text{и} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) = \psi'(y_0). \tag{5}$$

Тези равенства дават не само еквивалентни определения за частните производни. От тях веднага следва изводът, че *частната производна* $\frac{\partial f}{\partial x}(M_0)$ *представлява скоростта на изменение на функцията* $f(x, y)$ *по направление на оста* Ox, *а* $\frac{\partial f}{\partial y}(M_0)$ – *скоростта на изменение на* f *по направление на оста* Oy *в точката* M_0.

Равенствата (5) подсказват и прост начин за намиране на частните производни. Именно, за да намерим частната производна $\frac{\partial f}{\partial x}(M)$ в произволна точка $M(x, y)$, ние си мислим y за константа и търсим производната на $f(x, y)$ по известните правила за намиране на производна на функция на една променлива, считайки, че $f(x, y)$ е функция само на x. Аналогично, за да пресметнем $\frac{\partial f}{\partial y}(M)$, ние гледаме на x като на константа и диференцираме функцията $f(x, y)$, разглеждайки я като функция само на променливата y.

Даденото определение за частни производни се обобщава по очевиден начин и за функция на повече от две променливи.

Пример 1. *Да намерим частните производни на функциите*

$$\text{а) } f(x, y) = x^y \quad (x > 0) \qquad \text{б) } g(x, y, z) = x \sin \frac{y}{z} \quad (z \neq 0) \tag{6}$$

във всички точки, в които те съществуват.

► а) За да намерим частната производна по x на функцията $f(x, y) = x^y$, си мислим, само за момент, че y е някаква константа α. Тогава ще получим степенната функция $\varphi(x) = x^\alpha$, чиято производна е $\varphi'(x) = \alpha x^{\alpha - 1}$. Ето защо $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y x^{y-1}$. Аналогично, за да намерим частната производна относно y, си мислим, само за момент, че x е някаква константа a. Тогава ще получим показателната функция $\psi(y) = a^y$, чиято производна е $\psi'(y) = a^y \ln a$. Следователно $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^y \ln x$.

б) За да намерим частната производна по x на функцията $g(x, y, z) = x \sin \frac{y}{z}$, си мислим, само за момент, че y и z са константи. Тогава на $\sin \frac{y}{z}$ също трябва да гледаме като на някаква константа. Ето защо $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x}(x) \sin \frac{y}{z} = \sin \frac{y}{z}$. Аналогично, за да намерим частната производна относно y, си мислим, само за момент, че x и z са някакви константи. Тогава, позовавайки се на правилото за диференциране на сложна функция на променливата y, намиране

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y, z) = x \frac{\partial}{\partial y} \left(\sin \frac{y}{z} \right) = x \cos \left(\frac{y}{z} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{z} \right) = x \cos \left(\frac{y}{z} \right) \frac{1}{z} = \frac{x}{z} \cos \frac{y}{z}.$$

Накрая, за да намерим частната производна относно z, си мислим, само за момент, че x и y са константи. Тогава

$$\frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z) = x\frac{\partial}{\partial z}\left(\sin\frac{y}{z}\right) = x\cos\left(\frac{y}{z}\right)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{y}{z}\right) = x\cos\left(\frac{y}{z}\right)\left(-\frac{y}{z^2}\right) = -\frac{xy}{z^2}\cos\frac{y}{z}. \quad \blacktriangleleft$$

Разглеждането на примери на функции показва, че може да се направят следните заключения:

1. От непрекъснатостта на една функция в дадена точка ***не следва*** *съществуване на частните ѝ производни в тази точка.*

2. От съществуването на частните производни на една функция, даже и в околност на дадена точка, ***не следва*** *непрекъснатост на функцията в тази точка.*

3.2. Диференцируемост на функция на няколко променливи. Да си спомним, че за функция $y = f(x)$ на една променлива съществуването на крайна производна $f'(x)$ в точката x_0 *е еквивалентно* на възможността за представяне на нарастването $\Delta f = f(x) - f(x_0)$ на функцията $f(x)$ във вида

$$\Delta f = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x, \tag{7}$$

където A е число, независещо от Δx, а $\alpha(\Delta x)$ е безкрайно малка функция при $\Delta x \to 0$. Тогава съществуването на крайна производна и възможността за представяне на Δf във вида (7) се приемат като еквивалентни определения на понятието *диференцируемост* на функцията $f(x)$ в точката x_0.

Тъй като при функция на няколко променливи частните производни се характеризират само от измененията на функцията по направленията на координатните оси, естествено е да въведем обобщение на понятието диференцируемост на такава функция, като обобщим представянето (7). Да разгледаме отначало функция $z = f(M) = f(x,y)$ на две променливи, дефинирана в множеството D. Нека точката $M_0(x_0,y_0)$ е вътрешна точка на D, точката $M(x,y)$ е също точка от D, и нека още $\Delta x = x - x_0$ и $\Delta y = y - y_0$ са нарастванията на координатите на точката $M(x,y)$ относно съответните координати на точката $M_0(x_0,y_0)$, вж. фиг. 3.1. Да напомним, че *нарастването* (или *пълното нарастване*) Δf на функцията $f(M)$ в точката M_0, съответстващо на нарастванията Δx и Δx на аргументите ѝ, се дава от разликата

$$\Delta f = f(M) - f(M_0) = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0). \tag{8}$$

Определение 2 ***(Определение за диференцируемост на функция)***. *Функцията $z = f(x,y)$ се нарича* ***диференцируема*** *в точката M_0, ако пълното ѝ нарастване Δf в тази точка може да се представи във вида*

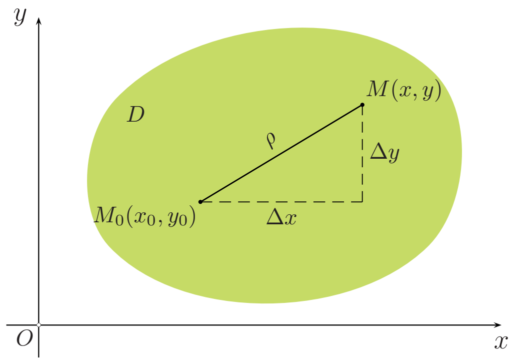
$$\Delta f = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x,\Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x,\Delta y)\Delta y, \tag{9}$$

където A и B са числа, независещи от Δx и Δy, а $\alpha(\Delta x,\Delta y)$ и $\beta(\Delta x,\Delta y)$ са безкрайно малки функции при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$.

Очевидно сумата $\alpha\Delta x + \beta\Delta y$ от дясната страна на представянето (9) е безкрайно малка функция при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$. За тази сума можем да направим оценката

$$\begin{aligned} 0 \le |\alpha\Delta x + \beta\Delta y| &\le |\alpha||\Delta x| + |\beta||\Delta y| = |\alpha|\sqrt{(\Delta x)^2} + |\beta|\sqrt{(\Delta y)^2} \\ &\le |\alpha|\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} + |\beta|\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2} = (|\alpha| + |\beta|)\,\rho(\Delta x,\Delta y), \end{aligned}$$

където $\rho(\Delta x,\Delta y) = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ е разстоянието между точките $M(x,y)$ и $M_0(x_0,y_0)$. Лесно се вижда, че $\rho(\Delta x,\Delta y) \to 0$ ***тогава и само тогава, когато*** $\Delta x \to 0$ ***и*** $\Delta y \to 0$, вж. фиг. 3.1. След разделяне на ρ получените неравенства могат да се запишат във вида



Фиг. 3.1

$$0 \le \left| \frac{\alpha\Delta x + \beta\Delta y}{\rho} \right| \le |\alpha| + |\beta|.$$

Тъй като $|\alpha| + |\beta| \to 0$ при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$, т.е. при $\rho \to 0$, от последните неравенства следва, че $\lim\limits_{\rho\to 0} \dfrac{\alpha\Delta x + \beta\Delta y}{\rho} = 0$. Но това означава, че функцията $\alpha\Delta x + \beta\Delta y$ е безкрайно малка от по-висок ред в сравнение с ρ при $\rho \to 0$, т.е. $\alpha\Delta x + \beta\Delta y = o(\rho)$ при $\rho \to 0$. Следователно представянето (12) може да се запише във вида

$$\Delta f = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho) \quad \text{при} \quad \rho \to 0. \tag{10}$$

Теорема 1. *Ако функцията $f(x,y)$ е диференцируема в точката M_0, то тя е непрекъсната в тази точка.*

От непрекъснатост на една функция в една точка ***не следва*** *диференцируемост на функцията в тази точка*[1], т.е. обратното твърдение на теорема 1 не е вярно. От тази теорема можем само да направим следния извод:

Следствие 1. *Ако функцията $f(x,y)$ не е непрекъсната в точката M_0, то тя не е диференцируема в тази точка.*

Теорема 2. *Ако функцията $z = f(x,y)$ е диференцируема в точката $M_0(x_0,y_0)$, то в тази точка съществуват частните ѝ производни $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, и*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = A \quad \text{и} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) = B. \tag{11}$$

Теорема 3. *Ако функцията $f(x,y)$ има частни производни в околност на точката M_0 и те са непрекъснати в тази точка, то функцията е диференцируема в точката M_0.*

Тази теорема има важно значение за установяване на диференцируемостта на една функция $f(x,y)$, тъй като много често проверка за непрекъснатост на частните ѝ производни $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ в една точка се оказва по-лесна задача, отколкото установяването на възможността за представяне на нарастването Δf на функцията във вида (9) или (10).

3.3. Диференциал на функция. Допирателна равнина. Да си спомним, че диференциалът $\mathrm{d}f$ на функция $f(x)$ на една променлива в точката x_0 се дефинира като линейната функция $A\Delta x$: $\mathrm{d}f(x_0) = A\mathrm{d}x$, където $\mathrm{d}x = \Delta x$ и $A = f'(x_0)$. Тогава $\Delta f = \mathrm{d}f(x_0) + o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$. Също така диференцируемостта на функцията в тази точка се отъждествява със съществуването на допирателна (тангента) към графиката на функцията в точката $M_0(x_0, f(x_0))$, чието уравнение е $y - f(x_0) = m(x - x_0)$ при ъглов коефициент $m = f'(x_0)$. При това, оказва се, че диференциалът $\mathrm{d}f$ на функцията $f(x)$ представлява нарастването Δg на линейната функция $y = g(x) = f(x_0) + m(x - x_0)$, чиято графика е допирателната в точката $M_0(x_0, f(x_0))$. Това се обобщава по естествен начин и за функции на няколко променливи.

Нека функцията $z = f(x, y)$ е диференцируема във вътрешната точка $M_0(x_0, y_0)$ от дефиниционната ѝ област D.

Определение 3. *Линейната функция $A\,\Delta x + B\,\Delta y$ в представянето (9) (или (10)) на нарастването Δf се нарича* ***пълен диференциал*** *(или само* ***диференциал****) на функцията f в точката M_0 и се означава с $\mathrm{d}f(M_0)$, т.е.*

$$\mathrm{d}f(M_0) = A\Delta x + B\Delta y \tag{12}$$

От формулите (10) и (12) веднага се вижда, че

$$\Delta f = \mathrm{d}f(M_0) + o(\rho) \qquad \text{при} \qquad \rho \to 0, \tag{13}$$

което показва, че за достатъчно малки стойности на $\rho = \rho(M, M_0)$, т.е. за точки M, достатъчно близки до M_0, можем да пренебрегнем функцията $o(\rho)$ и така да получим приближеното равенство $\Delta f \approx \mathrm{d}f(M_0)$.

Според теорема 2 числата A и B представляват съответните частни производни на функцията $f(x, y)$, вж. формулите (11). Разглеждайки сега, само за момент, частните случаи, когато $f(x, y) = x$ и $f(x, y) = y$, се убеждаваме, че е естествено за диференциали $\mathrm{d}x$ и $\mathrm{d}y$ на независимите променливи x и y да приемем самите нараствания на тези променливи: $\mathrm{d}x = \Delta x$ и $\mathrm{d}y = \Delta y$. Тогава диференциалът $\mathrm{d}f$ може да се запише във вида

$$\mathrm{d}f(M_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)\mathrm{d}y\ . \tag{14}$$

Да заместим сега изразите за съответните нараствания в представянето (10) с координатите на точката $M_0(x_0, y_0)$ и изменящата положението си в D точка $M(x, y)$. Тогава това представяне приема вида

$$f(x, y) = z_0 + A(x - x_0) + B(y - y_0) + o(\rho) \qquad \text{при} \qquad \rho \to 0, \tag{15}$$

където $\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ и $z_0 = f(x_0, y_0)$. Ако в това равенство пренебрегнем функцията $o(\rho)$, ще получим линейната функция

$$z = g(x, y) = z_0 + A(x - x_0) + B(y - y_0)\ , \tag{16}$$

чиято графика е равнина, минаваща през точката $N_0(x_0, y_0, z_0)$. Веднага се вижда, че

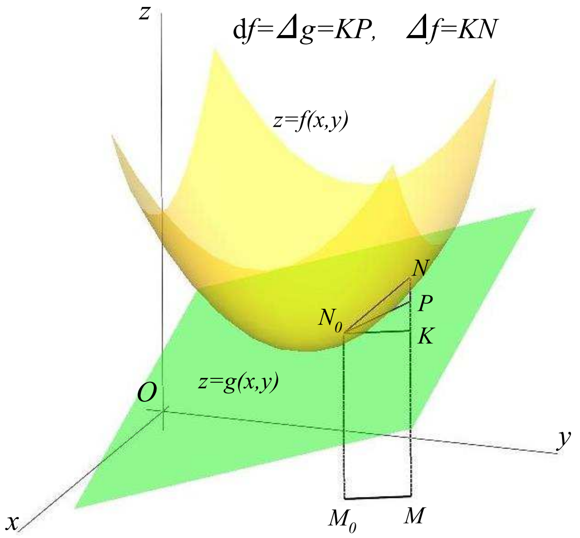
$$f(x, y) = g(x, y) + o(\rho) \qquad \text{при} \qquad \rho \to 0, \tag{17}$$

което означава, че разликата между апликатите на точките от повърхнината $z = f(x, y)$ (графиката на функцията f) и равнината $z = g(x, y)$, съответстващи на точката $M(x, y)$ от D, е безкрайно малка функция от по-висок ред в сравнение с ρ при $\rho \to 0$. (Лесно се вижда, че равенствата (17) и (13) са всъщност само две различни форми на представянето (10).) За диференцируема функция $f(x, y)$ равнината, минаваща през точката N_0 и удовлетворяваща условието (17), е единствена, тъй като това условие е равносилно на представянето (10), означаващо, че $f(x, y)$ е именно такава, диференцируема функция, а коефициентите A и B в уравнението на равнината се определят еднозначно: според теорема 2 те са равни на съответните частни производни на функцията f. *Равнината $z = g(x, y)$ се нарича* ***допирателна*** *(или* ***тангенциална) равнина*** *към повърхнината $z = f(x, y)$ в точката N_0.* Съгласно равенствата (11) нейното уравнение (16) може да се запише във вида

$$z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)(y - y_0)\ . \tag{18}$$

Имайки предвид, че $x - x_0 = \Delta x = \mathrm{d}x$ и $y - y_0 = \Delta y = \mathrm{d}y$, веднага забелязваме, че дясната страна на това уравнение е точно диференциалът $\mathrm{d}f$ на функцията f в точката $M_0(x_0, y_0)$, вж. израза му (14). В лявата страна на уравнение (18) обаче стои текущата координата z на точките от допирателната равнина, т.е. от графиката на линейната функция $z = g(x, y)$. Освен това $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0)$. Ето защо лявата страна на това уравнение представлява точно нарастването Δg на функцията $g(x, y)$. Следователно уравнението (18) показва, че $\Delta g = \mathrm{d}f$. Така достигнахме до следното заключение:

Пълният диференциал на функцията $f(x, y)$ в точката $M_0(x_0, y_0)$ е равен на съответното нарастване на линейната функция $g(x, y)$, чиято графика е допирателната равнина към графиката на функцията f в съответната точка $N_0(x_0, y_0, f(M_0))$.



Фиг. 3.2

Това твърдение е илюстрирано геометрично на фиг. 3.2, където на точката $M(x, y)$ от координатната равнина Oxy съответстват точките $N(x, y, f(M))$ и $P(x, y, g(M))$, намиращи се съответно върху повърхнината $z = f(x, y)$ и допирателната равнина $z = g(x, y)$, а отсечката N_0K е успоредна на отсечката M_0M.

Накрая да си спомним от аналитичната геометрия, че векторът $\boldsymbol{n} = (A, B, C)$, чиито координати са равни на съответните коефициенти пред текущите координати x, y и z в уравнението $Ax + By + Cz + D = 0$ на една равнина, е перпендикулярен на тази равнина. От уравнение (18) лесно се вижда, че за допирателната равнина това е векторът

$$\boldsymbol{n} = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}, \qquad (19)$$

където $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{k}$ са единичните вектори (ортите) по координатните оси. Този вектор е перпендикулярен на допирателната равнина в точката M_0 и се нарича ***нормален вектор*** към повърхнината $z = f(x, y)$ в тази точка.

---

[1] До същото заключение се стига даже за функция на една променлива при разглеждането на функцията $f(x) = |x|$.